Funciones de implicación borrosas basadas en potencias

Sebastia Massanet[1], Jordi Recasens[2], y Joan Torrens[1]

[1] Dept. Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
Crta. Valldemossa km 7,5, 07122 Palma, Espanya
{s.massanet,jts224}@uib.es
[2] Secció Matemàtiques i Informàtica
ETS Arquitectura del Vallès
Universitat Politècnica de Catalunya
08190 Sant Cugat del Vallès, Espanya
j.recasens@upc.edu

Resumen La introducción de nuevas familias de funciones de implicación borrosas es una necesidad para poder elegir aquella más adecuada para una aplicación concreta. En esta línea, en este trabajo se introduce un nuevo tipo de funciones de implicación borrosas basadas en las potencias respecto de t-normas, especialmente continuas. Las potencias de t-normas han sido utilizadas en los modificadores o cuantificadores de Zadeh para relajar las proposiciones borrosas. Así, la propiedad más interesante que satisfacen estas implicaciones es la de la invariancia con respecto a potencias asegurando que si tanto el antecedente como el consecuente de la proposición son modificados de igual forma, la implicación devuelve el mismo valor de verdad.

Palabras clave: Función de implicación borrosa, t-norma, potencias de t-normas, negación borrosa.

1. Introducción

El estudio de las funciones de implicación borrosas ha experimentado un gran auge en las últimas decadas debido a que dichas funciones se usan, en el razonamiento aproximado y el control borroso, para modelar los condicionales borrosos y también en el proceso de inferencia borrosa mediante las reglas del Modus Ponens y el Modus Tollens. La importancia de las funciones de implicación borrosas radica principalmente en sus aplicaciones que se extienden a muchos campos y no se limitan únicamente al razonamiento aproximado y al control borroso (ver [3,4]). Ese es también el motivo de que resulte importante disponer de un amplio espectro de posibilidades, así como de tantos modelos distintos de funciones de implicación borrosas como sea posible (ver [17]).

De esta forma, el estudio teórico de las funciones de implicación borrosas se ha extendido considerablemente con la intención de poner de manifiesto la máxima variedad posible de funciones de implicación borrosas junto con sus propiedades. Dos de las líneas de investigación más importantes en este sentido son:

- La introducción de diversas familias de funciones de implicación borrosas, el estudio de sus propiedades y la caracterización axiomática de dichas familias (ver [3,10] y las referencias allí citadas).
- El estudio de numerosos métodos de construcción de funciones de implicación borrosas (ver [2,4] junto con las referencias allí citadas y también más recientemente los artículos [1,11,12,13,16,18]).

En esta comunicación queremos presentar un enfoque completamente nuevo a las funciones de implicación borrosa basada en las potencias respecto a una t-norma cualquiera (principalmente continua). Con ello, no sólo introduciremos una nueva familia de funciones de implicación, sino que lo haremos de forma constructiva a partir de t-normas.

2. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas, negaciones y funciones de implicación borrosas (para detalles sobre t-normas véase [6,19]; sobre implicaciones, véase [2,3,4,5]). A continuación recordaremos sólo algunos conceptos sobre funciones de implicación borrosas y sobre potencias respecto de t-normas continuas con el objetivo de que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

2.1. Funciones de implicación borrosas

Definición 1. ([3,5]) *Una operación binaria* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *es una* función de implicación borrosa*, o una* implicación borrosa*, si satisface:*

(I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ *cuando* $x \leq y$*, para todo* $z \in [0,1]$.
(I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ *cuando* $y \leq z$*, para todo* $x \in [0,1]$.
(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *e* $I(1,0) = 0$.

Nótese que, de la definición, se desprende que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no se derivan de la definición. A continuación recordamos algunas de las propiedades más habituales de las implicaciones borrosas.

