

Selección de Carteras Eficientes Mediante Algoritmos Evolutivos de Optimización Multi-objetivo

Enriqueta Vercher¹, Ana B. Ruiz², José D. Bermúdez¹, Rubén Saborido³, and Mariano Luque²

¹ Depto. de Estadística e Investigación Operativa, Universitat de València, España
`enriqueta.vercher@uv.es, bermudez@uv.es`

² Depto. de Economía Aplicada (Matemáticas), Universidad de Málaga, España
`abruiz@uma.es, mluque@uma.es`

³ Polytechnique Montréal Researchers in Software Engineering, École Polytechnique de Montréal, Canada
`ruben.saborido-infantes@polymtl.ca`

Resumen En un problema de selección de carteras, los inversores desean invertir su capital entre N activos financieros que cotizan en bolsa, y se asume que el inversor desea conseguir una cartera en la que se maximice el rendimiento de la inversión con un mínimo riesgo. En este trabajo, suponemos que la incertidumbre sobre los rendimientos de cada cartera se puede aproximar mediante números difusos, y proponemos utilizar un modelo posibilístico de media-riesgo lateral-asimetría de selección de carteras. La opinión del inversor concerniente a las limitaciones de capital invertido en cada uno de los activos se modeliza mediante cotas superiores, y se controla el número de activos que han de componer la cartera mediante restricciones de cardinalidad. Esto conduce a un problema multi-objetivo de selección de carteras con restricción de cardinalidad. Para aproximar el conjunto de soluciones eficientes proponemos utilizar tres algoritmos evolutivos de optimización multi-objetivo: NSGA-II, MOEA/D y GWASF-GA. Asimismo, analizamos el comportamiento de dichos algoritmos cuando se les incorporan nuevos operadores evolutivos (mutación, recombinación y reparación) especialmente diseñados para gestionar la factibilidad de las soluciones generadas. Finalmente, en las pruebas computacionales, se ha utilizado un histórico de datos de los rendimientos de los activos que conforman el IBEX35. En dichas pruebas, se compara el potencial de estos tres algoritmos en la generación de carteras factibles eficientes, cuando emplean los nuevos operadores y cuando utilizan operadores evolutivos clásicos. Se utilizan dos métricas de comparación para establecer si las diferencias de comportamiento son estadísticamente significativas.

1. Introducción

Los problemas clásicos de optimización asociados al problema de selección de carteras de inversión han sido satisfactoriamente resueltos aplicando técnicas

E. Vercher, A.B. Ruiz, R. Saborido, J.D. Bermúdez, M. Luque

clásicas de programación matemática. En estos problemas, se pretende invertir cierto capital entre N activos financieros que cotizan en bolsa, y se asume que el inversor desea conseguir una cartera en la que se maximice el rendimiento de la inversión con un mínimo riesgo. Pero, cuando a petición del inversor, se introducen restricciones adicionales, tales como la diversificación explícita del capital invertido entre los diferentes activos o restricciones que limitan el tamaño de la cartera (número de activos que la componen), dichas técnicas pueden dejar de ser aplicables. La principal dificultad radica en la gestión efectiva de las restricciones para generar carteras factibles en presencia de tres o más objetivos (por ejemplo, modelos de media-varianza-asimetría que incluyan restricciones de cardinalidad).

Para la resolución de problemas multi-objetivo de selección de carteras se han aplicado los *algoritmos evolutivos de optimización multi-objetivo* (*algoritmos EMO* de aquí en adelante), principalmente por su habilidad intrínseca en el manejo del conjunto de objetivos y restricciones [1,2,3,4]. En estos algoritmos, resolver un problema de optimización multi-objetivo significa aproximar el conjunto de todas las soluciones Pareto óptimas (*frontera óptima de Pareto*), mediante la generación de un conjunto de soluciones no-dominadas tan próximas a la frontera (convergencia) y equidistribuidas (diversidad) como sea posible.

