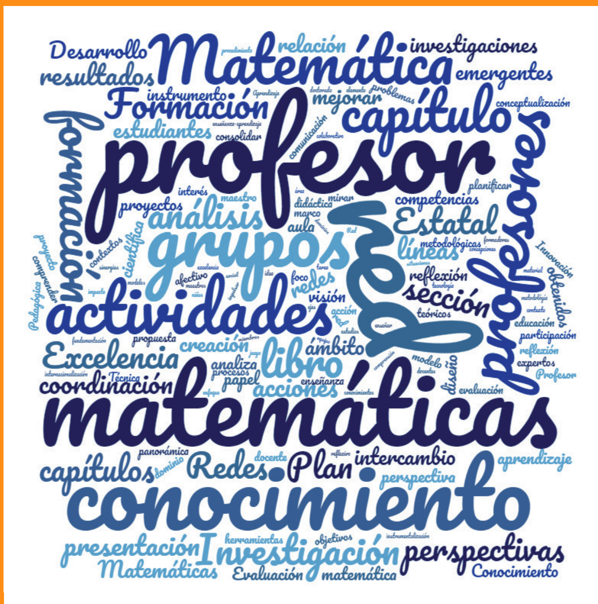
EDELMIRA BADILLO JIMÉNEZ,
NURIA CLIMENT RODRÍGUEZ
CENEIDA FERNÁNDEZ VERDÚ
MARÍA TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO
(Eds.)

INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: PRÁCTICA DE AULA, CONOCIMIENTO, COMPETENCIA Y DESARROLLO PROFESIONAL



AQUILAFUENTE

Ediciones Universidad
Salamanca

INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: PRÁCTICA DE AULA, CONOCIMIENTO, COMPETENCIA Y DESARROLLO PROFESIONAL

Research on mathematics teacher: classroom practice, knowledge, competences and professional development

EDELMIRA BADILLO JIMÉNEZ
NURIA CLIMENT RODRÍGUEZ
CENEIDA FERNÁNDEZ VERDÚ
MARÍA TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO
(Eds.)

INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: PRÁCTICA DE AULA, CONOCIMIENTO, COMPETENCIA Y DESARROLLO PROFESIONAL

Research on mathematics teacher:
classroom practice, knowledge, competences
and professional development

Ediciones Universidad
Salamanca

AQUILAFUENTE, 271

Motivo de cubierta: Colaboración del Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica. Universidad de Alicante.

La edición de esta obra ha contado con la colaboración
de los siguientes Grupos de Investigación:
GIDIMAT-UA. Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Alicante.
GIPEAM. Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica.
Universitat Autònoma de Barcelona.
EduMat_UVa. Grupo de investigación "Educación Matemática".
Universidad de Valladolid.
GIEMUS. Grupo de Investigación en Educación Matemática.
Universidad de Sevilla.
GIRME. Grupo de Investigación de Matemática Educativa.
Universidad de Salamanca.
Grupo de Didáctica de las Matemáticas en la Enseñanza post-obligatoria.
Universidad de La Laguna.
Grupo de Investigación DESYM. Centro de Investigación COIDESO.
Universidad de Huelva.
Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática.
Universitat de Barcelona.

1ª edición: diciembre, 2019
ISBN: 978-84-1311-073-8 (impreso)
978-84-1311-219-0 (PDF)
978-84-1311-220-6 (ePub)
978-84-1311-221-3 (mobipocket)
Depósito legal: S. 460-2019

Ediciones Universidad de Salamanca
Plaza San Benito s/n
E-37002 Salamanca (España)
http://www.eusal.es
eusal@usal.es

Realizado en UE-Made in EU

Composición, impresión y encuadernación:
Gráficas Lope
C/ Laguna Grande, 2, Polígono «El Montalvo II»
www.graficaslope.com
37008 Salamanca. España

Obra sometida a proceso de evaluación mediante sistema de doble ciego

Ediciones Universidad de Salamanca es miembro de la UNE
Unión de Editoriales Universitarias Españolas
www.une.es

♠

CEP. Servicio de Bibliotecas

INVESTIGACIÓN sobre el profesor de matemáticas : práctica de aula,
conocimiento, competencia y desarrollo profesional = Research on mathematics teacher : classroom practice,
knowledge, competences and profesional development / Edelmira Badillo Jiménez [y otros] (eds.).
—1a. ed.—Salamanca : Ediciones Universidad de Salamanca, 2019

440 p.—(Aquilafuente ; 271)

1. Profesores de matemáticas-Formación. 2. Matemáticas-Estudio y enseñanza.
I. Badillo, Edelmira, editor. II. Título: Research on mathematics teacher : classroom practice,
knowledge, competences and profesional development.

