# Operadores de implicación respecto a órdenes admisibles

M. Asiain[a], H. Bustince[b,c] (✉)*, J. Fernandez [b,c], M. Elkano[b,c], L. De Miguel[b,c], and M. Sesma-Sara[b,c]

[a] Dept. de Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia, s/n, 31.006 Pamplona, Spain
[b] Dept. de Automática y Computación, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia, s/n, 31.006 Pamplona, Spain
[c] Institute of Smart Cities, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia, s/n, 31.006 Pamplona, Spain
asiain@unavarra.es
bustince@unavarra.es
fcojavier.fernandez@unavarra.es
mikel.elkano@unavarra.es
laura.demiguel@unavarra.es
mikel.sesma@unavarra.es
gracaliz@furg.br

**Resumen** En este trabajo, consideramos la definición de funciones de implicación difusas en el marco intervalo-valorado utilizando órdenes admisibles a la hora de tratar la monotonía. Aprovechamos estos desarrollos para extender algunos conceptos a conjuntos intervalo-valorados usando órdenes admisibles. En particular se introducen: las funciones de equivalencia y de equivalencia restringida, medida de similitud, distance y medidas de entropías.

**Keywords:** Función de implicación intervalo-valorada, orden admisible, medida de similitud

## 1. Introducción

Las funciones de implicación son muy relevantes en muchas aplicaciones de la lógica difusa. Por ello, existen muchos trabajos en la literatura que analizan estos operadores tanto en el marco de los conjuntos difusos [1,2,3,4] como en el de las extensiones [5,6,7,8,9]. Un punto clave a la hora de definir estas funciones es el de la monotonía. Cuando se generalizan a las extensiones de los conjuntos difusos, este problema de la monotonía no es trivial, ya que en la mayor parte de los casos no existe un orden lineal natural y, para algunas aplicaciones, es necesario poder comparar dos elementos cualesquiera [10].

En este trabajo estudiamos operadores de implicación intervalo-valorados para los que la monotonía se define en términos de los órdenes admisibles [11].

* ✉Corresponding author

Esta es una clase de órdenes lineales entre intervalos que extienden el orden parcial usual y que incluye los ejemplos más utilizados de órdenes intervalares totales, como los lexicográficos o el de Xu y Yager. En particular, consideramos la construcción de medidas de comparación a partir de estas implicaciones intervalo-valoradas.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 presentamos algunos resultados y definiciones preliminares. En la Sección 3 presentamos la definición de función de implicación. En la Sección 4 construimos funciones de equivalencia y de equivalencia restringida con respecto a órdenes lineales. En la Sección 5 construimos medidas de comparación. Terminamos con algunas conclusiones y referencias.

## 2. Preliminares

Vamos a trabajar con subintervalos cerrados del intervalo unidad. Por ello, definimos el siguiente conjunto:

$$L([0,1]) = \{[\underline{X}, \overline{X}] \mid 0 \leq \underline{X} \leq \overline{X} \leq 1\}\ .$$

Denotamos por $\leq_L$ una relación de orden arbitraria en $L([0,1])$ con $0_L = [0,0]$ como elemento mínimo y $1_L = [1,1]$ como elemento máximo. Esta relación de orden puede ser total o parcial. Si queremos hablar específicamente de un orden total, lo denotaremos por $\leq_{TL}$.

**Ejemplo 1** *Ejemplos de relaciones de orden en $L([0,1])$.*

*a) La relación de orden parcial en $L([0,1])$ inducida por el orden (parcial) usual en $\mathbb{R}^2$ es:*

$$[\underline{X}, \overline{X}] \precsim_L [\underline{Y}, \overline{Y}] \text{ si } \underline{X} \leq \underline{Y} \text{ y } \overline{X} \leq \overline{Y}. \tag{1}$$

*b) Como ejemplo de orden total en $L([0,1])$ tenemos el de Xu y Yager (véase [12]):*

$$[\underline{X}, \overline{X}] \leq_{XY} [\underline{Y}, \overline{Y}] \text{ si } \begin{cases} \underline{X} + \overline{X} < \underline{Y} + \overline{Y} \text{ o} \\ \underline{X} + \overline{X} = \underline{Y} + \overline{Y} \text{ y } \overline{X} - \underline{X} \leq \overline{Y} - \underline{Y}. \end{cases} \tag{2}$$

**Definición 1** *Un orden admisible en $L([0,1])$ es un orden lineal $\leq_{TL}$ que extiende el orden parcial $\precsim_L$.*

En este trabajo, cuando hablamos de un orden lineal entre intervalos, asumimos que es admisible.

