

Modelo de Toma de Decisión que Considera el Comportamiento y la Duda de los Expertos

Rosa M. Rodríguez¹ *, Cuiping Wei², and Luis Martínez³

¹ Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A., Universidad de Granada, España

² College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, China

³ Dpto. de Informática, Universidad de Jaén, España

Resumen El método TODIM (Toma de Decisión Interactiva y Multi-criterio) ha sido utilizado en la Toma de Decisiones (TD) para incorporar el comportamiento de los expertos modelado por la *Prospect Theory*. Diversas extensiones para el método TODIM han sido presentadas para manejar la incertidumbre de distintos problemas de TD. Recientemente, el modelado de la duda de los expertos al proporcionar sus preferencias ha despertado el interés de múltiples investigaciones. En esta contribución se presenta una extensión del método TODIM para modelar la duda de los expertos en problemas de TD lingüística mediante el uso de Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos (CTLDD), para lo que será necesario mejorar funciones de comparación de CTLDD actuales.

Keywords: Toma de decisión multi-criterio, conjunto de términos lingüísticos difusos dudosos, modelo TODIM, función de evaluación.

1. Introducción

La Toma de Decisión Multicriterio (TDMC) es un proceso de decisión complejo no sólo porque los criterios puedan ser contradictorios y conflictivos entre sí, sino también por la incertidumbre inherente a la valoración de los mismos. En la Toma de Decisión (TD) lingüística [7] dicha incertidumbre ha sido modelada satisfactoriamente con información lingüística mediante el *Enfoque Lingüístico Difuso* [5]. En la mayoría de las ocasiones las valoraciones lingüísticas consistían en términos lingüísticos simples, una única etiqueta, dando lugar a situaciones en las que los expertos no podían o no sabían modelar su conocimiento mediante una única etiqueta lingüística. Para facilitar el modelado de estas situaciones Rodríguez et al. [8] presentaron el concepto de Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos (CTLDD) que permite la expresión de información lingüística mediante el uso de expresiones lingüísticas complejas generadas por gramáticas libres de contexto.

Dado que nuestro interés se centra en la integración del uso de los CTLDD junto con el comportamiento de los expertos en la TDMC, en esta contribución consideramos el uso del modelo TODIM [1] que utiliza la *Prospect Theory* (PT)

* Autor de contacto: rosam.rodriguez@decsai.ugr.es

Rodríguez et al.

[2] para modelar el comportamiento de los expertos respecto a su aversión al riesgo y que ha sido aplicado con éxito a distintos problemas de TD [6] en contexto cuantitativos, incluyendo extensiones para manejar números difusos [3], conjuntos difusos dudosos [12], etc.

Para alcanzar el objetivo de nuestra contribución presentaremos una extensión del modelo TODIM capaz de manejar CTLDD, para ello también introduciremos una función de evaluación para mejorar la comparación de CTLDD debido a que TODIM hace uso de comparaciones entre criterios. Dicha función para comparar CTLDD se integrará en nuestra propuesta para la medición del grado de dominancia que calcula el TODIM.

El resto de esta contribución se organiza como sigue: la Sección 2 hace una breve revisión sobre el modelo TODIM y el concepto de CTLDD. La Sección 3 define una nueva función de evaluación para comparar CTLDD. La sección 4 presenta el modelo TODIM extendido para CTLDD. La sección 5 muestra un ejemplo ilustrativo del modelo TODIM propuesto, y finalmente se presentan algunas conclusiones en la Sección 6.

2. Preliminares

Esta sección introduce brevemente el modelo TODIM y revisa conceptos básicos sobre CTLDD.

2.1. Modelo TODIM clásico

El modelo TODIM [1] mide el grado de dominancia de cada alternativa sobre el resto utilizando una función valor basada en la PT [2]. Su principal ventaja es su capacidad para capturar el comportamiento de los expertos.