Desde la publicación del trabajo de Chang et al. [5], podemos encontrar una amplia literatura de aplicación de algoritmos EMO para aproximar el conjunto de soluciones Pareto óptimas en problemas bi-objetivo de selección de carteras (modelos media-varianza) con restricciones de cardinalidad [6,7,8]. En la mayoría de los trabajos se presentan comparaciones del comportamiento de diferentes algoritmos EMO para resolver este problema restringido, y en muchos de ellos se ha señalado el buen comportamiento del algoritmo NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*) [9]. Por otra parte, algoritmos EMO basados en descomposición, como MOEA/D (*Multi-Objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition*) [10], han recibido gran atención para resolver problemas de optimización multi-objetivo con fronteras óptimas de Pareto complicadas [11]. Recientemente, se ha propuesto un nuevo algoritmo denominado GWASF-GA (*Global Weighting Achievement Scalarizing Function Genetic Algorithm*) [12], que comparte ciertas características con NSGA-II y MOEA/D.

La modelización de la incertidumbre en el problema de selección de carteras es un elemento fundamental para el planteamiento del problema de optimización, pues ha de utilizarse un histórico de datos que permita aproximar la distribución de probabilidad, de posibilidad o de credibilidad de los rendimientos de los activos que son candidatos a formar parte de la cartera de inversión. En la aproximación clásica del problema de selección de carteras, se asume que los valores esperados del rendimiento de los activos y otros momentos de orden superior son parámetros conocidos del problema de optimización. En este trabajo, vamos a considerar el *modelo posibilístico multi-objetivo de media-riesgo lateral-asimetría* (*modelo MDRS*) con restricción de cardinalidad propuesto en [13]. Inicialmente, el modelo MDRS fue resuelto en [13] aplicando un algoritmo genético diseñado para resolver dos problemas bi-objetivos, de modo que se optimizaban dos de

Selección de Carteras Eficientes mediante EMO

los objetivos y se incorporaba el tercero como una restricción. En consecuencia, el potencial del modelo MDRS no se explotó al máximo para obtener carteras eficientes, ya que los tres objetivos considerados no se optimizaron simultáneamente. Para resolver el modelo MDRS como un problema de optimización con tres funciones objetivo, en [14] se proponían unos operadores genéticos de recombinación, mutación y reparación especialmente diseñados para generar soluciones factibles del modelo. En ese estudio preliminar se comprobó que, al resolver una instancia del modelo MDRS considerando los tres objetivos a la vez mediante los algoritmos NSGA-II y MOEA/D y los nuevos operadores, se obtenía una mejor aproximación de la frontera óptima de Pareto que cuando se resolvía el modelo MDRS con el algoritmo genético propuesto en [13] a través de los problemas bi-objetivos. Dichos operadores trataban de solventar la dificultad que supone manejar restricciones de cardinalidad en problemas de selección de carteras, dado que sólo un número limitado de activos han de formar parte de las carteras para que éstas sean factibles.

El presente trabajo pretende extender las conclusiones extraídas en [14] y demostrar el potencial y la utilidad de los operadores genéticos propuestos para generar carteras factibles y eficientes del modelo MDRS. Para ello, además de los algoritmos NSGA-II y MOEA/D, hemos incluido en el estudio un nuevo algoritmo, GWASF-GA. En concreto, comparamos el conjunto de carteras no-dominadas generado por cada uno de estos algoritmos cuando incorporan los nuevos operadores y cuando emplean operadores evolutivos clásicos junto con algún mecanismo de manejo de restricciones que asegure la factibilidad de las carteras generadas. Por tanto, evaluamos seis algoritmos evolutivos de optimización multi-objetivo. La comparación se realiza en términos de dos métricas ampliamente empleadas en EMO, la métrica C (*set coverage*) [10] y la métrica hipervolumen [15], para 50 ejecuciones independientes de cada uno de los algoritmos. Finalmente se aplica un análisis estadístico para comprobar si las diferencias entre ellos son significativas.

A continuación, la Sección 2 describe brevemente el modelo MDRS y los operadores evolutivos empleados. Posteriormente, los resultados numéricos obtenidos se analizan en la Sección 3. Por último, se exponen las conclusiones finales de este trabajo en la Sección 4.