**Definición 2** *Sea $\leq_L$ una relación de orden en $L([0,1])$. La función $N\colon L([0,1]) \to L([0,1])$ es una negación intervalo-valorada (IV negación) si es decreciente respecto al orden $\leq_L$ y cumple las condiciones de frontera $N(0_L) = 1_L$ y $N(1_L) = 0_L$. Una negación $N$ es fuerte si $N(N(X)) = X$ para todo $X \in L([0,1])$. Una negación $N$ es non-filling si $N(X) = 1_L$ si y solo si $X = 0_L$, y $N$ es non-vanishing si $N(X) = 0_L$ si y solo si $X = 1_L$.*

**Definición 3** *Sea $n \geq 2$. Una función de agregación intervalo-valorada (IV) (n-dimensional) en $(L([0,1]), \leq_L, 0_L, 1_L)$ es una función $M : (L([0,1]))^n \to L([0,1])$ tal que:*

(I) $M(0_L, \cdots, 0_L) = 0_L$.
(II) $M(1_L, \cdots, 1_L) = 1_L$.
(III) *$M$ es creciente respecto a $\leq_L$.*

**Ejemplo 2** *Sea $\alpha \in [0,1]$. Con el orden $\leq_{XY}$, la función*

$$M_\alpha \colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$$

*dada por*

$$M_\alpha([\underline{X}, \overline{X}], [\underline{Y}, \overline{Y}]) = [\alpha \underline{X} + (1-\alpha)\underline{Y}, \alpha \overline{X} + (1-\alpha)\overline{Y}]$$

*es una función de agregación IV.*

## 3. Funciones de implicación intervalo-valoradas

**Definición 4 (cf. [7] y [3])** *Una función de implicación intervalo-valorada (IV) en $(L([0,1]), \leq_L, 0_L, 1_L)$ es una función $I \colon (L([0,1]))^2 \to L([0,1])$ tal que:*

(I) *$I$ es decreciente en su primera componente y creciente en su segunda respecto al orden $\leq_L$.*
(II) $I(0_L, 0_L) = I(0_L, 1_L) = I(1_L, 1_L) = 1_L$.
(III) $I(1_L, 0_L) = 0_L$.

Algunas propiedades que se pueden requerir a una función de implicación IV son las siguientes [13]:

$I4$ : $I(X,Y) = 0_L \Leftrightarrow X = 1_L$ y $Y = 0_L$.
$I5$ : $I(X,Y) = 1_L \Leftrightarrow X = 0_L$ o $Y = 1_L$.
$NP$ : $I(1_L, Y) = Y$ para todo $Y \in L([0,1])$.
$EP$ : $I(X, I(Y,Z)) = I(Y, I(X,Z))$ para todo $X, Y, Z \in L([0,1])$.
$OP$ : $I(X,Y) = 1_L \Leftrightarrow X \leq_L Y$.
$SN$ : $N(X) = I(X, 0_L)$ es una negación IV fuerte.
$CB$ : $I(X,Y) \geq_L Y$ para todo $X, Y \in L([0,1])$.
$IP$ : $I(X,X) = 1_L$ para todo $X \in L([0,1])$.
$CP$ : $I(X,Y) = I(N(Y), N(X))$ para todo $X, Y \in L([0,1])$, donde $N$ es una negación IV.
$I14$ : $I(X, N(X)) = N(X)$ para todo $X \in L([0,1])$,donde $N$ es una negación IV.

Podemos obtener implicaciones IV a partir de funciones de agregación IV como sigue.

**Proposición 1** *Sea $M$ una función de agregación IV tal que*

$$M(1_L, 0_L) = M(0_L, 1_L) = 0_L$$

*y sea $N$ una negación IV en $L([0,1])$, ambas con respecto al mismo orden $\leq_L$.*
*Entonces, $I_M\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por*

$$I_M(X,Y) = N(M(X, N(Y)))$$

*es una función de implicación IV.*

*Demostración.* Se sigue de un cálculo directo. □

En este trabajo, sin embargo, vamos a considerar un método de construcción de implicaciones IV diferente.