Suponemos un problema TDMC donde $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto de alternativas, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ un conjunto de criterios y $w = \{w_1, \dots, w_n\}$ un vector de pesos de criterios, siendo w_j el peso del criterio c_j . Sea $P = (p_{ij})_{m \times n}$ su matriz de decisión, con p_{ij} la valoración del experto para la alternativa $x_i \in X$ respecto al criterio $c_j \in C$. El modelo TODIM consiste en 6 pasos:

1. Normalizar la matriz de decisión $P = (p_{ij})_{m \times n}$ en $Z = (z_{ij})_{m \times n}$.
2. Calcular los pesos relativos w_{jr} de los criterios $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ respecto al criterio de referencia c_r :

$$w_{jr} = w_j/w_r, \quad (1)$$

siendo $w_r = \max\{w_j | j = 1, \dots, n\}$.

3. Calcular el grado de dominancia, $\Phi_j(x_i, x_k)$, para cada alternativa x_i sobre el resto de alternativas x_j con respecto a cada criterio c_j , i.e.,

$$\Phi_j(x_i, x_k) = \begin{cases} \sqrt{(z_{ij} - z_{kj})w_{jr} / (\sum_{j=1}^n w_{jr})}, & z_{ij} - y_{kj} > 0 \\ 0, & z_{ij} - z_{kj} = 0 \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{(z_{kj} - z_{ij}) (\sum_{j=1}^n w_{jr}) / w_{jr}}, & z_{ij} - z_{kj} < 0, \end{cases} \quad (2)$$

Modelo de Toma Decisión

siendo θ el factor de atenuación de las pérdidas y $z_{ij} - z_{kj}$ indica la ganancia o pérdida de la alternativa x_i sobre la alternativa x_k respecto el criterio c_j si $z_{ij} - z_{kj} > 0$, o si $z_{ij} - z_{kj} < 0$, respectivamente.

4. Calcular el grado de dominancia para cada alternativa x_i sobre el resto $x_k (k = 1, 2, \dots, m)$:

$$\delta(x_i, x_k) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x_i, x_k). \quad (3)$$

5. Calcular el grado de dominancia global para cada alternativa x_i ,

$$\zeta(x_i) = \frac{\sum_{k=1}^m \delta(x_i, x_k) - \min_i \{\sum_{k=1}^m \delta(x_i, x_k)\}}{\max_i \{\sum_{k=1}^m \delta(x_i, x_k)\} - \min_i \{\sum_{k=1}^m \delta(x_i, x_k)\}}, \quad (4)$$

donde $0 \leq \zeta(x_i) \leq 1$.

6. Obtener el ranking de alternativas según el grado de dominancia global. Cuanto mayor sea $\zeta(x_i)$, mejor será la alternativa x_i .

2.2. Conjunto de términos lingüísticos difusos dudosos

Los CTLDD se presentaron en [8] para facilitar el modelado de la duda en TD entre distintos valores lingüísticos en contextos cualitativos:

Definición 1 [8] Sea $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, una CTLDD H_S , se define como un subconjunto finito ordenado de términos lingüísticos consecutivos de S .

$$H_S = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}, \text{ tal que } s_k \in S, \quad k \in \{i, \dots, j\} \quad (5)$$

Ejemplo 1 Sea $S = \{Nada, Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y ϑ una variable lingüística, una CTLDD $H_S(\vartheta)$ podría ser,

$$\begin{aligned} H_S(\vartheta) &= \{Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\} \\ H_S(\vartheta) &= \{Muy Bajo, Bajo, Medio\} \end{aligned}$$

Sin embargo, los expertos no suelen expresar su duda con una secuencia de valores sino utilizando expresiones lingüísticas, S_{II} . Por lo que, Rodríguez et al. [7] propusieron el uso de gramáticas libres de contexto, G_H , para construir dichas expresiones y para operar con ellas se definió una función de transformación, E_{G_H} , [8] de S_{II} a CTLDD.

Definición 2 [8] Sea E_{G_H} una función que transforma las expresiones lingüísticas II obtenidas mediante la gramática libre de contexto G_H , en CTLDD H_S , donde S es el conjunto de términos lingüísticos utilizado por G_H , y S_{II} es el conjunto de expresiones lingüísticas generadas mediante G_H .

$$E_{G_H} : S_{II} \longrightarrow H_S \quad (6)$$

Rodríguez et al.

Para facilitar los procesos computacionales con CTLDD, se propuso el concepto de *envoltura* de un CTLDD.