Definición 2. ([3,5]) *Sea I una implicación borrosa.*

- *La función* N_I *definida por* $N_I(x) = I(x,0)$ *para todo* $x \in [0,1]$*, se llama la* negación natural *de I y es siempre una negación borrosa.*
- *Se dice que I satisface*
  1. *Principio de Intercambio:*

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)), \quad \text{para todos} \quad x,y,z \in [0,1]. \qquad (EP)$$

2. *Ley de importación respecto a una t-norma T:*

$$I(T(x,y),z) = I(x, I(y,z)), \quad \textit{para todos} \quad x,y,z \in [0,1]. \qquad (LI_T)$$

3. *Principio de neutralidad por la izquierda:*

$$I(1,y) = y \qquad \textit{para todo} \quad y \in [0,1]. \qquad (NP)$$

4. *Propiedad del orden:*

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad I(x,y) = 1 \quad \textit{para todos} \quad x,y \in [0,1]. \qquad (OP)$$

5. *Principio de Identidad:*

$$I(x,x) = 1 \quad \textit{para todo} \quad x \in [0,1]. \qquad (IP)$$

6. *Principio de la negación fuerte:*

$$N_I(x) \quad \textit{es una negación fuerte.} \qquad (SN)$$

2.2. Potencias respecto de t-normas

Por simplicidad supondremos en esta sección y a lo largo de todo el artículo que las t-normas utilizadas son continuas. Para más detalles sobre los resultados incluidos en esta sección ver [19] donde las potencias de t-normas continuas son estudiadas con detalle.

Dado que una t-norma T es siempre asociativa, podemos considerar las potencias enteras respecto de T de la forma habitual. Esto es, para todo $x \in [0,1]$:

$$x_T^{(n)} = T(\overbrace{x, x, ..., x}^{n \ veces}) \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } n \geq 2,$$

con el convenio $x_T^{(1)} = x$ y $x_T^{(0)} = 1$ para todo $x \in [0,1]$.

De forma similar, las raíces n-ésimas y las potencias racionales de un $x \in [0,1]$ respecto de T se definen como

$$x_T^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \sup\{z \in [0,1] \mid z^{(n)} \leq x\}, \qquad x_T^{\left(\frac{m}{n}\right)} = \left(x_T^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{(m)}$$

para todos $m,n \in \mathbb{Z}^+$.

Lema 1. *Sean $k,m,n \in \mathbb{Z}$ y sea T una t-norma continua. Entonces se verifica $x_T^{\left(\frac{km}{kn}\right)} = x_T^{\left(\frac{m}{n}\right)}$ para todo $x \in [0,1]$.*

Las potencias racionales respecto de una t-norma continua se pueden extender a exponentes irracionales de la forma habitual.

Definición 3. *Sea T una t-norma continua y $r \in \mathbb{R}^+$ un número real positivo. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de números racionales con $\lim_{n\to\infty} a_n = r$. Para todo $x \in [0,1]$, la potencia $x_T^{(r)}$ se define como*

$$x_T^{(r)} = \lim_{n\to\infty} x_T^{(a_n)}.$$

La continuidad de T asegura la existencia de este límite y la independencia de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ elegida.

En el caso de que la t-norma T sea arquimediana, la expresión de su potencia asociada depende del generador aditivo de la t-norma.

Proposición 1. *Sea T una t-norma arquimediana continua y sea t un generador aditivo de T. Entonces, para todo $x \in [0,1]$ y $r \geq 0$, se tiene*

$$x_T^{(r)} = t^{-1}(\min\{t(0), rt(x)\}).$$

Ejemplo 1. En el caso de las tres t-normas continuas básicas tenemos:

- Si $T = T_{\mathbf{L}}$ es la t-norma de Łukasiewicz, entonces $x_{T_{\mathbf{L}}}^{(r)} = \max\{0, 1-r+rx\}$.
- Si $T = T_{\mathbf{P}}$ es la t-norma Producto, entonces $x_{T_{\mathbf{P}}}^{(r)} = x^r$.
- Si $T = T_{\mathbf{M}}$ es la t-norma Mínimo, entonces $x_{T_{\mathbf{M}}}^{(r)} = \begin{cases} x \text{ si } r > 0, \\ 1 \text{ si } r = 0. \end{cases}$

3. Implicaciones basadas en potencias

Empezaremos esta sección analizando la idea intuitiva que subyace en la definición formal que daremos más adelante (ver definición 4).

