Francisco de Salinas. Música, teoría y matemática en el Renacimiento

Amaya García Pérez
Paloma Otaola González
(coords.)

Ediciones Universidad Salamanca

1218 2018 OFICINA DEL VIII CENTENARIO

SEPARATA

ALFONSO HERNANDO GONZÁLEZ

Las matemáticas en la obra de Francisco de Salinas

FRANCISCO DE SALINAS

Música, teoría y matemática en el Renacimiento

AMAYA GARCÍA PÉREZ
Y
PALOMA OTAOLA GONZÁLEZ
(COORDS.)

FRANCISCO DE SALINAS
Música, teoría y matemática en el Renacimiento

ALFONSO HERNANDO GONZÁLEZ

LAS MATEMÁTICAS EN LA OBRA DE FRANCISCO DE SALINAS

EDICIONES UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

COLECCIÓN VIII CENTENARIO, 12

© de esta edición:
Ediciones Universidad de Salamanca y los autores

© de las imágenes:
sus autores y propietarios

1.ª edición: 2014

ISBN: 978-84-9012-406-2 (PDF)

Ediciones Universidad de Salamanca
http://www.eusal.es
eusal@usal.es

Oficina del VIII Centenario Salamanca 2018
http://centenario.usal.es
centenario@usal.es

Motivo de cubierta:
El tañedor de laúd, Caravaggio, 1595.

Diseño y realización de la cubierta:
Egido Pablos Comunicación Gráfica

Maquetación y realización de interiores:
Intergraf
intergraf@intergraf.es

Hecho en España-Made in Spain

Todos los derechos reservados.
Ni la totalidad ni parte de este libro
puede reproducirse ni transmitirse
sin permiso escrito de
Ediciones Universidad de Salamanca.

CEP. Servicio de Bibliotecas

Texto (visual) : electrónico

FRANCISCO de Salinas [Recurso electrónico] : música, teoría y matemática en el Renacimiento / Amaya García Pérez y Paloma Otaola González (coords.).—1.ª ed. electrónica.—Salamanca : Ediciones Universidad de Salamanca, 2014
290 p.—(VIII Centenario ; 12)
1. Salinas, Francisco, 1513-1590-Crítica e interpretación. I. García Pérez, Amaya Sara, 1976-, editor de la compilación. II. Otaola, Paloma, editor de la compilación.
78 Salinas, Francisco

Índice General

ÍNDICE

ÍNDICE

La «música extremada» de Francisco de Salinas

Don Rigoberto, ese culto y atildado personaje de *El héroe discreto* (2013) de Mario Vargas Llosa —aparecido ya en su *Elogio de la madrastra* (1988) y continuado en su peripecia literaria en *Los cuadernos de don Rigoberto* (1997)—, se había levantado de madrugada el día de su ansiado viaje familiar a Europa. Las maletas estaban preparadas desde la tarde anterior, esparcidas a lo largo de los pasillos y recibidores de la casa. Lucrecia dormía apaciblemente ajena al ajetreo que estaba por venir. Y el movimiento del mar sonaba repetitivo sobre la costa de Barranco, el barrio de Lima en que por fortuna vivían.

Todavía en pijama y zapatillas, a la espera de que el servicio dispusiese el desayuno esperado, seguramente a base de café, zumos diversos y tostadas con mantequilla, además de bollería fina, don Rigoberto se deslizó con parsimonia hacia su escritorio en busca de la estantería donde guardaba los libros de poesía. Allí encontró el poemario de fray Luis de León que requería y halló también al instante entre sus páginas la oda que este había dedicado al músico ciego Francisco de Salinas —«El ayre se serena / y viste de hermosura y luz no usada, / Salinas, quando suena / la música estremada / por vuestra sabia mano governada…», etc.—. Leyó despacio el poema, recordado la víspera en la duermevela y tantas veces frecuentado por él desde antaño, no pudiendo por menos que confirmar también ahora lo que siempre había sentido:

> Era el más hermoso homenaje dedicado a la música que conocía —Vargas Llosa ponía estas bellas palabras en el pensamiento de nuestro hombre—, un poema que, a la vez que explicaba esa realidad inexplicable que es la música, era él mismo música. Una música con ideas y metáforas, una alegoría inteligente de un hombre de fe, que, impregnando al lector de esa sensación inefable, le revelaba la secreta esencia trascendente, superior, que anida en algún rincón del animal humano y solo asoma a la conciencia con la armonía perfecta de una

> hermosa sinfonía, de un intenso poema, de una gran ópera, de una exposición sobresaliente. Una sensación que para Fray Luis, creyente, se confundía con la gracia y el trance místico.

Se preguntaba a continuación don Rigoberto: «¿Cómo sería la música del organista ciego al que Fray Luis de León hizo ese soberbio elogio?» Realmente, recordaba y se lamentaba al tiempo, «nunca la había oído». Y, ahí está, le vino de repente la luz y un propósito apetecible, «ya tenía una tarea por delante en su estancia madrileña: conseguir algún CD con las composiciones musicales de Francisco de Salinas», porque, seguía tramando, «alguno de los conjuntos dedicados a la música antigua —el de Jordi Savall, por ejemplo— habría consagrado un disco a quien inspiró semejante maravilla».

No sabía don Rigoberto, sin embargo, que no se conserva partitura musical alguna de Francisco de Salinas (¡ay!) y tampoco, por lo mismo, se dispone de grabación discográfica de su música, por lo que, a salvo de un hallazgo venidero y acaso improbable, estamos condenados a no poder disfrutar de su «música extremada» (fray Luis *dixit*), tal como sus contemporáneos sí hicieron y se maravillaron con sus notas engarzadas, de lo que la prodigiosa oda de fray Luis de León, su amigo y compañero de cátedra en el Estudio salmanticense, da cuenta para la eternidad.

Sí disponemos felizmente, en cambio, de las aportaciones teóricas del maestro Salinas, «el abad Salinas, el ciego, el más docto varón de música especulativa que ha conocido la Antigüedad», como Vicente Espinel acertaba a expresar por boca del escudero Marcos de Obregón en sus famosas *Relaciones* de la vida de este (1618). Y, por todas ellas, de su magna *De Musica libri septem* (Siete libros sobre la Música), monumental tratado de armonía y teoría rítmica, escrito en latín y publicado en 1577 en la imprenta de Matías Gast de Salamanca —«Salmanticae, excudebat Mathias Gastius»—, del que la Oficina del VIII Centenario ha llevado a cabo recientemente una primorosa edición facsímile —permítaseme la justificada satisfacción— a partir del ejemplar que nuestra Biblioteca General Histórica conserva.

La Universidad de Salamanca, y la Oficina del VIII Centenario en su nombre, ha querido hacer de este 2013 que nos acaba de dejar el «Año Salinas de la Música», con el gratísimo encargo de conmemorar el quinto centenario del genial burgalés —«Francisci Salinae Burgensis»—, afamado organista y gran teórico que ocupaba en 1567 la cátedra de Música del Estudio, después de haber permanecido veinte años entre Nápoles, Florencia y, sobre todo, Roma, y completado de modo extraordinario su formación primera adquirida en las aulas salmantinas. Y numerosas han sido, por cierto, las actividades con que hemos traducido esta celebración, desde la divulgación de las músicas del tiempo de Salinas en conciertos y recitales —por todos, el excelente ciclo *Suene vuestro son en mis oídos. Músicas del tiempo de Francisco de Salinas, 1513-1590*, que pudo disfrutarse en el Aula Salinas y la Real Capilla de San Jerónimo de las Escuelas Mayores y en la Capilla del Colegio del Arzobispo Fonseca, a lo largo de los meses de junio y julio—, hasta la publicación de estudios sobre las más relevantes páginas de la historia musical de nuestra Academia, como el *Catálogo del Archivo de música de la Capilla de la Universidad* *de Salamanca*, a cargo de Bernardo García-Bernalt Alonso, o, claro es, la edición facsimilar referida de los *Siete libros* del propio Francisco de Salinas.

Ahora, la Colección VIII Centenario de Ediciones Universidad de Salamanca se complace también en albergar en su seno —esta vez con el número 12 de la serie— la publicación electrónica del libro colectivo *Francisco de Salinas. Música, teoría y matemática en el Renacimiento*, que ha sido preparado bajo la coordinación científica de Amaya García Pérez y Paloma Otaola González. Se recogen en él, así pues, las ponencias que fueron defendidas en el simposio internacional que, con el título «Francisco de Salinas (1513-2013). Teoría musical en el Renacimiento», tenía lugar en la Facultad de Geografía e Historia de la Universidad de Salamanca, durante los días 15 y 16 de marzo de 2013 y la dirección de la profesora de Musicología Amaya García Pérez, y en cuya sesión de inauguración tuve precisamente la suerte de hablar.

Tras una «introducción» a cargo de esta, en que se da cuenta del objetivo del libro, de su estructura y contenido, las trece contribuciones incorporadas a sus páginas —entre las que se encuentran, por lo demás, textos de ambas coordinadoras— abordan desde perspectivas diversas un doble asunto de interés común que suscita el título de la obra: uno, la teoría musical y matemática en el Renacimiento, en general; y dos, la propia obra teórica de Francisco de Salinas dentro de este ámbito histórico, en particular.

Han interesado en el primero, en suma, cuestiones relativas a las relaciones entre ciencia y música, la teoría armónica, el uso del temperamento igual en los instrumentos de cuerda con trastes, la educación y práctica docente musical —el currículo de músico profesional y la figura del autodidacta—, el discurso y la retórica en los textos musicales o, en fin, los tratados musicales —de los tratados a las tabladuras y una consideración singular de *El melopeo y maestro* de Pedro Cerone, publicado en 1613—. En tanto que, por lo que atañe a la propia obra teórica de Salinas, se pasa revista de modo sucesivo a la formación matemática del Maestro, a su presencia en el debate sobre la reforma del calendario gregoriano, al tratamiento que llevó a cabo de los ejemplos musicales en su *De Musica libri septem*, y, por último, a la recepción en esta de las melodías populares.

A fin de cuentas, un libro delicioso desde luego para iniciados en estas materias, pero también para quienes, sin serlo, gusten de acercarse a uno de los capítulos más bellos de nuestra cultura. Bienvenido sea por ello a nuestra Colección del VIII Centenario, que desde luego no es mal sitio.

Salamanca, 24 de febrero de 2014

MANUEL CARLOS PALOMEQUE
Director de la Oficina del VIII Centenario Salamanca 2018

Introducción

No ha sido fácil encontrar un título para este conjunto de propuestas. Y, sin embargo, para cualquiera que se acerque a él le resultará evidente el nexo que las une, que intentaremos hacer explícito en estas páginas preliminares.

Es esta una publicación multidisciplinar —como también lo fue Francisco de Salinas, autor al que queremos rendir homenaje en el quinto centenario de su nacimiento—, que viene a completar el trabajo científico llevado a cabo en el Simposio Internacional «Francisco de Salinas (1513-2013). Teoría musical en el Renacimiento», celebrado en la Universidad de Salamanca durante los días 15 y 16 de marzo de 2013.

Francisco de Salinas fue el más importante catedrático de Música del Estudio salmantino. Su famoso tratado *De Musica libri septem*, publicado en Salamanca en 1577, supone un culmen en los estudios sobre teoría armónica y rítmica del Renacimiento. En él se presenta una de las exposiciones más clarividentes del problemático tema de la afinación, por supuesto tratado desde la matemática, como exigía la música *quadrivial* del momento. Pero también presenta una coherente teoría rítmica que expone con numerosos ejemplos musicales dignos de análisis. No obstante, Salinas no fue solo un teórico de la música. Su faceta como docente es evidente en su papel en la institución salmantina. Así mismo, su vertiente matemática (aunque sea de forma colateral) también es muy interesante. En este volumen se abordan, pues, múltiples temas, todos ellos relacionados, de una u otra forma, con los variados papeles que interpretó Francisco de Salinas en su vida: músico, teórico, docente, matemático.