Definición 3 [8] *La envoltura de un CTLDD H_S , $env(H_S)$ es un intervalo lingüístico cuyos límites son obtenidos mediante sus extremos.*

$$env(H_S) = [H_S^-, H_S^+], \quad H_S^- \leq H_S^+, \quad (7)$$

donde $H_S^- = \min\{s_i | s_i \in H_S\}$ y $H_S^+ = \max\{s_i | s_i \in H_S\}$.

3. Comparación de CTLDD

Dado que nuestro objetivo es extender el modelo TODIM para utilizar CTLDD y dicho modelo hace uso de comparaciones por pares entre los criterios, en esta sección se analizan dos métodos de comparación para CTLDD y se propone un nuevo método mejorado de comparación para CTLDD basado en una función de evaluación.

3.1. Análisis de métodos de comparación de CTLDD

Aquí revisamos dos métodos para comparar CTLDD.

El primer método propuesto en [8] utiliza el concepto de envoltura de un CTLDD y la comparación de intervalos presentada en [9].

Definición 4 [8] *Sean H_S^1 y H_S^2 dos CTLDD y $env(H_S^1) = [H_{S^1}^-, H_{S^1}^+]$, $env(H_S^2) = [H_{S^2}^-, H_{S^2}^+]$ la envoltura de H_S^1 y H_S^2 . La comparación entre H_S^1 y H_S^2 es como sigue:*

$$\begin{aligned} H_S^1 &> H_S^2 \text{ si y solo si } env(H_S^1) > env(H_S^2), \\ H_S^1 &\sim H_S^2 \text{ si y solo si } env(H_S^1) \sim env(H_S^2) \end{aligned}$$

Otro método basado en la teoría de la probabilidad introducido en [11], considera que dos CTLDD, H_S^1 y H_S^2 , para ser comparados tienen que tener el mismo número de términos. Para lo que en caso de ser necesario se construyen dos conjuntos de términos lingüísticos H_1^* y H_2^* añadiendo en cada CTLDD términos lingüísticos existentes en cada conjunto. Por tanto, para comparar H_S^1 y H_S^2 , comparamos los términos lingüísticos en su lugar correspondiente en H_1^* y H_2^* calculando un grado de posibilidad.

Definición 5 [11]. *Sea H_S^1 y H_S^2 dos CTLDD, el grado de posibilidad de H_S^1 sobre H_S^2 , formalizado como $\varrho(H_S^1 \geq H_S^2)$ es calculado como sigue:*

$$\varrho(H_S^1 \geq H_S^2) = \frac{0.5|H_{S(1,2)}^*| + |H_{H_1^* > H_2^*}|}{|H_1^*|}, \quad (8)$$

siendo $H_{S(1,2)}^* = \{s_i \mid s_i \in H_S^1 \cap H_S^2\}$ el conjunto de términos lingüísticos comunes en H_S^1 y H_S^2 , $H_{H_1^* > H_2^*} = \{s_i^1 \mid s_i^1 \in H_1^*, s_i^2 \in H_2^*, s_i^1 > s_i^2\}$ el conjunto de

Modelo de Toma Decisión

todos los términos lingüísticos en H_1^* mayores que los términos en H_2^* , y $|X|$ el número cardinal de un conjunto X .

- $Si \varrho(H_S^1 > H_S^2) > 0.5 \Rightarrow H_S^1$ es superior a H_S^2 con el grado de $\varrho(H_S^1 > H_S^2)$.
- $Si \varrho(H_S^1 > H_S^2) = 1 \Rightarrow H_S^1$ es absolutamente superior a H_S^2 .
- $Si \varrho(H_S^1 > H_S^2) = 0.5 \Rightarrow H_S^1$ es indiferente a H_S^2 .

Para analizar los métodos revisados utilizamos el siguiente ejemplo (ver [10] para más detalle).

Ejemplo 2 Supongamos que tenemos el conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, \dots, s_6\}$ y los CTLDD $H_S^1 = \{s_3\}$, $H_S^2 = \{s_3, s_4\}$ y $H_S^3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$.

Utilizando el método de comparación propuesto en [8] obtenemos que $H_S^2 > H_S^1$, $H_S^2 \sim H_S^3$ y $H_S^3 > H_S^1$. Por tanto, no se puede distinguir entre H_S^2 y H_S^3 . De igual forma, el método introducido en [11], obtiene que H_S^2 es indiferente a H_S^3 y H_S^3 es superior a H_S^1 con un grado de 0.583.