51:37.02

Índice

PRESENTACIÓN

La Resolución de 31 de mayo de 2016, de la Secretaría de Estado de Investigación, Desarrollo e Innovación aprobaba la convocatoria para el año 2016 del procedimiento de concesión de ayudas correspondientes a las acciones de dinamización Redes de Excelencia, del Programa Estatal de Fomento de la Investigación Científica y Técnica de Excelencia, Subprograma Estatal de Generación de Conocimiento, en el marco del Plan Estatal de Investigación Científica y Técnica y de Innovación 2013-2016. (BOE, nº 136, de 6 de junio de 2016)[1]. Entre otras cosas el texto de la convocatoria indicaba lo siguiente

> Las Redes de Excelencia son un instrumento de la Administración para que los agentes ejecutores de las actividades de I+D+i accedan a la financiación de sus actividades y contribuir a la vertebración del sistema español de Ciencia-Tecnología-Empresa. En particular para la realización de actividades que impliquen el incremento de los conocimientos científicos y tecnológicos. Estas acciones de dinamización de Redes de Excelencia pretende potenciar la creación y desarrollo de redes de investigación de excelencia que puedan tanto planificar actividades conjuntas futuras como consolidar resultados de actividades de I+D+I anteriores, así como realizar actividades de promoción internacional y posicionamiento estratégico.
>
> En particular las acciones de dinamización Redes de Excelencia son actividades para la creación y desarrollo de redes de grupos de investigación encaminadas a mejorar los resultados de investigación obtenidos mediante acciones financiadas en convocatorias anteriores del Plan Nacional de I+D+i 2008-2012 y del Plan Estatal de I+D+I 2013-2016.

[1] https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-B-2016-25316.

Entre las finalidades que determina el apoyo a Redes de Excelencia se indicaba (Art. 2):

> [...] se pretende que los grupos participantes en dichas redes puedan tanto planificar actividades conjuntas futuras como consolidar resultados de actividades de I+D+I anteriores.... La finalidad de estas acciones de dinamización es impulsar la internacionalización de las actividades de I+D y contribuir al avance del conocimiento para afrontar los desafíos que la investigación española tiene en el contexto del Espacio Europeo de Investigación.

En el artículo 10 de la Resolución se definen tres tipos de redes siendo uno de ellos las Redes Temáticas:

> [...] constituidas por investigadores encuadrados en la misma o similar área temática de conocimiento, algunos de los cuales deberán haber dirigido o participado en algún proyecto de I+D financiado en las convocatorias del Plan Estatal de I+D+I 2013-2016 o del Plan Nacional de I+D+i 2008-2012.

En este marco legal se constituye la RED8- Educación Matemática y Formación de Profesores (RED8-EMyFP; EDU2016-81994-REDT). La Red está constituida por 8 grupos de investigación con sedes en 8 universidades españolas desarrollando líneas de investigación centradas en la formación de profesores en el ámbito de la Educación Matemática. Los grupos que conforman la RED8-EMyFP han participado o estaban liderando proyectos del Plan Estatal de investigación.

La propuesta científica que justifica la RED8-EMyFP se apoya en áreas de actuación previa de los diferentes grupos proponentes relativas a la Educación Matemática y la Formación de Profesores que definen tres objetivos:

- Potenciar cauces de intercambio científico entre grupos de investigación con trayectoria reconocida que permita mejorar el debate científico, los referentes teóricos usados y resultados obtenidos.
- Aumentar y visibilizar el impacto científico-técnico de los diferentes grupos coordinando actuaciones que permitan aumentar la capacidad de liderazgo internacional.
- Establecer una plataforma que potencie la formación de investigadores en Educación Matemática y Formación de Profesores.