Como ya hemos dicho, Salinas se dedicó al estudio en profundidad de la ciencia armónica matemática, tal y como se entendía en el Renacimiento. Esta teoría armónica, de la que el maestro ciego es un eslabón fundamental, aparece tratada, desde diferentes puntos de vista, en los tres primeros trabajos de esta publicación.

El de Carlos Calderón profundiza en las complejas relaciones entre ciencia y música que se empiezan a producir en el Renacimiento y que darán lugar a la Revolución Científica, centrándose para ello en dos casos: las teorías astronómico-musicales de Kepler y el monocordio como instrumento científico. Por otra parte, Calderón propone una original visión del cambio de paradigma científico que se produce en esta época. Para este autor la ciencia sufre una progresiva *anesthesis*, va perdiendo su cualidad estética en favor de la pura matematización de la realidad.

El que firma Javier Goldáraz plantea un recorrido por la teoría armónico-acústica desde Salinas hasta Helmholtz, padre de la psicoacústica moderna. En su contribución, Goldáraz desgrana cómo se va instalando el nuevo paradigma físico que la Revolución Científica impone en la música. En este sentido, se plantea el efecto que descubrimientos como la serie de armónicos, o los batimientos que se producen entre parciales armónicos próximos, tuvieron sobre la evolución de la ciencia armónica en un momento en el que la acústica va naciendo como disciplina progresivamente diferenciada.

Dentro de la teoría armónica del siglo XVI destaca el tema de la afinación, uno de los grandes problemas teóricos a los que se enfrentaban los músicos de la época. Salinas puso algo de luz sobre este asunto y planteó, además, una de las primeras descripciones pormenorizadas y matemáticamente correctas del temperamento igual. El artículo que yo misma firmo analiza las evidencias del uso del temperamento igual en los instrumentos de cuerda con trastes, antes y después de la exposición de Salinas. Por otra parte, también cuestiona el uso que hoy en día hacen los intérpretes profesionales de estos instrumentos aplicando los temperamentos mesotónicos.

Íntimamente ligadas a la teoría armónica se encuentran las cuestiones matemáticas. Como ya hemos mencionado, Salinas también presenta una importante faceta matemática que se puede rastrear en su *De Musica libri septem*, donde plantea algunas cuestiones que, en ocasiones, nada tienen que ver con el estudio de la música. Sobre el uso de la matemática por parte de nuestro autor nos informa Alfonso Hernando. Para Hernando, la obra de Salinas proporciona buenos ejemplos de ese tránsito que se produce en esta época entre la numerología y la modernidad. Por otra parte, también nos explica cómo el tratado de Salinas es una de las primeras obras publicadas en España en la que aparece el llamado «triángulo de Pascal». En la presentación y el estudio sobre las propiedades matemáticas de este triángulo, Salinas se nos muestra como un intelectual interesado no solo en temas musicales, sino también en otras cuestiones matemáticas que poco o nada tienen que ver con la música.

Ese interés de Salinas por cuestiones matemáticas no estrictamente musicales se puede observar también en un manuscrito suyo, recientemente descubierto, dedicado a la reforma del Calendario Gregoriano, que tuvo lugar en el año 1582. El artículo de Ana Carabias y Bernardo Gómez analiza este escrito, que demuestra un gran conocimiento de astronomía, así como una gran capacidad de abstracción y cálculo mental, por parte de Salinas. A su vez, este manuscrito abre nuevas vías de trabajo sobre nuestro autor, ya que parece apuntar a la posible dedicación de

Salinas al cómputo eclesiástico en la Universidad salmantina, algo que había sido mencionado en algunas biografías antiguas del músico pero que hasta el momento no ha sido estudiado.

Dos capítulos nos informan sobre la práctica docente de la música en el Renacimiento, práctica a la que también se dedicó Francisco de Salinas, en tanto que catedrático del claustro salmantino. El de Giuseppe Fiorentino se centra en la enseñanza en las capillas musicales de las catedrales españolas renacentistas. Los seises de los coros catedralicios recibían formación en «canto de órgano», «canto llano» y «contrapunto», materias que también componían el currículo de la parte práctica de la disciplina Música en la Universidad de Salamanca, y que, por tanto, también fueron impartidas por Francisco de Salinas. Fiorentino nos muestra a qué exactamente hacían referencia estos tres términos que tan frecuentemente aparecen en los documentos de la época.

En su contribución, Ascensión Mazuela se centra en uno de los textos más difundidos en estas capillas catedralicias y en otras instituciones de la época para la enseñanza de la práctica musical. El tratado de Juan Martínez fue el que más veces se publicó en el mundo hispano-luso renacentista, lo que evidencia su uso constante como manual de enseñanza. Asimismo, aparece relacionado con las universidades de Alcalá y Coímbra, donde probablemente fue utilizado como libro de texto en la enseñanza de la música práctica. Al parecer fue editado dos veces en Salamanca, aunque no se conserva ningún ejemplar de dichas ediciones.

La otra vertiente del aprendizaje musical en el Renacimiento es el autodidacta. Paloma Otaola nos presenta una interesante aportación sobre esta cuestión, muy común en el mundo musical del siglo XVI. Así mismo, la figura del autodidacta no se puede comprender sin una reflexión sobre el extraordinario desarrollo de la imprenta —y por tanto de la impresión de libros de música— y el igualmente extraordinario desarrollo de la teoría musical de la época. El mismo Salinas parece haber sido un autodidacta, al menos en cuestiones teóricas.

Por otra parte, el Renacimiento es una época en la que la retórica es fundamental para el discurso intelectual. Dos trabajos en este volumen giran en torno al discurso y la retórica en los textos musicales renacentistas. El de Cristina Diego es una propuesta de aplicación de la lexicología al estudio del léxico musical del Renacimiento, en la que se plantea la reflexión sobre los términos musicales en castellano utilizados en esta época. De esta manera se plantea el porqué del nacimiento de un vocablo, su mantenimiento o su desaparición, entre otras cuestiones, para responder a temas más amplios, como las implicaciones del uso del vocabulario musical en la sociedad renacentista y cómo aquel ilustra también los conceptos de dicha sociedad.

El texto de Nicolas Andlauer versa sobre el uso de la retórica, en este caso a través de los ejemplos musicales de los tres últimos libros del tratado de Salinas, que tienen para Andlauer el doble papel de «ilustrar y comprobar» (*ostendere et demonstrare*) las inducciones y deducciones de la razón lógica aplicada al *ars musica*. Así mismo, Andlauer destaca la modernidad estética de la obra de Salinas, al constituir estos mismos ejemplos un reflejo de la imbricación de las culturas oral y escrita de su tiempo. De esta forma, se trasciende la tradicional consideración de Salinas como un folklorista *per accidens*, para reinterpretar los ejemplos musicales como parte de su discurso retórico.

Sobre los ejemplos de Salinas escribe también Fernando Rubio, quien traza lazos de conexión entre estos ejemplos y obras musicales impresas conservadas de la época. Los múltiples cancioneros y libros de vihuela del momento son relacionados con estos ejemplos, proporcionándonos una visión complementaria a la propuesta de Andlauer. Salinas se nutre del repertorio popular, cosa que era frecuente también entre los compositores cultos de la época. Sin embargo, el tratamiento que hace nuestro autor de ese repertorio es claramente diferente del que llevan a cabo los compositores. Salinas tiene un afán meramente didáctico mientras que los músicos cultos renacentistas encuentran en esas melodías populares una fuente de inspiración. En ninguno de los dos casos hay un interés de recopilación folklórica.

Los tratados musicales renacentistas son estudiados en los dos últimos capítulos de este libro de forma diversa. Xavier Alern propone un estudio de la música *ficta* a partir no solo de los tratados de la época (que es lo que tradicionalemnte se ha hecho) sino utilizando también los libros de vihuela como fuente. De esta forma, uniendo el mundo de la teoría musical presente en los tratados, y el mundo de la práctica musical presente en las tablaturas de vihuela, Alern consigue abrir nuevas vías de estudio en un tema tan controvertido como es el de la música *ficta*.

Cierra el volumen Christophe Dupraz, que se centra en el estudio de otro tratado fundamental para comprender la teoría musical renacentista en España: *El melopeo y el maestro* de Pietro Cerone. Dupraz investiga las fuentes teóricas no musicales que Cerone parece haber trabajado en la elaboración de su tratado, haciendo hincapié en la dificultad de este estudio debido a los múltiples niveles de citación que podemos ir rastreando en el tiempo. Cerone se nos muestra como un autor de impresionante erudición.

Amaya García Pérez

4
Las matemáticas en la obra de Francisco de Salinas

Alfonso Hernando González
alfonso_hernando@hotmail.com
IES Enrique Flórez, Burgos

Introducción

En este artículo vamos a analizar algunas herramientas matemáticas que fueron usadas por Francisco de Salinas (1513-1590), así como por otros teóricos musicales del siglo xvi, una época que vio un gran desarrollo de esta disciplina y, más en concreto, de la teoría de la afinación. El autor burgalés aplica con más asiduidad y criterio que sus contemporáneos la matemática, lo que no impide que también cometa algunos errores. En primer lugar, nos referiremos a su trabajo relacionado con la música, para terminar con una sorprendente investigación, exclusivamente matemática, que se encuentra en su obra *De Musica libri septem*[1].

[1] Salinas, Francisco de. *De Musica libri septem*. Salamanca: Mathias Gastius, 1577. Hay traducción castellana de Ismael Fernández de la Cuesta, Madrid: Alpuerto, 1983. Normalmente daremos las citas de esta obra en su versión original y, en su caso, en la traducción de Fernández de la Cuesta. En lo que se refiere a la historia de la afinación, en castellano se puede consultar el excelente libro: Goldáraz, J. Javier. *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid: Alianza Editorial, 2004. Sobre el siglo xvi y, sobre todo, Salinas, proporciona mucha información: García Pérez, Amaya. *El número sonoro, la matemática en las teorías armónicas de Salinas y Zarlino*. Salamanca: Caja Duero, 2003. Sobre la historia de la teoría desde la Antigüedad hasta el siglo xvi es muy exhaustivo: García Pérez, Amaya. *El concepto de conso-*

La matemática que usan los teóricos musicales desde finales del siglo xv se apoya fundamentalmente en la obra de Boecio[2] (siglo vi), que, a su vez, consiste en una especie de versión latina de tratados previos de Nicómaco[3] (siglo ii). Estos autores establecían lazos muy íntimos entre la teoría musical y la aritmética. Su línea de pensamiento fue haciéndose cada vez más influyente en los últimos siglos de la Antigüedad y era heredera de la escuela pitagórica. El *De institutione musica* de Boecio nos proporciona una fuente documental de gran interés sobre esta tradición, en la que se recuerda, entre otras muchas cosas, la correspondencia entre intervalos musicales y proporciones numéricas bien definidas: a la octava se le asocia $2/1$, a la quinta se le asocia $3/2$, a la cuarta se le asocia $4/3$.

Estas relaciones proceden con toda seguridad de la observación de instrumentos de cuerda. En efecto, si tomamos una cuerda que al ser pulsada da una nota, para obtener una nota una octava por encima basta con dividirla por la mitad. Análogamente se introducen los intervalos de quinta y de cuarta. Desde un punto de vista físico, estas relaciones reflejan la relación entre las frecuencias de los sonidos. Sin embargo, en el siglo xvi siempre se trabajaba con las longitudes de las cuerdas que son inversamente proporcionales a las frecuencias de los sonidos, cuyo concepto, en el sentido actual, no se había desarrollado todavía.