Ambos métodos obtienen el valor 0.5 al comparar H_S^2 y H_S^3 por lo que no es posible distinguir entre ellos. Sin embargo en TD parece que un CTLDD, como H_S^3 , que contiene más términos lingüísticos que H_S^2 , tiene mayor grado de duda, por tanto, H_S^2 debería ser más fiable y mayor que H_S^3 .

Por tanto vamos a definir un nuevo método de comparación que incorpore la anterior consideración al comparar CTLDD.

3.2. Función de evaluación para comparar CTLDD

Proponemos un método de comparación basado en una nueva función de evaluación que considera dos aspectos: (i) el término lingüístico medio y (ii) el grado de duda. De forma que su resultado debería incrementar a medida que se incrementa el término lingüístico medio y decrementar conforme el grado de duda de un CTLDD es mayor, es decir, cuanto mayor sea el número de términos que contiene. Para medir el grado de duda, se calcula la varianza normalizada de los índices de los términos lingüísticos que componen el CTLDD.

Definición 6 Sea $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y $H_S = \{s_{\delta_l} | l = 1, \dots, \#H_S\}$ un CTLDD en S . La función de evaluación $\mathbb{F}(H_S)$ se define,

$$\mathbb{F}(H_S) = \bar{\delta} - \frac{\frac{1}{\#H_S} \sum_{l=1}^{\#H_S} (\delta_l - \bar{\delta})^2}{var(g)}, \quad (9)$$

donde $\bar{\delta} = \frac{1}{\#H_S} \sum_{l=1}^{\#H_S} \delta_l$ y $var(g) = \frac{(0-g/2)^2 + \dots + (g-g/2)^2}{g+1}$.

Definición 7 La comparación entre dos CTLDD está basada en la función de evaluación introducida previamente, $\mathbb{F}(H_S)$.

- $H_S^1 > H_S^2$ si y solo si $\mathbb{F}(H_S^1) > \mathbb{F}(H_S^2)$.
- $H_S^1 = H_S^2$ si y solo si $\mathbb{F}(H_S^1) = \mathbb{F}(H_S^2)$.

Rodríguez et al.

Siguiendo el Ejemplo 2, los CTLDD son comparados usando las Def. 6 y 7.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(H_S^1) &= 3 - \frac{0}{4} = 3, \\ \mathbb{F}(H_S^2) &= 3.5 - \frac{(3-3.5)^2 + (4-3.5)^2}{2 \times 4} = 3.4375 \text{ y} \\ \mathbb{F}(H_S^3) &= 3.5 - \frac{(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2}{6 \times 4} = 2.7708. \end{aligned}$$

Por tanto el ranking obtenido es, $H_S^2 > H_S^1 > H_S^3$.

Como se puede observar, la nueva función de evaluación permite comparar CTLDD más eficientemente, ya que no solo considera el término lingüístico medio, sino también su grado de duda. Esta función de evaluación será utilizada en el modelo TODIM que se presenta en la siguiente sección.

4. Método TODIM extendido para manejar CTLDD

Esta sección propone una extensión del método TODIM para resolver problemas de TDMC utilizando CTLDD. Antes de presentar el nuevo método TODIM se introduce la notación que se va a utilizar.

Sea $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ un conjunto de alternativas, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ un conjunto de criterios y, $w = \{w_1, \dots, w_n\}$ un vector de pesos para los criterios donde $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ y $0 \leq w_j \leq 1$. En este problema de TDMC suponemos que tenemos el conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, \dots, s_g\}$, y la gramática libre de contexto G_H definida en [8] que genera expresiones lingüísticas comparativas para valorar los criterios y alternativas.

En primer lugar las expresiones lingüísticas comparativas proporcionadas por los expertos son transformadas en CTLDD mediante la función de transformación E_{C_H} introducida en la Def. 2, para obtener una matriz de decisión $P = (p_{ij})_{m \times n}$, donde cada valoración p_{ij} es un CTLDD que representa la valoración de la alternativa x_i sobre el criterio c_j .