**Proposición 2** *Sea $\leq_L$ un orden en $L([0,1])$,y sea $N$ una negación IV respecto a ese mismo orden. Entonces, $I\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ definida por*

$$I(X,Y) = \begin{cases} 1_L, & \text{si } X \leq_L Y, \\ \vee(N(X), Y), & \text{si } X >_L Y. \end{cases}$$

*es una función de implicación IV.*

*Demostración.* Claramente $I$ es creciente en la segunda componente y decreciente en la primera. Además,

$$I(0_L, 0_L) = I(0_L, 1_L) = I(1_L, 1_L) = 1_L$$

y $I(1_L, 0_L) = 0_L$. □

Podemos generalizar este resultado como sigue [1]:

**Proposición 3** *Sea $\leq_L$ un orden en $L([0,1])$, y sea $N$ una negación IV respecto a ese mismo orden. Si $M\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ es una función de agregación IV, entonces $I\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por*

$$I(X,Y) = \begin{cases} 1_L, & \text{si } X \leq_L Y, \\ M(N(X), Y), & \text{si } X >_L Y, \end{cases}$$

*es una función de implicación IV.*

Nótese que las proposiciones 1,2 y 3 están relacionadas con la construcción de implicaciones fuerte (o S-implicaciones) en $[0,1]$, dada por $I(x,y) = S(N(x), y)$ o una construcción similar usando la dualidad t-norma/t-conorma. Sin embargo, al utilizar una agregación que no está siempre por debajo del mínimo (como ocurre en las t-normas), es necesario definir la implicación como una función a trozos en las proposiciones 2 y 3.

## 4. Funciones de equivalencia y de equivalencia restringida en $L([0,1])$ respecto a un orden lineal

En esta sección solo consideramos órdenes lineales.

Las funciones de equivalencia [14,15,16] son una herramienta fundamental para construir medidas de comparación entre conjuntos difusos. En esta sección construimos funciones de equivalencia intervalo-valoradas a partir de funciones de agregación y negaciones IV.

**Definición 5** *Una función $F\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ es una función de equivalencia intervalo-valorada (EFIV) respecto al orden $(L([0,1]), \leq_{TL})$ si*

*(1) $F(X,Y) = F(Y,X)$ para todo $X, Y \in L([0,1])$.*
*(2) $F(0_L, 1_L) = F(1_L, 0_L) = 0_L$.*
*(3) $F(X,X) = 1_L$ para todo $X \in L([0,1])$.*
*(4) Si $X \leq_{TL} X' \leq_{TL} Y' \leq_{TL} Y$, entonces $F(X,Y) \leq_{TL} F(X',Y')$.*

**Teorema 1** *Sea $M_1\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ una función de agregación IV tal que $M_1(X,Y) = M_1(Y,X)$ para todo $X, Y \in L([0,1])$, $M_1(X,Y) = 1_L$ si y solo si $X = Y = 1_L$ y $M_1(X,Y) = 0_L$ si y solo si $X = 0_L$ o $Y = 0_L$. Sea $M_2\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ una función de agregación IV tal que $M_2(X,Y) = 1_L$ si y solo si $X = 1_L$ o $Y = 1_L$ y $M_2(X,Y) = 0_L$ si y solo si $X = Y = 0_L$. Entonces, $F\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por*

$$F(X,Y) = M_1(I(X,Y), I(Y,X)),$$

*con $I$ la implicación IV definida en la Proposición 3 tomando $M = M_2$, es una EFIV.*

*Demostración.* Como

$$F(X,Y) = \begin{cases} 1_L, & \text{si } X = Y, \\ M_1(M_2(N(Y),X),1_L), & \text{si } X <_{TL} Y, \\ M_1(M_2(N(X),Y),1_L), & \text{si } Y <_{TL} X, \end{cases}$$

entonces $F$ satisface las cuatro propiedades de la Definición 5. □

En [14] se modificó la definición de función de equivalencia (en el caso real) para definir las funciones de equivalencia restringida (REF). Ahora hacemos un desarrollo similar para el caso de las EFIV.