Además de estos intervalos, también es muy importante el de tono, que es la diferencia entre una cuarta y una quinta. O sea, si a una cuarta «sumamos» el tono nos da una quinta. Hemos utilizado las comillas porque, si nos fijamos en las proporciones numéricas (y la frecuencia del sonido), lo que hay es una multiplicación. De hecho, la proporción del tono es $9/8$, con lo que la expresión cuarta + tono = quinta, se transforma en $(4/3)(9/8) = 3/2$.

En toda la teoría de la afinación conviven estas dos acepciones, de modo que hay que tener un poco de atención para saber que, cuando hablamos de proporciones numéricas, lo que se hace es multiplicar o dividir o, como veremos, extraer raíces.

Boecio, en su exposición de la aritmética, da especial importancia a las proporciones que aparecían en la música, de modo que sus libros sobre música y sobre aritmética abordan en muchas ocasiones exactamente los mismos problemas, lo que viene a confirmar esta relación muy estrecha entre ambas. En el último

nancia en la teoría musical de la escuela pitagórica a la Revolución Científica. Salamanca: Universidad Pontificia, 2006. En estas mismas obras se dan abundantes referencias bibliográficas.

[2] Boecio. *Sobre el fundamento de la música*. traducción de Jesús Luque, Francisco Fuentes, Carlos López, Pedro R. Díaz y Mariano Madrid, Madrid: Gredos, 2009. Se puede consultar en castellano en la edición de Sánchez Manzano, María, Universidad de León, 2002. La traducción no es de la edición canónica sino de un incunable de la Colegiata de San Isidoro de León. También se puede consultar la traducción inglesa, *Fundamentals of music*. Ed. C. V. Palisca, New Haven: Yale University Press, 1989. Y existe una traduccion francesa: Boèce. *Traité de la musique*. Introducción, traducción y notas por Christian Meyer, Turnhout: Brepols, 2004.

[3] La versión inglesa de los textos de Nicómaco se pueden consultar, como otros muchos, en Barker, Andrew. *Greek Musical Writings II. Harmonica and Acustic Theory*. Cambridge University Press, 1989.

periodo de la cultura clásica el nivel científico se empobrece, además, de una manera paralela, aumenta enormemente el protagonismo que se da a la numerología. En último término esta corriente limitaba el papel de la contrastación empírica. Por tanto, aun a costa de simplificar mucho, se puede decir que buena parte de la ciencia antigua estaba empantanada debido a la hegemonía de la numerología.

En el Renacimiento tuvo lugar un proceso que iba en la dirección opuesta, y que conduce desde la numerología, que en un primer momento está muy presente, hasta otras formas de estudiar la realidad mucho más modernas. Como veremos, la obra de Salinas nos proporciona buenos ejemplos de ese tránsito entre la numerología y la modernidad.

LA INTRODUCCIÓN DE LA JUSTA ENTONACIÓN

A partir del tratado de Ramos de Pareja (de 1482)[4], se empiezan a utilizar en los libros de teoría musical el intervalo $^{5}/_{4}$, que corresponde a la tercera mayor, y el $^{6}/_{5}$, que corresponde a una tercera menor, y que no aparecen en Boecio. Durante los siguientes años se produce un fenómeno complejo que termina con la aceptación y refinamiento de la escala justa por los principales teóricos del siglo XVI: Fogliano, Zarlino y Salinas[5]. No podemos entrar en los detalles (aunque hay que advertir que son necesarios para un estudio completo del problema), solamente indicaremos que la afinación justa obliga a que haya dos tamaños diferentes de tono, otros dos de semitono y otros intervalos menores. Los dos tonos son el tono mayor ($^{9}/_{8}$) y el tono menor ($^{10}/_{9}$), su suma es la tercera justa ($^{5}/_{4}$) y su diferencia la *comma* sintónica ($^{81}/_{80}$). La conjunción de todos estos intervalos era ciertamente muy complicada ya que había que ensamblar varias cosas que, en el fondo, eran incompatibles entre sí.

Salinas procede a construir el «sistema perfecto» basado en la escala justa, utilizando los trabajos previos de Fogliano y Zarlino, y diseñando un sistema más simétrico y armonioso, que consiste en un sistema con 24 intervalos por octava y una arquitectura muy elaborada, cuya estructura se organiza en tres pasos: el sistema diatónico (las notas sin alteraciones), el cromático (añadiendo las alteraciones comunes en la época) y el enarmónico (añadiendo también las alteraciones no comunes). En principio puede pensarse en seguir añadiendo más notas, ya que, si

[4] Ramos de Pareja, Bartolomé. *Musica practica*. Bolonia, 1482. Desde, por lo menos, la obra de Barbour, J. M. *Tuning and Temperament*. East Lansing: Michigan State Press, 1951, se acepta que Ramos es el primero que introduce estos intervalos en la época moderna.

[5] Ya hemos citado la obra fundamental, y casi la única conservada, de Salinas. El tratado del primer teçorico mencionado es Fogliano, Ludovico. *Musica theorica,* Venecia: G.A. Nicolini da Sabbio,1529. A pesar de su brevedad, es muy importante y sienta las bases por las que, en gran medida, transitarán Zarlino y Salinas. De Zarlino, el teórico más famoso (y farragoso) del Renacimiento, se conservan Zarlino, Gioseffo. *Istitutioni harmoniche*. Venecia, 1558; *Dimostrationi harmoniche*. Venecia, 1571 y *Sopplimenti musicali*. Venecia, 1588. Zarlino publicó diferentes ediciones, con algunas modificaciones, de sus dos primeras obras.

queremos modular a todas las que tenemos en la escala, sería necesario introducir notas adicionales, y así hasta que se quiera. Sin embargo, desde el punto de vista musical, con las notas introducidas era más que suficiente para cualquier pieza musical de la época. Además tampoco tenía sentido introducir intervalos que estuvieran claramente por debajo de lo que podía distinguir el oído humano.

Estos argumentos son razonables, pero Salinas trata de apoyar su construcción en otros con regusto teológico:

> Quae omnia si iustis (vt par est) dimensionibus conficiantur, constructum erit perfectissime instrumentalis harmoniae diagramma, vere omnibus numeris absolutum, quo nihil in re Harmonica perfectius, atque absolutius potest, nec debet excogitari.[6]

Salinas no resiste la tentación de buscar un fundamento más elegante y matemático a todo el esquema. El capítulo XI del libro III del *De Musica* se dedica a estudiar las relaciones entre los tres sistemas. Se empieza por señalar que los números mínimos en los que vienen dados tienen una proporción constante (de veinte). De la misma forma da otras características del mismo tipo, para después tratar de hacer una analogía entre los diferentes elementos de la geometría y los de la música; finalmente observa que las notas de cada uno de los sistemas, que son 9, 16, y 25 (cuenta las notas entre dos octavas incluyendo la primera nota de la siguiente escala), corresponden a tres cuadrados sucesivos, con el añadido de que la suma de los dos primeros es igual al último, cosa que ocurre exactamente en la construcción del triángulo rectángulo, cuando se aplica el teorema de Pitágoras. Salinas no deja pasar la ocasión de referirse al citado teorema y a su importancia. De alguna forma, viene a decir que la perfección de su sistema quedaba bien establecida con tales argumentos[7].

Como tantas veces a lo largo de la historia, resulta que aquello de lo que estaban más orgullosos sus creadores, era lo menos importante. Sin embargo, pese a que todas las consideraciones que hace carecen de valor, hay que reconocer que, dentro del esquema aritmético numerológico en el que se mueve, no puede hacer otra cosa. Por otro lado, para llegar al sistema, que finalmente da por bueno, tuvo que hacer un gran trabajo de depuración. Aunque los datos sobre la génesis de la obra de Salinas son escasos, el hecho de que se haya conservado en parte un texto

6 Salinas. *De Musica*. III, cap. 8, p. 122: «Si todo esto se efectúa como debe ser, según sus justas proporciones se logrará con toda perfección el diagrama universal, absolutamente completo y acabado, el más perfecto que en este tema armónico se pueda idear».

7 Véase Salinas. *De Musica*. III, cap. 11, p. 135. Salinas, para calcular los números mínimos de cada sistema, diseña un sistema muy ingenioso y eficaz. Otro ejemplo de la presencia de la numerología en Salinas está en el libro V, cap. 13. Tras enumerar (correctamente) todos los patrones rítmicos que se pueden hacer con unos determinados elementos, ve con satisfacción que son 64, el primer número que es cuadrado y cubo perfecto a la vez. Hecho que viene a reforzar, según Salinas, la profunda armonía entre las cosas de la música y las de la matemática. No obstante, Zarlino utiliza mucho más la numerología que Salinas, y además lo hace de un modo más retórico. Véase, por ejemplo: Zarlino. *Istitutioni harmoniche*. I, 14, sobre el *numero senario*.

suyo anterior nos da algunas pistas[8]. En este trabajo previo, empieza las escalas en el [do], que era lo más habitual, mientras que en *De Musica* lo hace en el [mi]. La razón es sencilla: así consigue que los números mínimos queden multiplicados por veinte cada vez[9]. Además en esta primera obra considera que el género diatónico tiene ocho notas[10], lo que también parece tener más lógica musical que las nueve que considera en la segunda. Con esto queremos enfatizar que en su tratado definitivo hizo ajustes muy finos —y también muy forzados— para acomodar los detalles de su «sistema perfecto» a una lógica matemática que no siempre coincidía con la lógica musical.

Al igual que todos los autores del siglo XVI, Salinas empieza utilizando patrones numerológicos. En concreto, toma el *numero senario* de Zarlino, según el cual todos los acordes consonantes tenían que incluir números iguales o menores que 6. Finalmente, tras hacer un estudio muy serio y concienzudo, termina otra vez con las consideraciones arcaizantes que hemos visto. De todos modos, pese a seguir tomando como referencia pautas numerológicas, el dinamismo que se imprime a la teoría es muy grande y contrasta con los patrones repetitivos de la Antigüedad tardía.

La música y los números irracionales

Uno de los puntos en los que las diferencias entre los músicos teóricos del Renacimiento y de la Antigüedad son más importantes está en el tratamiento de los números irracionales. Los pitagóricos no consideraron jamás su uso en los intervalos musicales. Para ser exactos ellos nunca hablaron de números irracionales sino de magnitudes inconmensurables (*megethos asimmetros*). Ahora bien, por razones en las que no vamos a entrar[11], los teóricos antiguos negaron siempre la utilización de este tipo de cantidades en la teoría musical, aunque las admitían en la geometría. En otras palabras, se admitía que la música únicamente dependía de la aritmética y no de la geometría.

En la *Sectio canonis*, que es el tratado sobre la afinación pitagórica más antiguo que se conserva, se encuentra el siguiente teorema: el tono ($9/8$) no puede dividirse en dos partes iguales. Esta proposición es correcta ya que se suponía que la

8 Nos referimos a la obra Salinas, Francisco. *Musices liber tertius*. 1566. Se cita por la edición facsímil del manuscrito, con edición crítica en español de A. Moreno y J. J. Goldáraz, Madrid: Biblioteca Nacional y ONCE, 1993. Esta obra se conserva de forma parcial como se indica en la propia edición.

9 En Salinas, *Musices liber tertius,* se dan números distintos: el diatónico va de108 a 216, mientras que el cromático tiene números entre 1080 y 2160 (es decir, la proporción es 10 en lugar de veinte). El diatónico está expuesto en f. 56 b y el cromático está en f. 60b y f. 61 a.