Los criterios pueden representar costes o beneficios. En caso de ser costes, éstos son transformados en beneficios obteniendo una matriz de decisión normalizada $Z = (z_{ij})_{m \times n}$,

$$z_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & \text{beneficio } c_j, \\ \text{Neg}(p_{ij}), & \text{coste } c_j, \end{cases} \quad (10)$$

donde $\text{Neg}(p_{ij}) = \{\text{Neg}(s_{\delta_l}) | s_{\delta_l} \in p_{ij}, l = 1, \dots, \#p_{ij}\}$. La negación de un término lingüístico $s_i \in S$, se calcula como $\text{Neg}(s_i) = s_{g-i}$.

Una vez la matriz normalizada es obtenida, se calcula el grado de dominancia para cada alternativa utilizando una función valor basada en la PT [2]. Para ello es necesario establecer un criterio de referencia y calcular el peso relativo de cada criterio al criterio de referencia. Normalmente, el criterio con mayor peso es el que se establece como criterio de referencia y el peso relativo w_{jr} del criterio c_j respecto el criterio de referencia c_r se puede obtener mediante la Ec. (1). Las valoraciones z_{ij} son comparadas mediante la Def. 6 y a continuación se calcula el grado de dominancia de cada alternativa x_i sobre el resto de alternativas x_k según un criterio c_j mediante la siguiente función:

Modelo de Toma Decisión

$$\Phi_j(x_i, x_k) = \begin{cases} \sqrt{w_{jr} d_G(z_{ij}, z_{kj}) / \sum_{j=1}^n w_{jr}}, & \text{si } \mathbb{F}(z_{ij}) - \mathbb{F}(z_{kj}) > 0; \\ 0, & \text{si } \mathbb{F}(z_{ij}) - \mathbb{F}(z_{kj}) = 0; \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n w_{jr}\right) d_G(z_{kj}, z_{ij}) / w_{jr}}, & \text{si } \mathbb{F}(z_{ij}) - \mathbb{F}(z_{kj}) < 0, \end{cases} \quad (11)$$

donde la distancia $d_G(z_{ij}, z_{kj})$ definida en [4] muestra la ganancia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_k respecto al criterio c_j si $\mathbb{F}(z_{ij}) - \mathbb{F}(z_{kj}) > 0$, y la pérdida si $\mathbb{F}(z_{ij}) - \mathbb{F}(z_{kj}) < 0$. El parametro $\theta > 0$ es el factor de atenuación de las pérdidas. Por tanto, cuanto mayor sea θ menor será el grado de aversión.

El grado de dominancia $\delta(x_i, x_k)$ de la alternativa x_i sobre la alternativa x_k se obtiene mediante la Ec. (3). Después se obtiene el grado de dominancia global $\zeta(x_i)$ para cada alternativa mediante la Ec. (4). Finalmente las alternativas son ordenadas según su grado de dominancia global.

A continuación se introduce un algoritmo que indica los pasos a seguir para aplicar el método TODIM propuesto.

1. Transformar las expresiones lingüísticas comparativas proporcionadas en CTLDD mediante la función de transformación E_{G_H} .
2. Construir la matriz de decisión de CTLDD, $P = (p_{ij})_{m \times n}$, $p_{ij} \in H_S$.
3. Normalizar la matriz de decisión mediante la Ec. (10), $Z = (z_{ij})_{m \times n}$.
4. Determinar el criterio de referencia c_r y calcular los pesos relativos w_{jr} ($j = 1, \dots, n$) mediante la Ec. 1.
5. Calcular el grado de dominancia $\Phi_j(x_i, x_k)$ de las alternativas x_i ($i = 1, \dots, m$) sobre las alternativas x_k ($k = 1, \dots, m$) respecto a cada criterio c_j utilizando la Ec. (11).
6. Calcular el grado de dominancia $\delta(x_i, x_k)$ de cada alternativa x_i ($i = 1, \dots, m$) sobre el resto de alternativas x_k ($k = 1, \dots, m$) utilizando la Ec. (3).
7. Calcular el grado de dominancia global $\zeta(x_i)$ para cada alternativa x_i utilizando la Ec. (4).
8. Ordenar las alternativas mediante el grado de dominancia global obtenido en el paso anterior.