3.1. La idea intuitiva

En lógica borrosa, para manejar condicionales borrosos del tipo "Si P, entonces Q"(denotado por $P \to Q$) con P y Q proposiciones borrosas, se utilizan habitualmente las funciones de implicación borrosas[3]. Concretamente, el valor de verdad del condicional borroso $P \to Q$ se expresa funcionalmente a partir de los valores de verdad de las proposiciones iniciales P y Q; esto es:

$$\mu_{P\to Q}(x,y) = I(\mu_P(x), \mu_Q(y)),$$

donde $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una función de implicación borrosa.

Hay muchas maneras de construir funciones de implicación adecuadas en este contexto (ver [2,3]), pero en esta sección queremos presentar una nueva forma basada en potencias respecto de una t-norma. Para ello hagamos uso del siguiente ejemplo. Consideremos el condicional:

[3] En [7], se propuso otro enfoque basado en el uso de implicaciones borrosas no expresables funcionalmente.

"Si *el precio de un ordenador está entre 300 y 350 euros*, entonces *es muy bueno*."

Seguramente costará que un experto esté de acuerdo con esta afirmación. Posiblemente requerirá una determinada relajación del consecuente, cambiándolo por *bueno* o incluso por *correcto*. Una relajación de este tipo se puede obtener mediante los modificadores o cuantificadores de Zadeh basados en potencias. De esta manera, los modificadores *muy* o *poco* suelen modelarse mediante funciones potenciales de modo que, para un valor $x \in [0,1]$, "*muy* x" se calcula como x^2, o "*poco* x" se calcula como $x^{1/2}$.

De esta forma, basándonos en esta idea, el valor de verdad de $x \to y$ se podría definir como la máxima potencia a la que se puede elevar y de manera que el resultado sea mayor o igual a x. Por ejemplo, $(0{,}8 \to 0{,}64) = \frac{1}{2}$ ya que $0{,}64^{\frac{1}{2}} = 0{,}8$. Notemos que, para definir estos modificadores, Zadeh utiliza la t-norma producto, pero es obvio que se pueden utilizar potencias respecto de cualquier t-norma T. En la siguiente sección pretendemos formalizar esta idea y ver las propiedades de las implicaciones así obtenidas.

3.2. Definición formal y propiedades

A partir de la idea descrita en la sección anterior, empecemos por formalizar la definición que queremos introducir.

Definición 4. *Dada una t-norma continua T, definimos $I^T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ como la función dada por*

$$I^T(x,y) = \sup\{r \in [0,1] \mid y_T^{(r)} \geq x\},$$

para todos $x, y \in [0,1]$.

En primer lugar se demuestra que, para cualquier t-norma continua T, la función I_T es siempre una función de implicación borrosa en el sentido de la definición 1[4].

Proposición 2. *Para toda t-norma continua T, se tiene que I^T es una implicación borrosa.*

De la definición se derivan fácilmente las siguientes propiedades para este tipo de implicaciones.

Proposición 3. *Sea T una t-norma continua. Entonces*

i) I^T verifica (OP) y por lo tanto, también (IP).
ii) $I^T(1,y) = 0$ para todo $y < 1$. Consecuentemente I^T nunca verifica (NP).

La proposición anterior nos asegura en particular que las implicaciones I^T, basadas en potencias, no coinciden nunca con ninguna de las implicaciones más usuales (con la excepción de la implicación de Rescher introducida en [15],

[4] Omitimos las demostraciones de los resultados por falta de espacio.

ver también [3] y la Proposición 4 más adelante). Recordemos que todas las familias habitualmente manejadas (R-implicaciones, (S,N)-implicaciones, QL-implicaciones, D-implicaciones, implicaciones de Yager) verifican (NP) y por lo tanto no pueden coincidir con ninguna I^T.