2. Operadores genéticos para el modelo MDRS

En este trabajo, el rendimiento de una cartera X se modeliza como un número fuzzy de tipo LR, $P_X = (p_l, p_u, c, d)_{L, R, \sigma}$, cuyas características de soporte, núcleo y forma se determinan de manera explícita a partir del rendimiento histórico de cada cartera. El *modelo possibilístico multi-objetivo de media-riesgo lateral-asimetría (modelo MDRS)* pretende maximizar el rendimiento medio ($E(P_X)$) y la asimetría del rendimiento ($S(P_X)$), y minimizar la semi-desviación media absoluta ($w(P_X)$). Además, incorpora restricciones de cardinalidad (se impone que cada cartera esté compuesta exactamente por un número dado de activos) y unas cotas inferiores y superiores para la proporción en la que cada activo

E. Vercher, A.B. Ruiz, R. Saborido, J.D. Bermúdez, M. Luque

puede participar en la cartera (requerimientos de diversificación del inversor). En resumen, puede formularse del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{(MDRS)} \quad & \max \bar{E}(P_X) = \frac{p_u + p_l}{2} + \frac{d}{2} \frac{\rho}{\rho+1} - \frac{c}{2} \frac{\pi}{\pi+1} \\
 & \min w(P_X) = p_u - p_l + d \frac{\rho}{\rho+1} + c \frac{\pi}{\pi+1} \\
 & \max S(P_X) = \frac{\mu_3(P_X)}{w(P_X)^3} \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^N x_j = 1, \\
 & 0 \leq l_j \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, \dots, N, \\
 & K_l \leq c(X) \leq K_u,
 \end{aligned} \tag{1}$$

siendo l_j (respectivamente, u_j) la cota mínima (respectivamente, máxima) de participación en la cartera para el activo j , y K_l y K_u las cotas inferior y superior del tamaño de la cartera. En este trabajo, hemos supuesto que $K_l = K_u = k$ en el modelo MDRS, esto es, las carteras factibles están compuestas exactamente por k activos. Asimismo, $\mu_3(P_X)$ es el tercer momento posibilístico alrededor de $\bar{E}(P_X)$ y $c(X) = \text{rank}(\text{diag}(X))$ es la función que modeliza la restricción de cardinalidad, pues indica el número de proporciones que son estrictamente positivas en la cartera X . Para más detalles sobre la formulación del problema, véase [13].

Para la representación de soluciones en los algoritmos EMO, se ha considerado una representación real, esto es, cada cartera de inversión con N posibles activos queda representada por un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, donde cada x_i representa la proporción invertida en el activo i , para cada $i = 1, \dots, N$. Esto significa que si $x_i \neq 0$, la cartera \mathbf{x} invierte en el activo i , siendo el valor de x_i la proporción del capital que se invierte en dicho activo.

Los operadores de mutación, recombinación y reparación diseñados específicamente para generar soluciones factibles del modelo MDRS, esto es, para generar carteras que verifiquen las condiciones presupuestarias, de diversificación y de cardinalidad impuestas por el decisor, se pueden consultar en [14]. En líneas generales, el operador de mutación propuesto es un operador unitario con el que, dada una cartera de inversión, se genera una nueva cartera intercambiando aleatoriamente una proporción no nula con otra nula. De esta forma, la nueva cartera sigue verificando las condiciones presupuestaria y de cardinalidad impuestas en el modelo MDRS. El operador de recombinación genera dos carteras hijas a partir de dos carteras padres y está diseñado para obtener carteras hijas que verifiquen la restricción de cardinalidad, esto es, que estén compuestas exactamente por k activos. Finalmente, el operador de reparación asegura que las nuevas carteras generadas por los operadores anteriores satisfagan el límite presupuestario y la restricción de diversificación impuestos por el decisor.

Los operadores de mutación, recombinación y de manejo de restricciones clásicos empleados en la comparativa se detallan a continuación:

1. En NSGA-II hemos considerado el operador de recombinación SBX y la mutación polinomial [2]. Para manejar las restricciones, el propio NSGA-II incorpora un mecanismo de manejo de las mismas en el torneo binario para la selección de los padres en cada generación.