10 Salinas. *Musices liber tertius*. f. 57a.

11 Este tema, pese a su importancia, no ha sido demasiado estudiado. Sin embargo, es suficiente con leer la *Sectio Canonis,* la obra de Aristóxeno, la de Theón o la de Ptolomeo (la versión inglesa de las cuales está disponible en la obra de Barker citada) para darse cuenta de su importancia. Sobre la creencia en la imposibilidad de dividir el tono en dos partes iguales y el uso de números irracionales en la disciplina Música, ver el artículo de Amaya García Pérez en esta misma publicación.

división, de ser posible, tendría que hacerse con números racionales (magnitudes conmensurables en su terminología). Y si dividimos el tono en dos mitades, se obtiene $\sqrt{9/8}$, que es un número irracional. En el tratado citado, se efectúa la demostración con todo el rigor característico de la matemática antigua, apoyándose en un resultado de los *Elementos*. A partir de ese momento, muchos autores más o menos próximos a la teoría pitagórica repiten literalmente esta idea, aunque muy a menudo no la demuestran. En cualquier caso, la no utilización de números irracionales en la música fue una constante de la corriente pitagórica que facilitó la expansión de la numerología en esta disciplina.

Por otra parte, estas dificultades contribuyeron al desarrollo de otra línea de pensamiento: la aristoxénica, que decía que tal división era posible y que la música no tenía ninguna relación con la matemática. De este modo, la teoría antigua quedó estancada.

En el Renacimiento la forma de abordar el problema es completamente distinta. Aunque, en principio, todos los autores empiezan por indicar que la música tiene una especial relación con la aritmética, cuando tienen que calcular intervalos en los que aparecen números irracionales, no dudan en salir del terreno aritmético y usarlos normalmente. La primera obra que los incluye en el ámbito de la música es un libro de Lefèvre d'Etaples de 1496[12]. Este autor es completamente fiel a Boecio en lo que a la teoría musical se refiere. Por eso, al comienzo dice que la música depende de la aritmética, asimismo expone una demostración de que cualquier intervalo de la forma $(n+1)/n$ no se puede dividir mediante números racionales. En resumen, no se aparta del pitagorismo antiguo, si bien el nivel matemático del texto es bastante mayor del que era usual en la época. Ahora bien, al final del tercer libro señala que, aunque efectivamente la división de este tipo de intervalos no se puede hacer por medio de números, no hay ningún problema en hacerlo utilizando la geometría (figura 1). Más en concreto, recurre a un teorema de los *Elementos* de Euclides. Es decir, el sistema estaba ya disponible en la Antigüedad, pero nadie lo aplicaba a la música debido a que, en este ámbito, no se admitía la aparición de números irracionales.

EL TEMPERAMENTO

La aparición de tonos de dos tipos en la escala justa era difícilmente manejable desde un punto de vista práctico, lo que hacía que se buscasen sistemas más sencillos. La simplificación se conseguía con un procedimiento que consistía en quitar algo a unos intervalos y añadirlo a otros a fin de conseguir escalas más uniformes. Esto es lo que se llamó *participatio*, o temperamento.

Fogliano es el primero que propone dividir el intervalo de *comma* ($81/80$) en dos partes iguales; a continuación añade ese intervalo al tono menor y se lo resta al

12 Lefèvre d'Etaples, *Elementa musicalia*, París, 1496.

tono mayor, consiguiendo dos tonos del mismo tamaño[13]. Para eso sigue el procedimiento de Lefèvre d'Etaples, o sea, da una construcción geométrica para calcular un número irracional, concretamente $\sqrt[2]{81/80}$. Un punto que ha pasado inadvertido es que, en el caso de intervalos pequeños, el procedimiento geométrico carece de utilidad. La razón es que, si tenemos un número de la forma $1 + \varepsilon$ siendo ε un número pequeño, su raíz es aproximadamente $1 + \varepsilon/2$ (siendo el error del orden de ε^2). O sea, la media geométrica queda muy próxima a la media aritmética. Así que, si queremos dividir en dos mitades un intervalo cuyos extremos tengan de longitud 80 y 81 (el intervalo de *comma*), la solución es 80,5. Hay que darse cuenta que si el diámetro del radio es la suma de 80 y 81, el radio es justamente 80,5 y el segmento hallado es exactamente igual a ese radio salvo una cantidad imperceptible (véase la figura 2). En otras palabras, la construcción geométrica es innecesaria.

Este uso de intervalos «imperfectos» para llevar a cabo el temperamento será desarrollado por Zarlino y Salinas. El primero (en 1558 y 1571) recoge el sistema de Fogliano y lo expande de manera que, en ocasiones, utiliza raíces de un grado mayor, que aparecen cuando hay que dividir el intervalo de *comma* en más de dos partes. Para eso hace uso de otra técnica que también procede de la Antigüedad: el mesolabio. Este aparato permite, por medios geométricos, calcular dos o más medias proporcionales. Sin embargo, estos procedimientos geométricos no podían dar aproximaciones numéricas.

Los tres autores de una manera u otra señalan que el temperamento era imprescindible en la práctica. No obstante, también los tres en algún momento indican que la música era ciencia que dependía de la aritmética y que no tenía que ocuparse de las cantidades irracionales. En ningún caso esta dicotomía les impide usarlas[14]. Si nos referimos exclusivamente a Salinas, vemos que en el primer libro, al hablar de los números, su exposición sigue muy de cerca a Boecio:

> Constat enim Geometriam considerare latera quadrati commensurabilia, et Diametrum incommensurabilem lateri, quae ad Musicae considerationem non pertinent: quoniam Musica, vt diximus, Arithmeticae subalternatur; et eas solum proportiones assumit, quae in illa considerantur. Et inde forsitan irrationales, surdae a Mathematicis dictae sunt, et ignotae. Ex quibus manifestum est, irrationales in quantitate continua solum reperiri, et ad Geometram earum considerationem pertinere: rationales autem in continua, et discreta demonstrari, et

13 Fogliano. *Musica theorica*. III, f. 36r. En Palisca, Claude. *Music and Ideas in the sixteenth and seventeenth centuries*. University of Illinois Press, 2006, p. 145, se dan detalles sobre otros autores que, antes de Fogliano, pero después de Lefèvre d'Etaples, usan el sistema explicado en Euclides para dividir el tono. Parece que Fogliano es el primero que lo utiliza para temperar las escalas mesotónicas.

14 Tanto Fogliano como Lefèvre d'Etaples vienen a decir que el temperamento es necesario por motivos prácticos. El caso de Zarlino es mucho más complejo, ya que es un autor cuya obra es más extensa, y en la que se aprecian más cambios de opinión y más retórica; por otra parte, usa «libremente» la teoría aristotélica del acto y la potencia para llevar el ascua a su sardina. En el caso del temperamento, si nos limitamos a la primera parte de sus *Istitutioni harmoniche,* en el capítulo 37 indica los lazos entre la aritmética y la música negando la entrada a los números irracionales, mientras que en el 41 viene a decir que sí es posible, pensando seguramente en la necesidad de temperar los intervalos.

> ab omnibus Mathematicis considerari debere, sed praecipue ab Arithmetico, et Musico. Quare relicta Geometris irrationali, de rationali tantum nobis habendus est sermo.[15]

Como acabamos de ver, en el libro I se respeta escrupulosamente la ortodoxia boeciana, pero en la última parte del libro III se hace uso de las cantidades inconmensurables sin tener en cuenta sus claras prohibiciones de antes. Salinas, hablando de las modificaciones que había que hacer a los intervalos «perfectos», viene a decir que es evidente que siempre se han tenido que usar intervalos imperfectos (o sea, con números irracionales), y que si no los explica Ptolomeo ni ninguno de los tratadistas antiguos es porque pensaban que eso era cosa que solo atañía a los prácticos:

> Sed vnum hoc omnes scire volo, instrumenta, quibus antiqui vtebantur, consonantias habuisse imperfectas, vt ea, quibus nunc vtimur: neque enim aliter modulatio conuenienter exerceri poterat. Quod si de hac consonantiarum imperfectione nec Ptolemaeus, neque alius ex antiquis Musicis mentionem fecisse reperitur, causam potissimam esse crediderim, quod ad Practicos eam pertinere arbitrarentur, quoniam sensu duce solum, non arte, aut ratione semper fieri solita sit.[16]

Tan profundas son las diferencias entre la Antigüedad y el Renacimiento, que Salinas no concibe que la rigidez de la teoría antigua fuera tan grande como para evitar a toda costa el uso de los intervalos «imperfectos» que ellos admitían a diario. De todos modos, hay que puntualizar que la escala justa del Renacimiento desemboca casi inevitablemente en la necesidad de temperar algunos intervalos, lo que hace que se refuerce la necesidad de recurrir a números irracionales. Aunque no lo diga explícitamente, queda claro que para Salinas hay una dicotomía entre lo perfecto y aritmético, por un lado; y lo posible y geométrico, por el otro.

La historia de la afinación se mueve entre dos polos. Por un lado, las propiedades de las ondas y de nuestro sistema perceptivo tienden a privilegiar el uso de números naturales pequeños. Por otro, la necesidad de usar escalas sencillas con intervalos iguales obliga a utilizar números irracionales. A lo largo de los siglos esta dicotomía ha dado lugar a muchos conflictos. En la Antigüedad el conflicto no se pudo resolver y la teoría quedó bloqueada, mientras que en el Renacimiento no tuvieron ningún reparo en utilizar los dos sistemas en función de las necesidades. No deja de ser notable que, desde el punto de vista formal, las herramientas fueran prácticamente las mismas, pero la forma de interpretarlas y aplicarlas marcó diferencias profundas. Hay que remarcar estas diferencias porque a menudo se piensa que la historia de las matemáticas consiste solamente en la evolución de los sistemas formales. La historia de la afinación muestra claramente que la *interpretación* de los sistemas es también fundamental.

15 Salinas. *De Musica*. I, 10, p. 12.
16 Salinas. *De Musica*. III, 14, p. 141.

EL CAMINO HACIA EL TEMPERAMENTO IGUAL

El *De Musica* analiza de un modo sistemático la forma de reducir los tonos a un único tamaño, que da lugar a lo que se conoce como temperamentos mesotónicos. Lo que se aumenta al tono menor, debe ser igual a una *comma* menos lo que se disminuya al tono mayor. De este modo quedan siempre igual. Salinas comprende claramente que esto es lo que ocurre, o sea, que queda siempre un único tamaño de tono, cosa que no tuvo tan clara Zarlino, ya que, como indica Barbieri, hizo modificaciones de las ediciones de sus obras anteriores después de leer la del músico español, para eliminar los pasajes en los que decía que podían quedar de dos tipos[17].

Los temperamentos mesotónicos obligan a dividir el intervalo de *comma* en varias partes iguales. Lógicamente esto nos devuelve a los números irracionales ya que forzosamente hay que hacer alguna raíz del cociente $^{81}/_{80}$. Salinas alude brevemente a que este intervalo no se puede dividir por medio de números, así que busca un procedimiento geométrico y no vuelve a referirse al problema[18]. En otras palabras, adopta la misma estrategia de Fogliano y de Zarlino.

Los tres temperamentos mesotónicos que describe Salinas son los siguientes:

> $m = {}^{2}/_{3}$, $m = {}^{4}/_{7}$ y $m = {}^{1}/_{2}$, siendo m la parte de *comma* que disminuye el tono mayor.[19]

Queda claro que se pueden diseñar infinitos sistemas sin más que variar el valor de m. En términos prácticos el que más atención recibió fue el último ($m = {}^{1}/_{2}$), que da terceras mayores justas mientras que las quintas quedan $^{1}/_{4}$ de *comma* menores que las justas. Salinas describe con todo detalle cómo quedan todos los intervalos en cada uno de los sistemas, utilizando la *comma* como unidad (véase figura 3), aunque, por supuesto, no puede calcular el valor numérico de un intervalo como, por ejemplo, $^{1}/_{7}$ de *comma* que corresponde a $\sqrt[7]{^{81}/_{80}}$, por indicar uno de los casos más complicados. Salinas en este caso también sigue los pasos de Zarlino, que había hecho algo parecido. Aunque, como también ocurre en otras ocasiones, hace un estudio más detallado. En concreto, Zarlino indica la modificación de los intervalos únicamente en el diatónico, mientras que Salinas lo hace en el enarmónico, que engloba a los otros dos.