Veamos a continuación, según el tipo de t-norma continua considerada, cuál es la expresión general de I_T.

Proposición 4. *Sea T una t-norma continua. Entonces,*

- *Si $T = T_{\mathbf{M}}$ es la t-norma Mínimo, la implicación $I^{T_{\mathbf{M}}}$ coincide con la implicación de Rescher, esto es:*

$$I^{T_{\mathbf{M}}}(x,y) = I_{\mathbf{RS}}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \le y, \\ 0 \text{ si } x > y. \end{cases}$$

- *Si T es arquimediana y t es un generador aditivo de T,*

$$I^T(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y, \\ \dfrac{t(x)}{t(y)} & \text{si } x > y. \end{cases}$$

- *Si T es una suma ordinal de la forma $T = (\langle a_i, b_i, T_i\rangle)_{i\in I}$, donde T_i es una t-norma arquimediana con generador aditivo t_i para todo $i \in I$,*

$$I^T(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \le y, \\ \dfrac{t_i\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}\right)}{t_i\left(\frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right)} & \textit{si } x,y \in [a_i,b_i] \quad \textit{y} \quad x > y, \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En la Figura 1 se puede ver la estructura de las implicaciones I^T cuando T es arquimediana y cuando es una suma ordinal en general.

Ejemplo 2. En el caso de las dos t-normas arquimedianas clásicas tenemos:

- Si $T = T_{\mathbf{P}}$ es la t-norma Producto, entonces

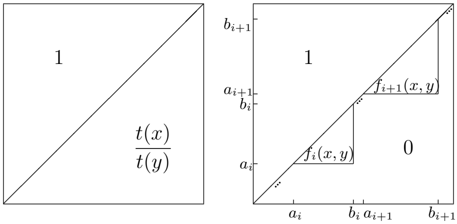
$$I^{T_{\mathbf{P}}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y, \\ \frac{\log x}{\log y} & \text{si } x > y. \end{cases}$$

- Si $T = T_{\mathbf{L}}$ es la t-norma de Łukasiewicz, entonces

$$I^{T_{\mathbf{L}}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y, \\ \frac{1-x}{1-y} & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Pasemos a estudiar ahora la negación natural de I^T que de nuevo depende de la forma de la t-norma continua T elegida.

Proposición 5. *Sea T una t-norma continua. Si denotamos por N_{I^T} la negación natural de I^T, se verifica:*



(a) T arquimediana (b) T suma ordinal

Figura 1: Estructura de las implicaciones I^T cuando T es arquimediana y cuando es la suma ordinal $T = (\langle a_i, b_i, T_i\rangle)_{i\in I}$. Se denota por $f_i(x,y) = \frac{t_i\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}\right)}{t_i\left(\frac{y-a_i}{b_i-a_i}\right)}$ para todo $i \in I$.

i) Si T es la t-norma mínimo o T es arquimediana estricta, entonces $N_{I^T} = N_{\mathbf{GD}}$ es la negación de Gödel, esto es:

$$N_{I^T}(x) = N_{\mathbf{GD}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0, \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

ii) Si T es arquimediana no estricta y t es un generador aditivo de T, entonces

$$N_{I^T}(x) = \frac{t(x)}{t(0)} \qquad \textit{para todo } x \in [0,1].$$

iii) Si T es una suma ordinal de la forma $T = (\langle a_i, b_i, T_i\rangle)_{i\in I}$, donde T_i es una t-norma arquimediana con generador aditivo t_i para todo $i \in I$, entonces

- *Si $a_i \neq 0$ para todo $i \in I$, $N_{I^T} = N_{\mathbf{GD}}$ es de nuevo la negación de Gödel.*
- *Si $a_{i_0} = 0$ para un cierto $i_0 \in I$,*

$$N_{I^T}(x) = \begin{cases} \dfrac{t_{i_0}\left(\frac{x}{b_{i_0}}\right)}{t_{i_0}(0)} & \textit{si } \; x \le b_{i_0}, \\ 0 & \textit{si } \; x > b_{i_0}. \end{cases}$$

De la proposición anterior se deduce inmediatamente el siguiente resultado concerniente a la propiedad (SN).