Selección de Carteras Eficientes mediante EMO

2. En MOEA/D, se considera el operador de recombinación *Differential Evolution* y la mutación polinomial, tal como se sugiere en [11]. MOEA/D incorpora un paso para el manejo de restricciones específico para cada problema. En este caso, si una solución no verifica la condición de cardinalidad, se eliminan de dicha solución los activos con menores inversiones hasta cumplir la cardinalidad exigida. Posteriormente, se aplica el operador de reparación propuesto en [14] para asegurar las restricciones presupuestarias y de diversificación.
3. En GWASF-GA también se han considerado el operador de recombinación SBX y la mutación polinomial [2]. Para generar soluciones factibles, se emplea el mismo mecanismo de manejo de restricciones de NSGA-II.

En la comparativa computacional, denominaremos por NSGA-II, MOEA/D y GWASF-GA a los algoritmos EMO considerados cuando están utilizando los operadores clásicos mencionados anteriormente, y nos referiremos a dichos algoritmos con los operadores de mutación, recombinación y reparación propuestos en [14] por NSGA-II_{Nuevo}, MOEA/D_{Nuevo} y GWASF-GA_{Nuevo}.

3. Resultados numéricos

Para contrastar el comportamiento de los diferentes algoritmos (usando los operadores clásicos y los nuevos operadores), hemos utilizado una base de datos que ya habíamos considerado en [13], y que consta de un conjunto de rendimientos semanales de 27 activos del IBEX35, en el periodo comprendido entre enero de 2007 y diciembre de 2009. Nótese que a cada cartera aleatoriamente generada por los diferentes algoritmos se le asigna un rendimiento fuzzy basado en los rendimientos observados para esa cartera en el periodo 2007-2009. Posteriormente, se determinan de forma explícita los valores alcanzados por las funciones objetivo para esa cartera, mediante el cálculo de los momentos posibilísticos [13]. Asimismo, se ha incluido la restricción de que la cartera ha de estar constituida por nueve activos con participación positiva de capital invertido para ser factible (esto es, $k = 9$), con una proporción máxima del 20% para cada uno de ellos.

En cuanto a los parámetros utilizados en la implementación de los algoritmos evolutivos, se han definido poblaciones de 220 carteras y 500 generaciones. Para NSGA-II y GWASF-GA se ha hecho uso del operador de recombinación con probabilidad 0,9. Para GWASF-GA se ha fijado un número de vectores de pesos igual a $N_\mu = 220$ y se han tomado los vectores de pesos propuestos en [12]. En MOEA/D, se ha usado como función escalarizada la métrica de Tehebychev y los vectores de pesos propuestos en [10]. Para la evolución diferencial se han empleado $CR = 1$ y $F = 1$. Los parámetros internos de MOEA/D se han fijado a los valores siguientes: $\delta = 0,9$, $T = 20$ y $n_r = 2$. En todos los casos se ha hecho uso del operador de mutación con probabilidad $1/k$, siendo k el número de activos. Para realizar los experimentos se ha hecho uso del software jMetal [16], el cual ofrece una implementación de estos algoritmos evolutivos.

Se han llevado a cabo 50 ejecuciones independientes de cada algoritmo y, como se ha mencionado anteriormente, vamos a utilizar dos métricas diferentes

E. Vercher, A.B. Ruiz, R. Saborido, J.D. Bermúdez, M. Luque

para comparar la calidad de los resultados obtenidos. En primer lugar, utilizaremos la métrica C (*set coverage*) [10] para comparar la calidad de las soluciones generadas por los algoritmos cuando emplean los operadores evolutivos clásicos frente al comportamiento de los mismos cuando se les incorporan los nuevos operadores diseñados para el modelo de selección de carteras de cardinalidad restringida MDRS. El valor de la métrica $C(A, B)$, para dos conjuntos de soluciones que aproximan la frontera óptima de Pareto, A y B , indica el porcentaje de soluciones del conjunto B que están dominadas por al menos una solución del conjunto A .