**Definición 6** *Sea $N$ una negación IV. $F\colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ es una función de equivalencia restringida intervalo-valorada (REFIV) (en $(L([0,1]), \leq_{TL})$) si $F$ verifica que:*

1. *$F(X,Y) = F(Y,X)$ para todo $X, Y \in L([0,1])$.*
2. *$F(X,Y) = 1_L$ si y solo si $X = Y$.*
3. *$F(X,Y) = 0_L$ si y solo si $X = 0_L$ and $Y = 1_L$, o, $X = 1_L$ y $Y = 0_L$.*

4. *$F(X,Y) = F(N(X), N(Y))$ para todo $X, Y \in L([0,1])$.*
5. *Si $X \leq_{TL} Y \leq_{TL} Z$, entonces $F(X,Z) \leq_{TL} F(X,Y)$ y $F(X,Z) \leq_{TL} F(Y,Z)$.*

**Teorema 2** *Sea $N$una negación IV. Sea $M_1 \colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ una función de agregación IV tal que $M_1(X,Y) = M_1(Y,X)$ para todo $X, Y \in L([0,1])$, $M_1(X,Y) = 1_L$ si y solo si $X = Y = 1_L$ y $M_1(X,Y) = 0_L$ si y solo si $X = 0_L$ o $Y = 0_L$. Sea $M_2 \colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ una función de agregación IV tal que $M_2(X,Y) = 1_L$ si y solo si $X = 1_L$ or $Y = 1_L$ y $M_2(X,Y) = 0_L$ si y solo si $X = Y = 0_L$. Entonces, $F \colon L([0,1])^2 \to L([0,1])$ dada por*

$$F(X,Y) = M_1(I(X,Y), I(Y,X))$$

*con $I$ la implicación IV definida en la Proposición 3 tomando $M = M_2$, satisface las propiedades (1) y (5) de la Definición 6. Además, satisface la propiedad (2) si $N$ es non-filling y la propiedad (3) si $N$ es non-vanishing.*

*Demostración.* Como

$$F(X,Y) = \begin{cases} 1_L, & \text{si } X = Y \\ M_1(M_2(N(Y), X), 1_L), & \text{si } X <_{TL} Y \\ M_1(M_2(N(X), Y), 1_L), & \text{si } Y <_{TL} X \end{cases}$$

se tiene que:

(1) $F(X,Y) = F(Y,X)$ trivialmente.
(5) Si $X \leq_{TL} Y \leq_{TL} Z$, entonces $N(Z) \leq_{TL} N(Y) \leq_{TL} N(X)$. Como $M_1$ es creciente, $F(X,Z) \leq_{TL} F(X,Y)$ y $F(X,Z) \leq_{TL} F(Y,Z)$.

Como $M_1(X,Y) = 1_L$ si y solo si $X = Y = 1_L$, si $N$ es non-filling, $F(X,Y) = 1_L$ si y solo si$X = Y$ ya que

$$\begin{cases} M_2(N(Y), X) \neq 1_L, & \text{si } X <_{TL} Y \\ M_2(N(X), Y) \neq 1_L, & \text{si } X >_{TL} Y. \end{cases}$$

Además, $F(X,Y) = 0_L$ si y solo si $X >_{TL} Y$ y $M_2(N(X), Y) = 0_L$ o $X <_{TL} Y$ y $M_2(N(Y), X) = 0_L$. Por tanto, como $N$ es non-vanishing, $F(X,Y) = 0_L$ si y solo si

$$\begin{cases} X = 0_L \text{ o } Y = 1_L \text{ o} \\ Y = 0_L \text{ o } X = 1_L. \end{cases}$$

con $X \neq Y$.

□

## 5. Medidas de similitud, distancias y medidas de entropía en $L([0,1])$ respecto a un orden lineal

En este sección solo consideramos órdenes lineales.

Para empezar, consideremos un conjunto referencial finito de $n$ elementos, $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Denotamos por $IVFS(U)$ el conjunto de conjuntos intervalo-valorados difusos sobre $U$. Recordemos que un conjunto intervalo-valorado difuso (IVFS) $A$ sobre $U$ es una aplicación $A : U \to L([0,1])$[17]. El orden $\leq_{TL}$ induce un orden parcial $\preceq_{TL}$ en $IVFS(U)$ dado, para $A, B \in IVFS(U)$, por

$$A \preceq_{TL} B \text{ si } A(u_i) \leq_{TL} B(u_i) \text{ para todo } u_i \in U \,.$$

Empecemos mostrando cómo podemos definir medidas de similitud entre IVFSs definidos sobre el mismo referencial $U$. Recordemos la definición.