Corolario 1. *Sea T una t-norma continua. La implicación I^T verifica (SN) si, y solo si, T es arquimediana no estricta con generador aditivo t normalizado (tal que $t(1) = 0$) involutivo (es decir, tal que $t^2 = id$).*

Ejemplo 3. Consideremos la t-norma T dada por la suma ordinal de la forma $T = (\langle 0, 1/2, T_{\mathbf{L}}\rangle, \langle 1/2, 1, T_{\mathbf{P}}\rangle)$. Entonces su implicación I^T viene dada por:

$$I^T(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ \frac{1-2x}{1-2y} & \text{si } x, y \in [0, 1/2] \text{ y } x > y, \\ \frac{\log(2x-1)}{\log(2y-1)} & \text{si } x, y \in [1/2, 1] \text{ y } x > y, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

mientras que su negación natural sería: $N_{I^T}(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$

En la Figura 2 se puede ver la estructura de la implicación I^T y su negación natural N_{I^T} cuando T es la suma ordinal dada en el ejemplo 3.

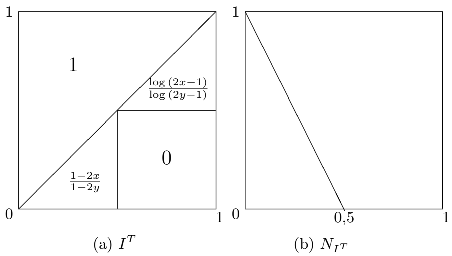


Figura 2: Estructura de la implicación I^T y su negación natural N_{I^T} cuando $T = (\langle 0, 1/2, T_{\mathbf{L}}\rangle, \langle 1/2, 1, T_{\mathbf{P}}\rangle)$.

Respecto del principio de intercambio y la ley de importación respecto de una t-norma T', los resultados son siempre negativos como recogemos en la siguiente proposición.

Proposición 6. *Sea T una t-norma continua.*

i) I^T *no verifica* (EP).
ii) I^T *no verifica* (LI_T) *respecto de ninguna t-norma* T.

En cambio, las implicaciones I^T sí verifican otras propiedades importantes que están relacionadas con el razonamiento aproximado. Concretamente, si recordamos el ejemplo típico del tomate [14], es razonable pensar que las afirmaciones siguientes:

Si el tomate es rojo, entonces está maduro.
Si el tomate es muy rojo, entonces está muy maduro.
Si el tomate es poco rojo, entonces está poco maduro.

deberían tener el mismo valor de verdad. Esta propiedad, que trasladada a nuestro ámbito se corresponde con ser invariante con respecto a potencias, se verifica para las implicaciones I^T introducidas en esta comunicación tal y como se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 7. *Sea T una t-norma continua. Entonces I^T es* invariante por potencias respecto de T*, esto es, para todo $r \geq 0$ y para todos $x, y \in [0,1]$ tales que $x_T^{(r)}, y_T^{(r)} \neq 0, 1$, se verifica:*

$$I^T(x,y) = I^T\left(x_T^{(r)}, y_T^{(r)}\right).$$

4. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo hemos introducido una nueva clase de implicaciones basadas en potencias respecto de una t-norma continua T. Basándonos en la definición hemos visto diversas propiedades de estas implicaciones como por ejemplo las habituales (OP), (IP) y el hecho de que nunca verifican el principio de neutralidad por la izquierda. Esta última propiedad demuestra que las implicaciones basadas en potencia forman una nueva familia de implicaciones que no tienen intersección con ninguna de las familias conocidas más habituales. Esto asegura que las implicaciones aquí introducidas son en general nuevas posibilidades a tener en cuenta. Por otra parte, cabe destacar que todas ellas verifican una propiedad no usual pero muy razonable como es la invariancia por potencias respecto de la propia t-norma T. Por último, hemos visto también que las implicaciones I^T verifican otras propiedades, como (SN), en según que casos.