Es interesante señalar que, en nuestro caso, para los algoritmos NSGA-II y GWASF-GA, los resultados obtenidos con respecto a la métrica C son absolutamente concluyentes, puesto que $C(\text{NSGA-II}_{\text{Nuevo}}, \text{NSGA-II})=100$ y $C(\text{GWASF-GA}_{\text{Nuevo}}, \text{GWASF-GA})=100$, en promedio para las 50 ejecuciones. Dicho resultado significa que las soluciones generadas para aproximar la frontera óptima por cada algoritmo empleando los operadores clásicos están dominadas por, al menos, una de las soluciones generadas por los mismos cuando incorporan los nuevos operadores. En cambio, la situación no es la misma en el caso del algoritmo MOEA/D, puesto que $C(\text{MOEA/D}_{\text{Nuevo}}, \text{MOEA/D})=39.125$ y $C(\text{MOEA/D}, \text{MOEA/D}_{\text{Nuevo}})=4.394$, en promedio para las 50 ejecuciones. Además, para este algoritmo, la diferencia entre los valores de la métrica C obtenidos en cada caso es estadísticamente significativa, tanto utilizando el test de Wilcoxon para datos emparejados, como su alternativa paramétrica, el test t-Student, con un p-valor del orden de 10^{-10} . Por lo que podemos concluir que los operadores nuevos incorporados a cada uno de los tres algoritmos EMO mejoran significativamente los resultados obtenidos en comparación con los operadores clásicos.

La gráfica de la izquierda de la Figura 1 presenta un diagrama de cajas de las proporciones de soluciones dominadas en cada una de las 50 ejecuciones independientes, llegando a alcanzar la métrica $C(\text{MOEA/D}_{\text{Nuevo}}, \text{MOEA/D})$ el valor 100 en alguna de las ejecuciones. En ningún caso ocurre esto para la comparación inversa, cuya mediana es cero. Es decir, en el 50% de las ejecuciones, todas las soluciones proporcionadas por MOEA/D estaban dominadas. En la gráfica de la derecha de la Figura 1 se muestran, para cada una de las 50 ejecuciones, el valor de la métrica C por pares con una línea para cada ejecución. El color rojo indica que la versión que emplea los operadores clásicos domina a la versión con los nuevos operadores. El color azul indica que la versión con los nuevos operadores domina a la versión que hace uso de los operadores clásicos.

En segundo lugar, procedemos a analizar el comportamiento de los algoritmos con respecto al hipervolumen (HV) [15]. Para calcular el HV hemos tomado como punto de referencia el que contiene los peores valores alcanzados por las funciones objetivo del modelo MDRS, para todas las carteras generadas por cada uno de los seis algoritmos en las 50 ejecuciones realizadas. La Tabla 1 muestra el HV promedio y la desviación típica de los HV obtenidos en cada caso. En primer lugar, analizando el comportamiento de los algoritmos que actúan con los operadores clásicos, se puede observar que el mayor HV medio lo han alcanzado las aproximaciones generadas por MOEA/D, $\text{HV}(\text{MOEA/D})=0.369$, que

Selección de Carteras Eficientes mediante EMO

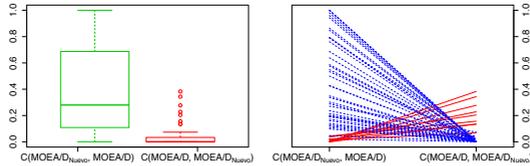


Figura 1. Métrica C para MOEA/D y MOEA/D_{Nuevo}.

también presenta la mayor variabilidad de los HV obtenidos en cada ejecución, ya que presenta una desviación típica de 0.056.

Tabla 1. Hipervolumen alcanzado en las 50 ejecuciones independientes.

Algoritmo	Operadores clásicos		Operadores nuevos		p-valor
	Media	Desv. estándar	Media	Desv. estándar	
NSGAII	0.198	0.016	0.572	0.015	$< 2.2e - 16$
MOEA/D	0.369	0.056	0.529	0.028	$< 2.2e - 16$
GWASF-GA	0.182	0.014	0.588	0.015	$< 2.2e - 16$

La Figura 2 muestra los diagramas de cajas del hipervolumen obtenido en las 50 ejecuciones realizadas por cada algoritmo con los operadores clásicos. De nuevo, es evidente la gran variabilidad de los HV asociados a MOEA/D. Por otra parte, nótese que los valores de dichos HV varían entre 0.233 y 0.500, cuando el máximo HV alcanzado por NSGA-II y GWASF-GA es 0.228 y 0.210, respectivamente.