5. Ejemplo ilustrativo

Esta sección presenta un problema de TDMC el cual es resuelto mediante el modelo TODIM propuesto en la sección anterior.

Supongamos que una empresa tiene que seleccionar la compañía de telecomunicaciones que mejor se ajusta a sus necesidades y el director de la empresa tiene que elegir entre 4 posibles alternativas: *compañía 1* (x_1), *compañía 2* (x_2), *compañía 3* (x_3) y *compañía 4* (x_4). Para ello tiene en cuenta 4 criterios: *satisfacción del precio* (c_1), *calidad* (c_2), *servicio* (c_3) y *seguridad* (c_4). El director de la empresa proporciona sus valoraciones mediante expresiones lingüísticas comparativas generadas por la gramática libre de contexto G_H definida en [8] y el conjunto de términos lingüísticos $S = \{\text{ninguno}(n), \text{muy bajo}(mb), \text{bajo}(b), \text{medio}(m),$

Rodríguez et al.

$\{alto(a), muy\ alto(ma), perfecto(p)\}$. En este problema los criterios tienen distinta importancia, siendo el vector de pesos $w = (0.2, 0.15, 0.15, 0.5)^T$. La Tabla 1 muestra las valoraciones proporcionadas por el director de la empresa.

Tabla 1. Valoraciones sobre las alternativas y criterios

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	entre b y a	ma	entre mb y m	entre mb y m
x_2	menor que mb	entre b y m	entre a y ma	entre a y ma
x_3	menor que b	entre b y ma	ma	p
x_4	m	entre b y a	entre mb y b	mayor que ma

Para resolver este problema de TDMC seguiremos los pasos del modelo TODIM propuesto para manejar CTLDD.

1. Las expresiones lingüísticas comparativas proporcionadas por el director de la empresa son transformadas en CTLDD tal y como muestra la Tabla 2.

Tabla 2. Valoraciones transformadas en CTLDD

	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	{b,m,a}	{ma}	{mb,b,m}	{mb,b,m}
x_2	{n,mb}	{b,m}	{a,ma}	{a,ma}
x_3	{n,mb,b}	{b,m,a,ma}	{ma}	{p}
x_4	{m}	{b,m,a}	{mb,b}	{ma,p}

2. Construimos la matriz de decisión de CTLDD, $P = (p_{ij})_{m \times n}$.

$$P = \begin{pmatrix} \{b, m, a\} & \{ma\} & \{mb, b, m\} & \{mb, b, m\} \\ \{n, mb\} & \{b, m\} & \{a, ma\} & \{a, ma\} \\ \{n, mb, b\} & \{b, m, a, ma\} & \{ma\} & \{p\} \\ \{m\} & \{b, m, a\} & \{mb, b\} & \{ma, p\} \end{pmatrix}.$$

3. La matriz de decisión P , está ya normalizada.
4. Seleccionamos como criterio de referencia, *Seguridad* (c_4), ya que es el criterio con mayor peso, $w_4=0.5$. Los pesos relativos son,

$$w_{41} = 0.4, w_{42} = 0.3, w_{43} = 0.3, w_{44} = 1.$$

5. Calculamos el grado de dominancia $\Phi_j(x_i, x_k)$ de las alternativas $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sobre las alternativas $x_k (k = 1, 2, 3, 4)$ respecto a cada criterio c_j . Para ello utilizamos la medida de distancia generalizada definida en [4] con $\lambda=1.5$ y el factor de atenuación $\theta = 1$. Los resultados obtenidos son mostrados en la Tabla 3.
6. Calculamos el grado de dominancia $\delta(x_i, x_k)$ de cada alternativa sobre el resto de alternativas (ver Tabla 4).