Salinas no solo da este primer paso en la simplificación de la escala, sino que también indica que, en el caso de las vihuelas, o sea, en los instrumentos de trastes, se producía otro tipo de afinación que consistía en igualar también los semitonos. Lógicamente una vez que se igualan los semitonos queda el temperamento

17 Barbieri, Patrizio. *Enharmonic instruments and music 1470-1900*. Latina: Il levante librería edictrice, 2008, pp. 16-17.

18 Salinas. *De Musica*. III, cap. 24, p. 158.

19 Estos tres temperamentos se suelen nombrar con la parte de *comma* en que quedan disminuidas las quintas. Es decir, se conocen habitualmente como: temperamento mesotónico de $^{1}/_{3}$ de *comma*, temperamento mesotónico de $^{2}/_{7}$ de *comma* y temperamento mesotónico de $^{1}/_{4}$ *comma*.

igual, que corresponde a la escala actual. Además, con su característico gusto por los detalles de tipo numérico, señala correctamente que, así como hay infinidad de posibles temperamentos mesotónicos, solo es posible un temperamento igual[20].

A continuación, procede a aproximar los intervalos de la escala con el temperamento igual, tomando como base los calculados para el temperamento mesotónico. La idea era análoga a la utilizada para calcular los intervalos mesotónicos tomando como base los justos, pero ningún autor la había llevado a la práctica, extremo que Salinas se encarga de recordar[21]. En realidad su análisis teórico del temperamento igual no tiene ningún precedente conocido, aunque está claro que lo usaban los músicos prácticos con anterioridad[22]. Siguiendo con esta estrategia y con su meticulosidad habitual explica en qué medida se separa cada uno de los intervalos del temperamento igual de su correspondiente mesotónico. Lógicamente esta labor no la hace en términos numéricos sino en términos de fracción de diesis (cuya proporción es $^{128}/_{125}$), exactamente de la misma forma que antes había usado la fracción de *comma*. El análisis que hace es completamente correcto y es uno de los resultados de mayor nivel de la teoría de la afinación de la época.

Salinas calcula las desviaciones del temperamento igual respecto del mesotónico de $^{1}/_{4}$ de *comma*. En esta afinación la tercera es justa, así que cuando se señala que la desviación de la tercera en el temperamento igual es de $^{1}/_{3}$ de *diesis*, quiere decir que la tercera temperada es más aguda que la justa ($^{5}/_{4}$) en esa cantidad, lo que es exacto (véase figura 4).

En lo que respecta a la quinta, la desviación calculada es de $^{1}/_{12}$ de *diesis*, pero hay que tener en cuenta que la quinta mesotónica, que se toma como referencia, tiene una desviación de $^{1}/_{4}$ de *comma* respecto de la justa. Así pues la quinta en el temperamento igual tiene una desviación que es – $^{1}/_{4}$ *comma* + $^{1}/_{12}$ *diesis*[23], respecto de la justa.

Como la *diesis* es aproximadamente el doble de la *comma*, se puede estimar que la desviación de la quinta era aproximadamente – $^{1}/_{24}$ de *diesis*, que es lo correcto.

Salinas no llega a hacer este último cálculo, pero, incluso así, se aprecia que la desviación de la quinta de $^{1}/_{12}$ de *diesis* respecto a la mesotónica es realmente muy pequeña (de unos 4 cents).

[20] Sobre Salinas y el temperamento igual en los instrumentos de cuerda con trastes, ver el artículo de Amaya García Pérez en esta publicación.

[21] Salinas. *De Musica*. III, 30, p. 171: «Sed quoniam huiusmodi sonorum temperatura, ac interuallorum dispositio in Lyris, ac Violis omnibus reperitur, a nemine tamen adhuc (quantum scire potuerim) considerata est».

[22] Goldáraz, por lo menos desde 1992, ha insistido en que Salinas es el primer autor que describe matemáticamente el temperamento igual, cosa que otros autores reconocen implícitamente. Aquí vuelvo a insistir en este punto sobre el que doy más detalles en Hernando, Alfonso. «Aspectos matemáticos de la teoría musical del siglo XVI», en *Actas del IX Congreso de la SEHCYT,* Vol. 1 pp. 153-168, Cádiz: SEHYT, 2006.

[23] Véase Salinas. *De música*. III, 29, p. 170. Referencias a este análisis de Salinas se pueden encontrar en García Pérez. *El número sonoro…*, p. 101, en Barbieri. *Enharmonic,* pp. 287-288, y, con algo más de detalle, en Goldáraz. *Afinación y temperamentos históricos,* pp. 125-126.

En cualquier caso, es el primer ejemplo en el que se comparan el temperamento igual con la afinación justa (aunque sea a través del temperamento mesotónico) quedando manifiesta su buena aproximación. Salinas, que es perfectamente consciente de la situación, defiende que los teóricos se ocupen del problema para así evaluar exactamente cuál era la diferencia entre lo perfecto (pero imposible) y lo imperfecto (pero practicable).

Una vez terminada la parte teórica, en el *De Musica* se buscan modos de construir efectivamente la escala con temperamento igual. Para ello indica que se puede utilizar algún procedimiento geométrico tal como el mesolabio (que ya había usado Zarlino y que también procede de la Antigüedad) para dividir un intervalo en tantas partes iguales como se quiera. El sistema, aunque no muy exacto, es correcto. A continuación dice que es posible hacerlo con otro procedimiento que se basa en la razón áurea. En este punto es donde está un error de Salinas que, para su desgracia, se ha hecho más famoso que sus muchos aciertos. El procedimiento no podía ser correcto debido a que únicamente se utiliza regla y compás. Ahora bien, con regla y compás solo es posible obtener hasta una raíz cuadrada, no siendo factible la evaluación de raíces de orden mayor. De todos modos, hay que indicar que Salinas dice que es un sistema «inventado recientemente»[24]. Por tanto, lo exacto es decir que Salinas reproduce un error previo (que, por otro lado, tampoco sabemos de dónde procede). Zarlino unos años después, en 1588, describe el temperamento igual, que sin duda toma de Salinas, y evita cuidadosamente sus errores, dando varias construcciones geométricas, todas ellas correctas[25].

Tanto las soluciones de Salinas como las de Zarlino presentan un serio inconveniente: no pueden ofrecer valores numéricos de los intervalos temperados. Además Salinas, al analizar escalas cada vez más complicadas, se ve obligado a usar números progresivamente más grandes y de difícil manejo. Lo cierto es que, si a un músico práctico de la época se le dijese que reprodujera, mediante una serie de cuerdas, la escala enarmónica de Salinas, no sabría ni por dónde empezar[26]. Hoy pensamos que la solución obvia está en el uso de números decimales, que resultan de visualización inmediata, pero que, entonces, simplemente no se utilizaban.

[24] Salinas. *De Musica*. III, cap. 31, p. 173. A lo largo de este capítulo se explica el método correcto del mesolabio, que indica que lo traen muchos y que, por eso, no va a repetirlo, mientras que el nuevo, que sí detalla, es incorrecto. En la obra de Salinas se deslizan también algunos otros errores (o, más bien, erratas) «matemáticos» que no han tenido, que yo sepa, ninguna repercusión. Tampoco Zarlino se libra de cometer diversos errores numéricos. Ejemplos de ambos están recogidos en Hernando, Alfonso. «Aspectos matemáticos de la teoría musical del siglo XVI», en *Actas del IX Congreso de la SEHCYT,* Vol. 1 pp. 153-168, Cádiz: SEHCYT, 2006.

[25] En García Pérez. *El número sonoro…,* pp. 103-108, se describen con detalle las construcciones de Zarlino, que son muy notables. También se puede consultar mi comunicación de 2006, ya citada, para algunos detalles.

[26] En efecto, la escala enarmónica de Salinas (véase Salinas. *De Musica*. III, cap. 8) utiliza números enteros comprendidos entre 28800 y 57600 (justo el doble el uno del otro como corresponde a una octava). Estos sutiles arreglos teóricos no eran, desde luego, muy manejables.

Pocos años después Stevin introduce los números decimales[27] y los utiliza para dar aproximaciones numéricas con varios decimales del temperamento igual de doce semitonos por octava. Su cómputo es correcto salvo algunos errores menores y lo hace mediante cálculo directo de raíces, combinándolas adecuadamente, y usando de modo complementario reglas de tres[28]. Es decir, procedimientos elementales.

De este modo queda claro que las viejas técnicas geométricas eran inservibles en la práctica, mientras que las nuevas aproximaciones numéricas permitían seguir más fácilmente los razonamientos, a la vez que daban resultados más sencillos. Tampoco es casual que Stevin argumente que un número irracional era tan aceptable como cualquier otro, y que, claro, la unidad tampoco tiene nada de particular (véase en el siguiente apartado la teoría de Boecio sobre la unidad), con lo que se opone de una forma clara y explícita a las ideas antiguas sobre los números, y las sustituye por otras mucho más modernas[29].

Mersenne, ya en el siglo XVII, seguirá el mismo procedimiento de cálculo directo de raíces, reproduciendo además resultados de otros autores. Asimismo, también en el siglo XVII, el uso de los logaritmos hará posible el cálculo de intervalos temperados de todos tipos de forma muy sencilla.

El triángulo de Pascal en la obra de Salinas

Para terminar nos ocuparemos de un aspecto que no guarda relación directa con la música. No obstante, la investigación que lleva a cabo Salinas sobre lo que hoy llamamos el triángulo de Pascal (también llamado triángulo aritmético y triángulo de Tartaglia) tiene un nivel matemático muy superior al que cabe esperar en una obra sobre música[30]. Está situada al final del primer libro de su *De Musica libri*

[27] Para ver más detalles sobre la introducción de los números decimales véase Tatón, René (ed.). *Histoire Generale des Sciences*. París: Presses Universitaires de France, 1966. Se cita por su versión española de 1988, Barcelona: Orbis, II, p. 61. Está claro que Stevin no es el primero en utilizar este sistema, ni tampoco le da su forma definitiva, pero la importancia de Stevin es indudable, ya que en su obra, escrita en holandés y cuya edición original es de 1585, se explican las ventajas de los números decimales, ventajas bien visibles en el caso del cálculo de los valores numéricos de la afinación temperada. Stevin, S. «De Thiende», versión inglesa en Smith, D. E. *History of Mathematics*. Nueva York: Dover, 1958, pp. 20-34.

[28] Véase Rasch, Rudolf. «Tuning and Temperament», en Christensen, Thomas. *The Cambridge History of Western Music*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, pp. 193-222 (pp. 205-207). Rasch observa que algunos datos no son exactos, pero eso es porque Stevin no redondea, lo que era la práctica habitual, y, en cualquier caso, su precisión es más que suficiente.

[29] Véase Tatón, René. *Histoire Generale des Sciences*, II, p. 62.

[30] No he encontrado ninguna referencia a esta parte de la obra de Salinas. Solo aparece, que yo sepa, en dos trabajos míos: Hernando. «Francisco Salinas: la teoría musical en la encrucijada entre lo antiguo y lo moderno», en *Actas del VIII Congreso de la SEHCYT,* Vol. 2, pp. 961-976, Logroño: SEHCYT y Universidad de la Rioja, 2004, pp. 961-976, en que lo menciono; y en la ya citada: «Aspectos matemáticos de la teoría musical del siglo XVI», en la que se trata con más detalle.

septem[31]*,* que está dedicado al estudio de aspectos numéricos preliminares, antes de comenzar el estudio de la estructura de la afinación.