**Definición 7** *[14] Una medida de similitud intervalo-valorada (SMIV) en $IVFS(U)$ es una función $SM : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ tal que, para todo $A, B, A', B' \in IVFS(U)$,*

*(SM1)* $SM$ *es simétrica.*
*(SM2)* $SM(A,B) = 1_L$ *si y solo si* $A = B$.
*(SM3)* $SM(A,B) = 0_L$ *si y solo si* $\{A(u_i), B(u_i)\} = \{0_L, 1_L\}$ *para todo* $u_i \in U$.
*(SM4) Si* $A \preceq_{TL} A' \preceq_{TL} B' \preceq_{TL} B$, *entonces* $SM(A,B) \preceq_{TL} SM(A',B')$.

**Teorema 3** *Sea $M : L([0,1])^n \to L([0,1])$ una función de agregación IV respecto al orden lineal $\leq_{TL}$ tal que $M(X_1, \ldots, X_n) = 1_L$ si y solo si $X_1 = \cdots = X_n = 1_L$ y $M(X_1, \ldots, X_n) = 0_L$ si y solo si $X_1 = \cdots = X_n = 0_L$. Entonces, la función $SM : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ dada por*

$$SM(A,B) = M(F(A(u_1), B(u_1)), \ldots, F(A(u_n), B(u_n)))$$

*con $F$ deinida como en el Teorema 2 con una negación non-filling y non-vanishing, es una SMIV.*

*Demostración.* Es un cálculo directo. □

Recordemos ahora las definiciones de distancia y entropía.

**Definición 8** *[16] Una función $D : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ es una distancia intervalo-valorada (DIV) en $IVFS(U)$ si, para todo $A, B, A', B' \in IVFS(U)$, $D$ satisface:*

*(D1)* $D(A,B) = D(B,A)$;
*(D2)* $D(A,B) = 0_L$ *si y solo si* $A = B$;
*(D3)* $D(A,B) = 1_L$ *si y solo si* $A$ *y* $B$ *son conjuntos crisp complementarios;*
*(D4) Si* $A \preceq_{TL} A' \preceq_{TL} B' \preceq_{TL} B$, *entonces* $D(A,B) \succeq_{TL} D(A',B')$.

**Definición 9** *[16] Una función $E : IVFS(U) \to L([0,1])$ es una entropía en $IVFS(U)$ respecto a la negación fuerte IV $N$ (respecto a $\leq_{TL}$ con un punto fijo $\varepsilon$ si $E$ satisface:*

*(E1)* $E(A) = 0_L$ *si y solo si* $A$ *es crisp;*
*(E2)* $E(A) = 1_L$ *si y solo si* $A = \{(u_i, A(u_i) = \varepsilon)|u_i \in U\}$*;*
*(E3)* $E(A) \leq_{TL} E(B)$ *si* $A$ *refina* $B$*; es decir,* $A(u_i) \leq_{TL} B(u_i) \leq_{TL} \varepsilon$ *o* $A(u_i) \geq_{TL} B(u_i) \geq_{TL} \varepsilon$*;*
*(E4)* $E(A) = E(N(A))$.

Los siguientes resultados son consecuencia directa del Teorema 3.

**Corolario 1** *Sea* $M : L([0,1])^n \to L([0,1])$ *una función de agregación IV respecto al orden lineal* $\leq_{TL}$ *tal que* $M(X_1, \ldots, X_n) = 1_L$ *si y solo si* $X_1 = \cdots = X_n = 1_L$ *y* $M(X_1, \ldots, X_n) = 0_L$ *si y solo si* $X_1 = \cdots = X_n = 0_L$ *y sea* $N$ *una negación IV respecto al orden* $\leq_{TL}$ *que sea non filling y non-vanishing. Entonces, la función* $D : IVFS(U) \times IVFS(U) \to L([0,1])$ *dada por*

$$D(A, B) = N(M(F(A(u_1), B(u_1)), \ldots, F(A(u_n), B(u_n))))$$

*con* $F$ *como en el Teorema 2, es una DIV.*

**Teorema 4** *Sea* $N$ *una negación IV fuerte (respecto a* $\leq_{TL}$*) y con un punto fijo* $\varepsilon \in L([0,1])$*. Sea* $M : L([0,1])^n \to L([0,1])$ *una función de agregación IV respecto al orden lineal* $\leq_{TL}$ *tal que* $M(X_1, \ldots, X_n) = 1_L$ *si y solo si* $X_1 = \cdots = X_n = 1_L$ *y* $M(X_1, \ldots, X_n) = 0_L$ *si y solo si* $X_1 = \cdots = X_n = 0_L$*. Entonces, la función* $E : IVFS(U) \to L([0,1])$ *dada por*

$$E(A) = M(F(A(u_1), N(A(u_1))), \ldots, F(A(u_n), N(A(u_n))))$$

*donde* $F$ *se define como en el Teorema 2 con una negación non-filling y non-vanishing es una medida de entropía.*