Este trabajo representa solo el primer paso en el estudio de estas nuevas implicaciones, por lo que son muchas las posibles líneas de investigación con respecto a las mismas. Podemos destacar entre otras:

- Dar una caracterización axiomática de las implicaciones I^T en la que, no cabe duda, tendrá gran importancia la propiedad de invariancia respecto de potencias.
- Estudiar otras propiedades importantes que no se han analizado aquí por falta de espacio, como la contraposición respecto de una negación N o la propiedad del Modus Ponens. Esta última se podría esudiar no solo con respecto a la propia t-norma T, sino que podría generalizarse a cualquier t-norma T_1 (o conjuntor más general como por ejemplo una uninorma conjuntiva, ver [8,9]).
- El estudio se ha dado solo para t-normas continuas. Una línea interesante sería extender dicho estudio a t-normas continuas por la izquierda.
- Hemos visto que I^T es una relación reflexiva (esto es, $I^T(x,x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$). Sería interesante estudiar si es también T-transitiva y, por tanto, un T-preorden en $[0,1]$. Recordemos que la T-transitividad se escribe

$$T(I^T(x,y), I^T(y,z)) \leq I^T(x,z) \qquad \text{para todos} \quad x,y,z \in [0,1].$$

Por ejemplo, resulta inmediato ver que en el caso de las t-normas Mínimo y Producto se verifica la correspondiente T-transitividad, pero ¿en qué otros casos se verifica?

Agradecimientos Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2013-42795-P.

Referencias

1. I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, New types of contrapositivisation of fuzzy implications with respect to fuzzy negations, *Information Science*, 322, 223–226 (2015).
2. M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince Sola, A Pradera (Eds.), Advances in Fuzzy Implication Functions, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 300, Springer, Berlin Heidelberg, 2013.
3. M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 231, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
4. M. Baczyński, B. Jayaram, S. Massanet, J. Torrens, Fuzzy Implications: Past, Present, and Future, in J. Kacprzyk and W. Pedrycz (eds.), *Springer Handbook of Computational Intelligence*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 183–202 (2015).
5. J. C. Fodor and M. Roubens. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
6. E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
7. S. Massanet, R. Mesiar, G. Mayor, J. Torrens, On fuzzy implications: An axiomatic approach, *International Journal Approximate Reasoning*, Vol. 54(9), 1471-1482 (2013).
8. M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, *RU* and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens, *International Journal of Approximate Reasoning*, 73, 123–137 (2016).
9. M. Mas, M. Monserrat, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, On a generalization of the Modus Ponens: U-conditionality, Proceedings of the IPMU-2016, upcoming.
10. M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, A survey on fuzzy implication functions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 15(6), 1107-1121 (2007).
11. S. Massanet, J. Torrens, On a new class of fuzzy implications: h-Implications and generalizations, *Information Science*, 181, 2111–2127 (2011).
12. S. Massanet, J. Torrens, Threshold generation method of construction of a new implication from two given ones, *Fuzzy Sets and Systems*, 205, 50–75 (2012).
13. S. Massanet, J. Torrens, On the vertical threshold generation method of fuzzy implication and its properties, *Fuzzy Sets and Systems*, 226, 232–252 (2013).
14. M. Mizumoto, H.-J. Zimmermann, Comparison of fuzzy reasoning methods, *Fuzzy Sets and Systems*, 8, 253–283 (1982).
15. N. Rescher, Many-valued logic. McGraw-Hill, New York, 1969.
16. Y. Su, A. Xie, H. Liu, On ordinal sum implications, *Information Sciences*, 293, 251–262 (2015).
17. E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, On the representation of fuzzy rules, *International Journal of Approximate Reasoning* 48, pp. 583–597, 2008.
18. N.R. Vemuri, B. Jayaram, The $\circledast$-composition of fuzzy implications: Closures with respect to properties, powers and families, *Fuzzy Sets and Systems*, 275, 58–87 (2015).
19. C. L. Walker, E. A. Walker, Powers of t-norms, *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 1–18 (2002).