Desde el punto de vista de la teoría musical, esta parte, como dice el propio autor, no es necesaria, y si la inserta es para señalar que algunas formas de proceder que, por tradición, se pensaba que eran intocables, en realidad no lo eran. Para aclarar lo anterior, hay que insistir en que la numerología de raigambre neoplatónica está en la base de toda la interpretación matemática de los teóricos musicales del siglo XVI. Sin embargo, en el punto tratado, Salinas abandona alguna de sus ideas. Más en concreto, dice explícitamente que se puede generalizar tanto como se quiera una regla que solo se usaba para tres términos de algunas progresiones. Con ello se «rebaja» la creencia más o menos antigua de la importancia del número tres que está muy extendida entre la matemática griega, pudiéndose encontrar muchos ejemplos, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides. Esta idea se reforzaba en el cristianismo con la idea de la trinidad. De ahí que diga Salinas con cierta ironía: «Nos trinitatis mysterijs nihil derogamus, verum hoc loco non a trina tantum aequalitate, sed a quotlibet terminis aequalibus inaequalitatem produci ostendemus»[32].

A pesar de que Salinas se desprende de esta restricción, sigue utilizando una terminología que, ya en su época, empezaba a resultar arcaica. Así los títulos de los capítulos en los que se refiere a estas ideas repiten literalmente las expresiones de Boecio y dicen: «De cómo toda desigualdad se produce de cualesquiera términos iguales y no tan solo de los tres indicados», y «Demostración de cómo nace la desigualdad de la igualdad»[33]. Esto conviene tenerlo en cuenta al leer obras de esta época ya que, donde ahora sólo vemos una tabla de números con una serie de propiedades formales, ellos veían cómo, partiendo de la unidad, *surgían* series de números con relaciones profundas entre ellos. No es accesorio reparar en que a la *unidad* no se la consideraba como número, sino como *generadora* de números.

Es este contexto, Salinas aborda el estudio de varias sucesiones que le acaban llevando a describir el triángulo citado, dando el descubrimiento como propio, cosa que solo hace en muy contadas ocasiones[34] y que indica que no conocía ninguna de las apariciones previas del triángulo de Pascal[35].

31 Salinas. *De Musica*. I, pp. 26-28. Son los tres últimos capítulos del primer libro.

32 Salinas. *De Musica*. I, 27, p. 36: «Nosotros, sin embargo, sin quitar nada al misterio de la Trinidad, demostraremos que no solamente de tres igualdades se puede sacar la desigualdad, sino también de cualquier número de términos iguales».

33 Además de muchas otras coincidencias y similitudes, el título del último capítulo del primer libro de Salinas es idéntico al título del último capítulo del primer libro de la *De institutio arithmetica* de Boecio: Libro I, XXXII, Demonstratio quemadmodum omnis inequalitas ab equalitate processerit.

34 Salinas. *De Musica*. I, cap. 26, p. 36. Se puede conjeturar que Salinas, orgulloso de su «descubrimiento», lo introdujera de rondón al final de su primer libro sobre música; ya que, en realidad, no tiene relación con ninguno de los temas que se tratan en el resto de la obra, lo que sin duda ha contribuido a que estos capítulos hayan pasado prácticamente desapercibidos.

35 Salinas sólo cita a matemáticos muy anteriores, lo que da una idea de que no estaba muy al día de las tendencias de la matemática de su época. En cambio, estaba bien informado de los estudios contemporáneos sobre teoría musical, además de conocer las fuentes clásicas con mucho detalle, como

El problema a resolver es, en términos actuales, la construcción de diferentes progresiones geométricas a partir de otras.

Iguales	1	1	1	1	1
Dobles	1	2	4	8	16
Triples	1	3	9	27	81
....	......	......	......	......	......
	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
	$(a+1)^0$	$(a+1)^1$	$(a+1)^2$	$(a+1)^3$	$(a+1)^4$

Como se ve, lo que se hace es poner en cada fila las potencias sucesivas de 1, 2, 3, etc. Empezando siempre por 1 (que corresponde al exponente 0).

Para analizar el estudio que hace Salinas conviene recordar primero algunas fórmulas sobre las potencias de un binomio, o sea, sobre expresiones del tipo $(a + b)^n$.

El cuadrado y el cubo se hacen de la manera que sabemos por los libros elementales:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si queremos hallar potencias mayores basta con operar para obtener las correspondientes fórmulas que tienen cada vez más términos y coeficientes numéricos mayores. Ahora bien también se puede poner de una forma mucho más compacta utilizando los números combinatorios, con lo que queda la fórmula general del binomio:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Si se utiliza un sumatorio la fórmula queda del siguiente modo:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Donde para calcular cada uno de los coeficientes hay que utilizar la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Si disponemos los números combinatorios en forma de triángulo se obtiene el famoso triángulo de Pascal (véase figuras 5 y 6). Todo lo anterior era desconocido a finales del siglo XVI salvo para, a lo sumo, un reducido número de matemáticos.

reconoce Palisca en varias ocasiones, véase Palisca, Claude V. *Studies in the History of Italian Music and Music Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1994.

De ahí el interés del esfuerzo de Salinas por tratar de estudiar las propiedades de los números combinatorios.

Volviendo al cuadro que aparece en su obra, se comprende que, si tomamos una fila, nos quedan las potencias de a, mientras que en la siguiente quedan las potencias de $(a+1)$. Ahora bien, si hacemos $b = 1$ en la fórmula del binomio se tiene

$$(a + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}$$

Esta fórmula es la que trata de demostrar Salinas (naturalmente sin usar la terminología actual). Como ya hemos visto, empieza por observar que la fórmula vale para cualquier lugar de la tabla. Así va dando las siguientes reglas que permiten obtener cualquier número de una fila a partir de los de la fila anterior:

- Para obtener el primero de cada fila se toma el primero de la fila anterior.
- Para obtener el segundo de cada fila se suma el primero una vez más el segundo otra vez de la fila anterior.
- Para obtener el tercero de cada fila se suma el primero una vez, el segundo dos veces y el tercero una vez de la fila anterior.

Salinas constata que no es preciso detenerse en este punto, como hacía Boecio, sino que siempre se puede continuar. Esta *ruptura*, a la que ya hemos aludido, tiene su interés, dado que, como Edwards señala, la extensión de procesos similares no tuvo lugar en Occidente hasta el siglo XVI[36], algunos años antes de que se publicara la obra de Salinas, y solamente se usaba en algunos libros de matemáticas.

En concreto, añade otras tres reglas que son las siguientes:

- Para obtener el cuarto se suma el primero una vez, el segundo tres veces, el tercero tres veces, y una vez el cuarto de la fila anterior.
- Para obtener el quinto se suma el primero una vez, el segundo cuatro veces, el tercero diez veces, el cuarto cuatro veces y una vez el quinto de la fila anterior.

[36] Edwards, A. W. F. *Pascal's Arithmetical Triangle*. Londres y Baltimore: John Hopkins University Press, 2002, p. 5. Edwards se refiere a la generalización del esquema que reproducimos en la figura 8. El diagrama da en la primera fila números iguales; en la segunda, la serie de números (dimensión 1); en la tercera, los números triangulares (dimensión 2); y en la cuarta, los piramidales (dimensión 3). Y ya no se continúa. Lo anterior pone de manifiesto la rígida idea de dimensión de la antigüedad que exigía una analogía estrecha entre los números y algún referente geométrico. Como es evidente que sólo hay tres dimensiones en la realidad, no se seguía más allá. Este tipo de limitaciones son muy frecuentes, por ejemplo, en Euclides. Asimismo en la obra de Boecio sobre aritmética citada se dan series de potencias, pero no se extienden más allá del tercer término (que son los cuadrados), razón por la que no puede construir la sucesión de reglas que encontramos en Salinas.

- Para obtener el sexto se suma el primero una vez, el segundo cinco veces, el tercero veinte veces, el cuarto veinte veces, el quinto cinco veces, y una vez el sexto de la fila anterior.

Salinas deja bien claro que conoce cómo seguir (de hecho, luego indica varias formas de hacerlo) y se detiene simplemente para no resultar farragoso. Por si hubiera dudas, da correctamente los números de las reglas novena y décima, sin entrar en más detalles.

Como podemos observar, con cada una de estas reglas que da Salinas, se va obteniendo cada una de las líneas del triángulo de Pascal (ver figuras 6 y 7). El propósito de Salinas es conseguir una ayuda para calcular las potencias sucesivas, cosa que le conduce a estudiar el triángulo citado. Todos los músicos teóricos tenían que utilizar diferentes recursos aritméticos, así como determinadas sucesiones de varios tipos, ya que así lo hacían las fuentes antiguas que utilizaban. Lo curioso, en el caso de Salinas, es que utiliza ese material previo para expandirlo en una dirección que era contraria a las ideas que habían dominado durante muchos siglos.

En el *De Musica* nuestro autor propone dos formas diferentes para construir el triángulo de Pascal[37]. La primera (véase figura 7) es la que utiliza para visualizar las reglas que ya hemos indicado, y la segunda (véase figura 8) la emplea para estudiar las propiedades del triángulo de Pascal.

A continuación, Salinas observa que se pueden obtener los números de cada línea del triángulo de varios modos[38]. En particular señala tres modos, que, puestos en términos modernos, equivalen a las siguientes propiedades:

La primera es

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{k+a}{k} = \binom{r+a+1}{r}$$

Esta propiedad se ve muy bien con el esquema usado en *De música* (figura 8). En efecto, equivale a decir que la suma de los números de una fila nos da el número de la siguiente fila que está debajo del último sumando.

La segunda propiedad que reseña es mucho más conocida (véase una explicación en la figura 6):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

El tercer modo de obtener los números es más directo y se basa sencillamente en que, para pasar de un número combinatorio al siguiente, hay que multiplicar por los números adecuados, lo que en términos modernos se escribe como

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

37 Salinas. *De Musica*. I, cap. 27, p. 37 y p. 38. Corresponden a las figuras 7 y 8 de este artículo.

38 En Salinas. *De Musica*. I, cap. 27, pp. 38-39 están descritas las propiedades a las que aludimos.

Por último, hace mención a la evidente simetría de los números que resultan en cada línea. De todo ello se deduce que Salinas estudia con bastante cuidado y atención las propiedades de los números combinatorios, y que, si no se detiene más en ello, es porque considera que tal cosa le alejaría demasiado del propósito de su obra.

Siguiendo con su exposición, observamos que aplica las reglas que ha descrito previamente no sólo a las progresiones geométricas de razón 1, 2, 3,...; sino que también lo aplica a progresiones con razones fraccionarias, que son de uso frecuente en música. Para hacerlo se ayuda de progresiones decrecientes, cosa en la que no hace sino seguir a otros autores, empezando por Boecio[39].

Por ejemplo, para construir la progresión geométrica de proporción sesquiáltera (de razón $^3/_2$), utiliza lo que, en términos modernos, sería:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n$$

Y vuelve a aplicar las mismas reglas. Construye primero la progresión geométrica de razón $^1/_2$, para lo cual utiliza primero lo progresión de razón 2 y luego le da la vuelta.

En su esquema queda:

Iguales	1	1	1	1	1	1
Dobles	1	2	4	8	16	32
Inverso	32	16	8	4	2	1
Sesquialt.	32	48	72	108	162	243

Resulta que, tal y como quiere Salinas, se utiliza la misma regla para pasar de la primera a la segunda fila, que de la tercera a la cuarta.

De este modo, y siempre a través de progresiones decrecientes, va obteniendo progresiones de razones distintas. No obstante, sólo indica que eso se cumple en el segundo de los términos, y no trata de demostrar que es así siempre, aunque lo da por comprobado y lo toma como regla general.

El primer libro termina con un argumento para justificar las reglas a las que nos hemos referido, buscando algo similar a lo que hoy llamaríamos demostración por inducción. Empieza por comprobar que la primera regla es cierta. En términos modernos sería como decir que si sumamos a cualquier número la unidad, obtenemos el siguiente número natural.