## 6. Conclusiones

En este trabajo hemos considerado el problema de definir implicaciones intervalo-valoradas respecto a órdenes admisibles y, por tanto, totales. Hemos utilizado nuestros desarrollos para construir EFIV, REFIV, SMIV, DIV y medidas de entropía respecto a dichos órdenes admisibles. En el futuro analizaremos las aplicaciones de estas construcciones en problemas concretos de clasificación, procesamiento de imagen o toma de decisión.

## Acknowledgements

H. Bustince was supported by Project TIN2013-40765-P of the Spanish Government. Z. Takáč was supported by Project VEGA 1/0420/15. B. Bedregal and G. Dimuro were supported by Brazilian funding agency CNPQ under Processes 481283/2013-7, 306970/2013-9, 232827/2014-1 and 307681/2012-2.

Sobre el uso de órdenes admisibles para definir operadores de implicación

## Referencias

1. Pradera, A., Beliakov, G., Bustince, H., De Baets, B.: A review of the relationship between implication, negation and aggregation functions from the point of view of material implication, Inform. Sciences. 329, 357–380 (2016).
2. Baczyński, M., Beliakov, G., Bustince, H., Pradera, A.: Advances in Fuzzy Implication Functions, Advances in Fuzzy Implication Functions, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 300, Springer, Berlin (2013).
3. Baczyński, M., Jayaram, B.: Fuzzy implications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 231, Springer, Berlin (2008).
4. Massanet, S., Mayor, G., Mesiar, R., Torrens, J.: On fuzzy implication: An axiomatic approach, Int. J. Approx. Reason. 54, 1471–1482 (2013).
5. Bedregal, B., Dimuro, G., Santiago, R., Reiser, R. :On interval fuzzy S-implications, Inform. Sciences 180(8), 1373–1389 (2010).
6. Burillo, P., Bustince, H.: Construction theorems for intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst. 84, 271–281 (1996).
7. Bustince, H., Barrenechea, E., Mohedano, V.: Intuitionistic fuzzy implication operators. An expression and main properties, Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl.-Based Syst., 12 (3), 387–406 (2004).
8. Cornelis, C., Deschrijver, G., Kerre, E.E.: Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application, Int. J. Approx. Reason. 35 (1), 55–95 (2004).
9. Riera, J.V., Torrens, J.: Residual implications on the set of discrete fuzzy numbers, Inform. Sciences 247, 131–143 (2013).
10. Bustince, H., Galar, M., Bedregal, B., Kolesárová, A., Mesiar, R.: A new approach to interval-valued Choquet integrals and the problem of ordering in interval-valued fuzzy set applications, IEEE T. Fuzzy Syst. 21 (6), 1150–1162 (2013).
11. Bustince, H., Fernández, J., Kolesárová, A., Mesiar, R.: Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions, Fuzzy Sets Syst 220, 69–77 (2013).
12. Xu, Z., Yager, R.R.: Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, International J. Gen. Syst. 35, 417–433 (2006).
13. Bustince, H., Burillo, P., Soria, F.: Automorphisms, negations and implication operators, Fuzzy Sets Syst. 134, 209–229 (2003).
14. Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M.: Restricted equivalence functions, Fuzzy Sets Syst. 157(17), 2333–2346 (2006).
15. Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M.: Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measure of similarity, Fuzzy Sets Syst. 128(5), 496–516 (2007).
16. Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M.: Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal $E_N$-functions: Image thresholding invariant, Pattern Recogn. Lett. 29(4), 525–536 (2008).
17. Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., Fernandez, J., Xu, Z., Bedregal, B., Montero, J., Hagras, H., Herrera, F., De Baets, B.: A historical account of types of fuzzy sets and their relationship, IEEE T. Fuzzy Syst., 24(1), 179–194 (2016).