Modelo de Toma Decisión

Tabla 3. Grados de dominancia de cada alternativa sobre el resto de alternativas respecto a cada criterio

c_1	x_1	x_2	x_3	x_4	c_2	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0.2682	0.239	-0.7383	x_1	0	0.2326	0.192	0.2113
x_2	-1.3408	0	-0.6482	-1.343	x_2	-1.5507	0	-1.0526	-0.7485
x_3	-1.1952	0.1296	0	-1.22	x_3	-1.28	0.1579	0	0.1162
x_4	0.1477	0.2686	0.244	0	x_4	-1.4088	0.1123	-0.7746	0

c_3	x_1	x_2	x_3	x_4	c_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	-1.5482	-1.7059	0.1123	x_1	0	-0.848	-1.0746	-1.0017
x_2	0.2322	0	-0.7746	0.2535	x_2	0.424	0	-0.6637	-0.5345
x_3	0.2559	0.1162	0	0.2746	x_3	0.5373	0.3318	0	0.2121
x_4	-0.7485	-1.6903	-1.8304	0	x_4	0.5008	0.2673	-0.4243	0

Tabla 4. Grado de dominancia de cada alternativa sobre el resto de alternativas

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	-1.8954	-2.3495	-1.4164
x_2	-2.2353	0	-3.1391	-2.3724
x_3	-1.682	0.7356	0	-0.6172
x_4	-1.5088	-1.0422	-2.7852	0

7. Calculamos el grado de dominancia global $\zeta(x_i)$ para cada alternativa.

$$\zeta(x_1) = 0.3373, \zeta(x_2) = 0, \zeta(x_3) = 1, \zeta(x_4) = 0.3899.$$

8. Ordenamos las alternativas según el grado de dominancia global,

$$x_3 > x_4 > x_1 > x_2.$$

Finalmente, el director de la empresa selecciona como mejor compañía de telecomunicaciones la *compañía 3*.

6. Conclusiones

El modelo TODIM se usa para resolver problemas de TDMC considerando el comportamiento de los expertos respecto a su aversión al riesgo. Sin embargo, sólo permite a los expertos expresar sus valoraciones mediante información numérica y en muchas situaciones debido a la incertidumbre y vaguedad de la información, el uso de información lingüística es más adecuado. Recientemente se ha introducido el concepto de CTLDD que permite modelar la duda que pueden tener los expertos cuando tienen que expresar sus valoraciones mediante información lingüística. En esta contribución hemos propuesto una extensión del modelo TODIM capaz de modelar la duda de los expertos mediante CTLDD. La ventaja más importante del modelo propuesto es que puede modelar la duda de los expertos a la vez que considera su comportamiento. Además, se ha definido una función de evaluación para mejorar la comparación de CTLDD con respecto a otros métodos.

Rodríguez et al.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2015-66524-P, el Ministerio de Economía y Competitividad formación posdoctoral (FPDI-2013-18193), la red de excelencia Lógica Difusa y Soft Computing (LODISCO) TIN2014-56381-REDT y fondos FEDER.

Referencias

1. L.F.A.M. Gomes and M.M.P.P. Lima. TODIM: Basics and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 16(4):113–127, 1992.
2. D. Kahneman and A. Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47:263–292, 1979.
3. R.A. Krohling and T.M. de Souza. Combining prospect theory and fuzzy numbers to multi-criteria decision making. *Expert Systems with Applications*, 39(13):11487–11493, 2012.
4. H.C. Liao, Z.S. Xu, and X.J. Zeng. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making. *Information Sciences*, 271(1):125–142, 2014.
5. L. Martínez. Sensory evaluation based on linguistic decision analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):148–164, 2007.
6. A.C. Passos, M.G. Teixeira, K.C. Garcia, A.M. Cardoso, and L.F.A.M. Gomes. Using the TODIM-FSE method as a decision-making support methodology for oil spill response. *Computers & Operations Research*, 42:40 – 48, 2014.
7. R.M. Rodríguez and L. Martínez. An analysis of symbolic linguistic computing models in decision making. *International Journal of General Systems*, 42(1):121–136, 2013.
8. R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.
9. Y.M. Wang, J.B. Yang, and D.L. Xu. A preference aggregation method through the estimation of utility intervals. *Computers and Operations Research*, 32:2027–2049, 2005.
10. C. Wei, Z. Ren, and R.M. Rodríguez. A hesitant fuzzy linguistic TODIM method based on a score function. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(4):701–712, 2015.
11. C.P. Wei, N. Zhao, and X.J. Tang. Operations and comparisons of hesitant fuzzy linguistic term sets. *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*, 22(3):575–585, 2014.
12. X.L. Zhang and Z.S. Xu. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment. *Knowledge-Based Systems*, 61:48–58, 2014.