Posteriormente va dando las siguientes reglas, observando que, para obtener el número de la columna siguiente, basta con aplicar la regla inmediatamente anterior al primer y al segundo número de la fila anterior. En términos modernos lo que hace es aplicar:

$$(a + 1)^{n+1} = (a + 1)^n + a(a + 1)^n$$

[39] Como ilustración se pueden ver ejemplos de generación de progresiones iguales a las que usa Salinas en: Boecio. *De institutione arithmetica*. I, 32.

Recordaremos, para evitar malentendidos, que el *De Musica,* lógicamente, no utiliza nada similar a la terminología moderna, que aquí hemos usado para poder seguir más fácilmente lo que va explicando Salinas.

A la hora de hacer la «demostración» (en la que siempre se limita a considerar números dobles), indica que cada nuevo número de una fila es igual a la suma de su «origen» y de otro número que llamaremos complemento (Salinas no usa un único término). De modo que el complemento es exactamente $a(a + 1)^n$. Con lo anterior, consigue reproducir exactamente la fórmula anterior, que con su esquema es algo así como

$$(a + 1)^{n+1} = (a + 1)^n + a(a + 1)^n = \textit{origen} + \textit{complemento}$$

Por tanto, para ir a la columna siguiente, se puede proceder aplicando dos veces la regla anterior, primero al «origen» y luego al «complemento». Ahora bien, el «complemento» no deja de ser el «origen» multiplicado por *a*. Lo que equivale a decir que hay que hacer lo mismo para calcular el «complemento» que para el «origen», pero corriendo una posición hacia la derecha (para sumar siempre una unidad a la potencia correspondiente). Por tanto, una vez que se conoce una regla, la siguiente se obtiene sumando dos veces esa regla, pero la segunda vez desplazando todos los números una posición hacia la derecha. Salinas lo hace paso por paso. Por ejemplo, para dar la regla de los cuadrados, a partir de la anterior, construye el siguiente cuadro:

Serie de números	*Primero*	*Segundo*	*Tercero*
Posiciones primeras	Una vez	Una vez	
Posiciones segundas		Una vez	Una vez
Suma	Una vez	Dos veces	Una vez

Análogamente procede para la siguiente regla:

Serie de números	*Primero*	*Segundo*	*Tercero*	*Cuarto*
Posiciones primeras	Una vez	Dos veces	Una vez	
Posiciones segundas		Una vez	Dos veces	Una vez
Suma	Una vez	Tres veces	Tres veces	Una vez

Así continúa para formar las siguientes, repitiendo siempre dos veces la regla anterior, pero siempre desplazando hacia la derecha una casilla las posiciones segundas.

La estructura del razonamiento es bastante clara, aunque más que una demostración, lo que hace es explicar de dónde sale cada uno de los pasos que va dando (y como hemos dicho, limitándose a dar algunos ejemplos que son siempre los mismos). Salinas, que evidentemente no dispone de un marco teórico adecuado, da todas las reglas hasta el orden 6, y en este punto se detiene diciendo que es fácil comprender que se puede seguir cuanto se quiera.

Aunque su argumentación utiliza una terminología que ya empezaba a estar anticuada, tiene un nivel muy respetable, sobre todo si se repara en que no es una obra matemática, destacándose sobre todo esa voluntad de dar una *demostración* general, y no una mera ejemplificación de cómo obtener las reglas. Salinas remata el libro primero precisamente con esta «demostración» que, por muy defectuosa que sea, no deja de tener un notable valor heurístico. De este modo se libera por un momento de la estricta observancia de la numerología neoplatónica que impregna su obra y la de toda la teoría musical de la época.

En lo que se refiere al famoso triángulo, dejando a un lado algunas apariciones fuera de Europa Occidental (en India, China, Persia, y en la España árabe por lo menos, y en diferentes contextos) que son anteriores, se sabe que a lo largo del siglo XVI se utiliza en varias obras occidentales, la primera de la que se tiene noticia es la geometría de Apianus (1527). Posteriormente Stifel en 1544 publica una obra en la que se aplica a un proceso de cálculo[40]. Por otro lado Tartaglia, en 1556, también lo describe[41]. El enfoque de estos autores es bien distinto del de Salinas. Los dos son matemáticos que utilizan el citado triángulo para resolver el mismo problema de cálculo: el de extracción de una raíz de orden tan alto como se quiera. Además su forma de trabajar nos resulta más familiar que la de Salinas, ya que la terminología arcaizante ha desaparecido casi del todo. Sin embargo, precisamente por ser libros que tienen un carácter más práctico, no se preocupan de justificar teóricamente las reglas, por lo que, en cierto modo, la obra de Salinas tiene más relación con la de Pascal, que estudió el problema con mucho más rigor y profundidad, demostrando diferentes propiedades, que con las de sus contemporáneos. El propio Tartaglia, en el mismo tratado, obtiene otra vez el triángulo (pero de otra forma) en conexión con un problema de combinatoria[42]. No obstante, aparecen en dos contextos separados. Posteriormente se iría comprobando que el triángulo tiene una enorme cantidad de aplicaciones en diferentes campos.

Por último cabe indicar que, hasta donde hemos podido saber y con todas las reservas del caso, no hay ninguna aparición del triángulo de Pascal en ninguna obra publicada en España con anterioridad.

[40] Stifel, M., *Arithmetica integra*. Núremberg, 1544, f. 44v y 45r.

[41] Estos datos han sido tomados de Smith, D. E. *History of Mathematics*. Nueva York: Dover, 1958, II, pp. 508-512 y Struik, D. J. *A Source Book in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1986, pp. 21-26. Más detalles sobre la historia del triángulo se pueden ver en el ya citado Edwards, A. W. F. *Pascal's Arithmetical Triangle*, que está exclusivamente dedicado a su historia. En esta obra se señala que en algunos manuscritos de la *Aritmética* de Jordano Nemorarius aparece el triángulo de Pascal, lo que puede tener importancia, toda vez que Salinas menciona a Jordano en varias ocasiones. De todos modos Edwards puntualiza que la edición impresa de la obra citada no contiene el triángulo. Por otro lado, Salinas, como ya hemos dicho, da el descubrimiento como propio, mientras que, en otras ocasiones, señala el origen de lo que escribe.

[42] En Tartaglia, N. *General trattato di numeri et misure*. Venecia, 1556. II, f.17r aparece el triángulo en un contexto relacionado con el cálculo de raíces. En esta misma obra, al final de la primera parte, se incluye su estructura en la forma «oblicua» que utiliza Salinas, en el contexto de un problema de combinatoria.

CONCLUSIONES

Cada uno de los ejemplos analizados sirve para ilustrar algún aspecto de la ciencia del momento. En la construcción de su sistema perfecto, aunque Salinas sigue fiel a la numerología, consigue hacer un análisis muy detallado que indica la pujanza de la teoría musical del momento.

Con el uso de los números irracionales hemos visto cómo los teóricos del Renacimiento, casi sin pensárselo, rompen con la prohibición antigua de evitar su aparición en la música. Fenómeno que tiene una gran trascendencia, aunque ha quedado oscurecido por otros avances contemporáneos, pero al que Stevin dio, con razón, un lugar preeminente.

En el caso del triángulo de Pascal hemos comprobado que la investigación de Salinas es muy interesante por su amalgama de elementos nuevos y antiguos.

Finalmente, hay que reconocer que Salinas, de forma consciente, evita entrar en consideraciones físicas acerca del sonido, indicando que ese no era su terreno. De esta forma queda claro, por si hiciera falta, el camino que quedaba para llegar a la obra de Benedetti, Galileo y Mersenne entre otros.

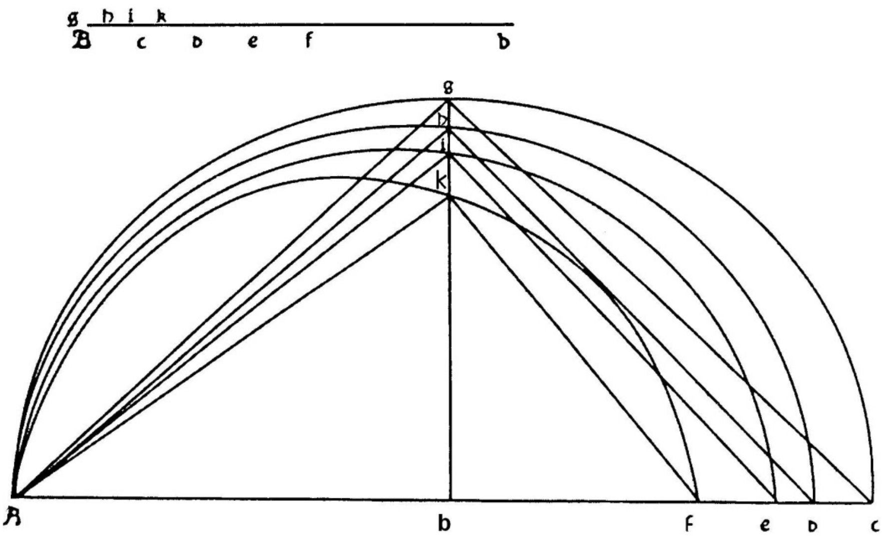

Figura 1. Lefèvre d'Etaples. Elementa musicalia.*1496, III, f. 6v, 2.*
Esta construcción permite hallar la media geométrica de un segmento Ab *y otro* bf *(en la figura lo hace para varios más). Basta trazar una circunferencia de diámetro* Af *y la altura bk es la solución, como se comprueba al observar que los triángulos* Akf*,* Abk *y* bfk *son semejantes, por tanto:*
$\frac{Ab}{bk}=\frac{bk}{df}$. *Como consecuencia, resulta que* $(bk)^2 = (Ab)(bf)$ *y*
$bk = \sqrt{(Ab)(bf)}$, *o sea, bk es la media geométrica pedida. Este procedimiento era conocido de Euclides, pero los griegos nunca lo aplicaron a la música*

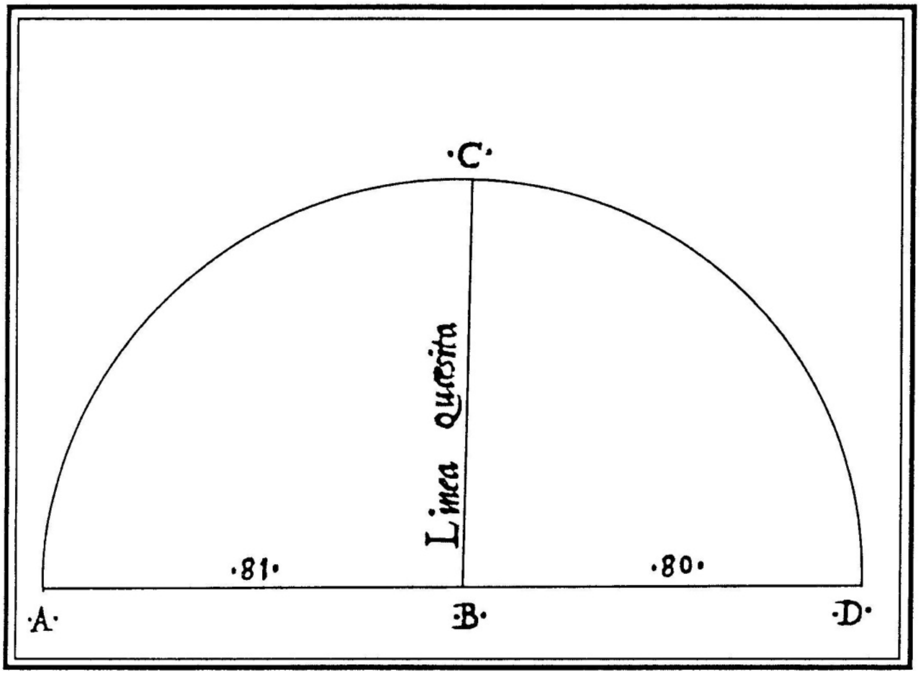

Figura 2. Fogliano. Musica Theorica. *III, 2, f. 36r.*
El diagrama muestra cómo dividir el intervalo de comma *por el mismo procedimiento geométrico de la figura anterior. El problema es que, al ser 80 y 81 números tan parecidos, el sistema carece de utilidad*