La situación anterior cambia radicalmente en cuanto al HV obtenido por los tres algoritmos cuando hacen uso de los nuevos operadores. Observando los datos de la Tabla 1, se puede comprobar que con los tres algoritmos se incrementa el HV medio al usar los nuevos operadores, sin que se incremente la desviación típica. Además, al realizar comparaciones dos a dos de los hipervolumenes medios (test t-Student) se comprueba que con los nuevos operadores todos los métodos mejoran significativamente dichos HV medios (p-valor $< 2.2e - 16$). Hemos utilizado un test paramétrico por tratarse de muestras de tamaño 50, que ya permiten la aplicación del Teorema Central del Límite.

Finalmente, la comparación de los HV medios obtenidos por los tres algoritmos cuando utilizan los nuevos operadores mediante un test ANOVA (asumiendo homogeneidad de varianzas, según test de Levene), presentan diferencias estadísticamente significativas (p-valor ajustado $< 2.0e - 16$). En cuanto a

E. Vercher, A.B. Ruiz, R. Saborido, J.D. Bermúdez, M. Luque

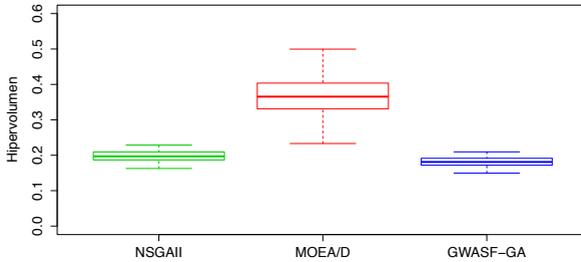


Figura 2. Diagrama de cajas de los hipervolumenes alcanzados por los tres métodos con operadores clásicos en las 50 ejecuciones.

las comparaciones múltiples dos a dos de los HV medios, las diferencias también son significativas como puede comprobarse en la Tabla 2.

Tabla 2. P-valores ajustados de la comparación múltiple dos a dos de los HV medios alcanzados en las 50 ejecuciones.

	NSGAI _{Nuevo}	MOEA/D _{Nuevo}
MOEA/D _{Nuevo}	$<1.0e-5$	
GWASF-GA _{Nuevo}	$2.0e-4$	$<1.0e-5$

Utilizando los nuevos operadores, el método que proporciona un mejor HV en promedio es GWASF-GA. Además, las aproximaciones de la frontera óptima de Pareto generadas por este algoritmo alcanzan hipervolumenes que presentan una menor variabilidad (véase, Figura 3), con un rango intercuartil de [0,584, 0,600]. Por el contrario, NSGA-II_{Nuevo} y MOEA/D_{Nuevo} obtienen un rango intercuartil de [0,568, 0,582] y [0,509, 0,552], respectivamente, ambos inferiores al obtenido por GWASF-GA_{Nuevo}. Por tanto concluimos que, haciendo uso de los nuevos operadores, GWASF-GA genera mejores aproximaciones de la frontera óptima de Pareto con menor variabilidad, en términos de HV. Conviene también señalar que MOEA/D es el que obtiene mejores resultados cuando se usan los operadores clásicos.

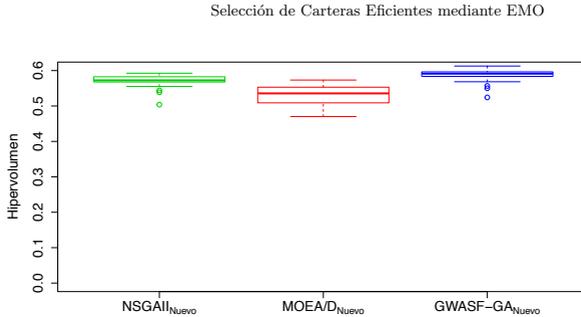


Figura 3. Diagrama de cajas de los hipervolumenes alcanzados por los tres algoritmos con los operadores nuevos, en las 50 ejecuciones.

4. Conclusiones

En este trabajo analizamos el comportamiento de tres algoritmos evolutivos de optimización multiobjetivo para resolver un problema de selección de carteras de cardinalidad restringida. Se demuestra que la gestión de la infactibilidad puede mejorarse introduciendo operadores de mutación, recombinación y reparación específicamente diseñados para conseguir una mejor aproximación de la frontera óptima de Pareto.

Se han utilizado dos métricas para la comparación de los resultados obtenidos y se ha comprobado que el algoritmo evolutivo recientemente propuesto GWASF-GA, incorporado en este estudio, produce los mejores resultados en ambas métricas, siendo las diferencias alcanzadas estadísticamente significativas. Además, la comparativa también se ha realizado comparando los resultados obtenidos por los nuevos operadores frente a los generados por operadores clásicos evolutivos, junto con mecanismos específicos para el manejo de restricciones, en cada uno de los algoritmos.

Es importante remarcar el papel que puede jugar la variabilidad de los resultados obtenidos (a través del análisis de la desviación típica de los valores obtenidos para las dos métricas empleadas) en la comparación de los procedimientos. Puesto que, una menor variabilidad permitiría reducir el mínimo de ejecuciones, reduciendo asimismo el tiempo computacional total.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido parcialmente subvencionada por el Gobierno de España a través de los proyectos de investigación ECO2014-56397-P y MTM2014-56233-P.

E. Vercher, A.B. Ruiz, R. Saborido, J.D. Bermúdez, M. Luque

Referencias

1. C. A. C. Coello, G. B. Lamont, D. A. V. Veldhuizen, *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, 2nd Edition, Springer US, New York, 2007.
2. K. Deb, *Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, Wiley, Chichester, 2001.
3. K. P. Anagnostopoulos, G. Mamanis, A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables, *Computers & Operations Research* 37 (7) (2010) 1285–1297.
4. K. Liagkouras, K. Metaxiotis, Efficient portfolio construction with the use of multiobjective evolutionary algorithms: Best practices and performance metrics, *International Journal of Information Technology & Decision Making* 14 (3) (2015) 535–564.
5. T. J. Chang, N. Meade, J. E. Beasley, Y. M. Sharaiha, Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization, *Computers & Operations Research* 27 (13) (2000) 1271–1302.
6. T. J. Chang, S. C. Yang, K. J. Chang, Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm, *Expert Systems with Applications* 36 (7) (2009) 10529–10537.
7. K. P. Anagnostopoulos, G. Mamanis, The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms, *Expert Systems with Applications* 38 (11) (2011) 14208–14217.
8. K. Liagkouras, K. Metaxiotis, A new probe guided mutation operator and its application for solving the cardinality constrained portfolio optimization problem, *Expert Systems with Applications* 41 (14) (2014) 6274–6290.
9. K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan, A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6 (2) (2002) 182–197.
10. Q. Zhang, H. Li, MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 11 (6) (2007) 712–731.
11. H. Li, Q. Zhang, Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 12 (2) (2009) 284–302.
12. R. Saborido, A. B. Ruiz, M. Luque, Global WASF-GA: An evolutionary algorithm in multiobjective optimization to approximate the whole Pareto optimal front, *Evolutionary Computation* (in press). doi:10.1162/EVCO_a.00175.
13. E. Vercher, J. D. Bermudez, A possibilistic mean-downside risk-skewness model for efficient portfolio selection, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 21 (3) (2013) 585–595.
14. E. Vercher, J. D. Bermudez, R. Saborido, A. B. Ruiz, M. Luque, Algoritmos evolutivos para un modelo multi-objetivo de selección de carteras con restricción de cardinalidad, in: F. Chaves, R. M. Luque, F. Luna, F. Fernández (Eds.), *X Congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados (MAEB 2015)*, 2015, pp. 575–580.
15. E. Zitzler, L. Thiele, Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 3 (4) (1999) 257–271.
16. J. J. Durillo, A. J. Nebro, jMetal: A Java framework for multi-objective optimization, *Advances in Engineering Software* 42 (2011) 760–771.