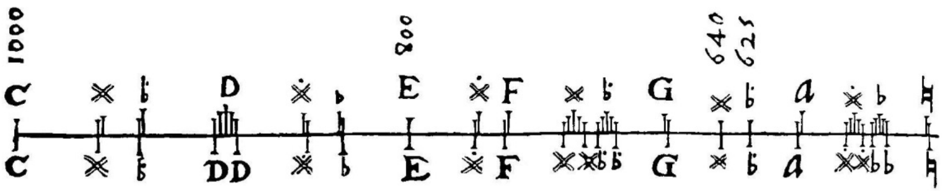

Figura 3. Salinas. De Musica. *III, cap. 25, p. 162.*
En la parte de abajo están los intervalos de la escala «perfecta», mientras que arriba están las aproximaciones, en función de fracciones de comma*, de la escala mesotónica. Zarlino, anteriormente, había hecho algunas construcciones similares, pero las de Salinas son más sofisticadas. La escala va de Do a do (C-c en la imagen, aunque c, que debería estar a la derecha del todo, no aparece). Cada división corresponde a ¼* de comma*. El esquema confirma que la tercera mayor no cambia (la afinación del Mi, E en la imagen), mientras que la quinta mesotónica (el Sol que corresponde al G del diagrama) queda ¼ de* comma *por debajo de la quinta justa*

iiij				iij					ij			
0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3
C	S	D	S	E	F	S	G	S	*a*	S	♮	c
|	7|5	2|	9|3	4|	11|1	6|6	1|	8|4	3|	10|2	5|	12|

|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
C	✕	♭	D	✕	♭	E	✕	F	✕	♭	G	✕	♭	*a*	✕	♭	♮	✕	c

Figura 4. Salinas. De Musica. *III, cap. 29, p. 170.*
La reproducción que presentamos procede de Goldáraz. Afinación y temperamentos históricos. *p. 126, que sigue el original exactamente, pero tiene una tipografía más fácil de entender. La imagen describe la escala en temperamento igual. Las notas de la parte inferior son las del temperamento mesotónico de ¼ de* comma, *las de arriba son la escala con temperamento igual, los números indican doceavos de* diesis. *Salinas, de esta forma, analiza por primera vez la escala que actualmente se usa de forma casi universal*

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Figura 5.
Esta es la forma más usual del triángulo de Pascal en los libros actuales.
El triángulo se puede extender tanto como se quiera. En cada una de las filas se mantiene igual el número de arriba mientras que el de abajo cambia desde 0 hasta el valor de arriba. Cada uno de sus elementos es un número combinatorio que se calcula mediante la fórmula indicada en el texto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

El factorial de un número es simplemente el producto de todos los números menores o iguales que él, empezando por 1. *Por ejemplo, El factorial de* 5 *es*

$$5! = (1)(2)(3)(4)(5) = 120.$$

Por definición se toma $0! = 1$. *Así se pueden calcular todos los elementos del triángulo de Pascal, pero, como veremos, hay modos más sencillos de hacerlo*

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Figura 6.
Así quedan los valores numéricos del triángulo de Pascal para las 7 primeras líneas. Salinas ya observó la simetría del conjunto, de modo que en cada fila los números se repiten, empezando en 1, luego aumenta hasta uno o dos valores máximos, y luego van descendiendo, pasando por los mismos números, hasta llegar a 1.
Una de las maneras más fáciles de obtener el triángulo es observar que, si sumamos dos números consecutivos de una fila, se obtiene el elemento que está justo en medio y debajo de ellos. Esta propiedad también fue conocida por Salinas (es la segunda que se da en el texto)

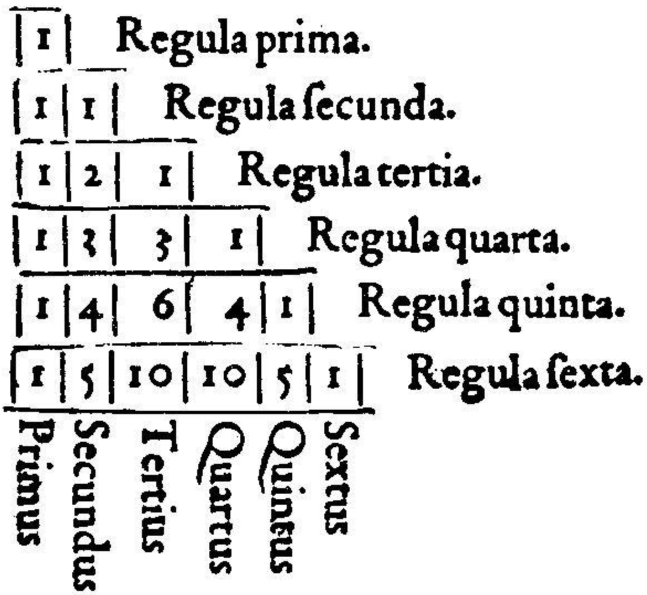

Figura 7.
Esquema en el que se muestran las seis reglas que «deduce» Salinas conformando el triángulo aritmético en una forma bastante familiar y de uso frecuente. De todos modos, como hemos visto, es más habitual poner el conjunto en forma de triángulo isósceles (como en la figura 6) que en la de triángulo rectángulo

Longitudo

Latitudo

1	1	1	1	1	1	Primi
1	2	3	4	5	6	Secundi
1	3	6	10	15	21	Tertij
1	4	10	20	35	56	Quarti
1	5	15	35	70	126	Quinti
1	6	21	56	126	252	Sexti

Numeri Positionum.

Figura 8.
Esta figura, también tomada del libro de Salinas, corresponde a otra forma de poner el triángulo aritmético. Salinas observa (es la primera propiedad a la que se alude en el texto) que los números de cada fila se pueden obtener sumando todos los números de la fila anterior hasta llegar a la columna correspondiente. De esta forma se atestigua que el músico burgalés realiza un análisis bastante cuidadoso de las propiedades del triángulo de Pascal.
Para comprobar que es igual al triángulo de Pascal basta observar que las diagonales que van de izquierda a derecha y de abajo a arriba son las líneas del triángulo en su forma normal.
Los elementos de cada fila corresponden a los, llamados, números figurados, que fueron muy usados en la matemática antigua y medieval. Lo curioso es que los antiguos nunca pasaron de la cuarta fila, pese a que les dieron mucha importancia, ya que pensaban que no tenía sentido seguir con construcciones que no tuvieran un análogo geométrico. En cambio, Salinas no duda en seguir formando nuevas filas

Créditos de procedencia de las imágenes

Las imágenes que no aparecen acreditadas en la presente relación proceden del tratado *De Musica libri septem* de Francisco de Salinas, Salamanca, Matías Gast, 1577 o han sido elaboradas por los propios autores.

Capítulo 1

Figs. 1 y 2: Kepler, Johannes. *Harmonices Mundi*. Linz: Godofredi Tampachii, 1619. En: Archive.org (http://archive.org/details/ioanniskepplerih00kepl).

Fig. 8 : Zarlino, Gioseffo. *Istitutioni harmoniche*. Venecia: Francesco dei Franceschi Senese, 1558. En: *Music Treatises of Gioseffo Zarlino* (CD-ROM). *Thesaurus musicarum italicarum*. Universidad de Utrecht.

Figs. 9, 11 y 12: Mersenne, Marin. *Harmonie Universelle, contenant La Théorie et la Pratique de la Musique. Livre Premier des Instruments.* Paris: Sebastien Cramoisy, 1636. En: Bibliothèque National de France. Gallica (gallica.bnf.fr).

Capítulo 3

Fig. 2 : Zarlino, Gioseffo. *Sopplimenti musicali*. Venecia: Francesco dei Franceschi Senese, 1588, lib. IV, cap. 30. En: *Music Treatises of Gioseffo Zarlino* (CD-ROM). *Thesaurus musicarum italicarum*. Universidad de Utrecht.

Fig. 3: Artusi, Giovanni M. *L'Artusi, ovvero delle imperfezioni della moderna musica*. Venecia: Giacomo Vincenti, 1600, fol. 21r-21v. En: Bayerische Staatsbibliothek, Digitale Bibliothek (https://www.bsb-muenchen.de/Digitale-Sammlungen.72.0.html).

Fig. 5: Nieto González, J. R., y Paliza Monduate, M. T. *Arquitecturas de Ciudad Rodrigo.* Ayuntamiento de Ciudad Rodrigo, 1994, pp. 52 y 55.

Capítulo 4

Fig. 1: Lefèvre d'Etaples. *Elementa musicalia*.1496, III, f.g6v, 2. En: *Thesaurus musicarum latinarum*. Indiana University (http://www.chmtl.indiana.edu/tml/start.html).

Fig. 2: Fogliano, Lodovico. *Musica Theorica*. III, 2, f. 36r. En: *Thesaurus musicarum latinarum*. Indiana University (http://www.chmtl.indiana.edu/tml/start.html).

Fig. 4: Goldáraz Gaínza, J. Javier. *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid: Alianza, 2004, p. 126.

Capítulo 5

Fig. 1: Salinas, Francisco de. *Annotaciones sobre el calendario gregoriano* (1583). En: Biblioteca Nacional de España, sign. ms. 23106.

Capítulo 11

Fig. 1: Narbáez, Luys de. *Los seys libros del Delphín*. Valladolid: Diego Hernández de Córdova, 1538. En: Biblioteca Nacional de España (Madrid), sign. R. 9741.

Fig. 2: Pisador, Diego. *Libro de música de vihuela*. Salamanca: D. Pisador, 1552. En: Biblioteca Nacional de España, sign. R. 14060.

Fig. 3: Fuenllana, Miguel. *Orphénica lyra*. Sevilla: Martín de Montesdoca, 1554. En: Biblioteca Nacional de España, sign. 9283.

Fig. 29: *Cancionero de la Sablonara*. En: Bayerische Staatsbibliothek, Múnich, BSB, Cod. hisp. 2.

Figs. 31 y 42: *Cancionero musical de Palacio*. En: Biblioteca del Palacio Real (Madrid), sign. II/1335/1335.

Fig. 34: Valderrábano, Enríquez de. *Libro de música de vihuela intitulado Silva de sirenas*. Valladolid: Francisco Fernández de Córdova, 1547. En: Biblioteca Nacional de España, sign. 14018.

Fig. 36: Bermudo, Juan. *Arte Tripharia*. Osuna: Juan de León, 1550. En: Biblioteca Nacional de España, sign. M/1366.

Fig. 39: Fuenllana, Miguel. *Orphénica lyra*. Sevilla: Martín de Montesdoca, 1554. En: Biblioteca Nacional de España, sign. 9283.

Capítulo 13

Fig. 1: Cerone, Pietro. *El melopeo y maestro*. Nápoles: G. B. Gargano & L. Nucci, 1613. En: Biblioteca Digital Hispánica (bdh.bne.es/bnesearch/detalle/3512912).

En los talleres salmantinos de Intergraf
terminose de estampar este acopio de estudios
en conmemoración del quinto centenario del nacimiento
del maestro Francisco de Salinas, siendo el día 11 de junio de 2014,
víspera de que la ciudad celebrase con música más ruidosa que *estremada*
la festividad de su patrono San Juan de Sahagún, colegial de la misma Universidad
de Salamanca en la que fuera catedrático Francisco en otro tiempo de los ochos siglos que
en 2018 cumplirá de su fundación, la más antigua de todas las que en el mundo hablan español.