La Red8-EMyFP es un **instrumento de coordinación** que tiene como objetivo mejorar los resultados obtenidos por los diferentes grupos, así como intercambiar y potenciar la generación de conocimiento sobre la formación de profesores en el ámbito de la Educación Matemática. Para lograr este objetivo se coordina y favorece la comunicación entre diferentes perspectivas teóricas y focos específicos de atención a nivel nacional e internacional. Diferentes referencias teóricas han sido generadas y usadas durante los últimos años a partir de los diferentes proyectos de investigación (perspectivas socio-culturales, cognitivas, el papel de la instrumentalización, enfoque ontosemiótico,…) que subrayan la riqueza de planteamientos puestos en juego para comprender mejor el ámbito de la Educación Matemática y la Formación de Profesores.

Un antecedente relevante en estas actividades de coordinación y de gestación de una red científica lo constituye la participación de los grupos proponentes de la RED8-EMyFP en las actividades del grupo de trabajo de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática-SEIEM- «Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor». La participación en las reuniones anuales y los seminarios interanuales (desde la constitución de la Sociedad en 1996) ponen de manifiesto el interés de los integrantes de los diferentes grupos por mejorar nuestra comprensión del conocimiento profesional de los profesores de matemáticas, y de sus procesos de aprendizaje y de desarrollo profesional, así como de la práctica del profesor, concluyendo reiteradamente en la necesidad de construir espacios de intercambio y coordinación.

Al mismo tiempo, la presencia y colaboración de investigadores del equipo en el ámbito latinoamericano en relación con la Educación Matemática y la Formación de Profesores durante los últimos años incide en la coordinación que es posible alcanzar a través de un instrumento como la RED8-EMyFP. La creación de la RED8-EMyFP ha permitido coordinar estas iniciativas anteriores. Una de las Acciones definidas para promover los cauces de intercambio entre los grupos de investigación es la creación de un observatorio que recoja y presente de manera coordinada la producción científica en Educación Matemática y la Formación de Profesores. Una vertiente de esta acción es la edición del monográfico que se presenta y que organiza y sintetiza parte del conocimiento que se está generando por los diferentes grupos de investigación en relación a la Educación Matemática y la Formación de Profesores. Este libro cumple con el objetivo de facilitar el intercambio y la divulgación de dicho conocimiento. Además, la edición de este monográfico permite aportar mecanismos para la obtención de uno de los objetivos previstos en la RED8-EMyFP: la coordinación creando sinergias que faciliten la comunicación de los diferentes grupos de manera que puedan convertirse en referencia para la generación de conocimiento a nivel internacional, y generar referencias accesibles para la formación de investigadores en esta temática.

El libro *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*, coordinado por Edelmira Badillo (Universitat Autònoma de Barcelona), Nuria Climent (Universidad de Huelva), Ceneida Fernández (Universidad de Alicante), y María Teresa González (Universidad de Salamanca) responde a esta acción de la RED8-EMy FP y a la idea de visibilizar diferentes aportaciones en relación con la investigación sobre la formación de profesores de Matemáticas. Este libro presenta una panorámica de investigaciones con el foco en el profesor de Matemáticas desde distintas perspectivas teóricas y metodológicas. Los focos desarrollados en los diferentes capítulos consideran al profesor como aprendiz y como profesional reflexivo. El libro está organizado en cuatro secciones:

- La práctica del aula.
- El conocimiento del profesor.
- Aprendizaje del profesor: Desarrollo de competencias.
- Desarrollo profesional y dominio afectivo.

Cada una de estas secciones refleja diferentes aproximaciones conceptuales, metodológicas y focos de atención desarrollados por los diferentes grupos de investigación.

La primera sección presenta investigaciones centradas en *el análisis de la práctica de aula* en las que se desarrollan diversos focos del análisis de la práctica profesional del profesor de matemáticas. El primer capítulo, aborda el papel del profesor y de su discurso en clase desde las herramientas que ofrece la perspectiva social. El segundo capítulo se centra en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS). En el capítulo tres se ejemplifica el uso de las herramientas del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK en sus siglas en inglés) para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas como un medio para comprender su práctica. Finalmente, se cierra esta parte con una visión general de la investigación sobre la práctica profesional, identificando líneas de investigación emergentes.

La segunda sección recoge las aportaciones relativas al conocimiento del profesor, su conceptualización, su relación a la noción de competencia docente y cómo es posible articularlo en las diferentes propuestas formativas. Esta sección está formada por cuatro capítulos en los que se describen diferentes aproximaciones al estudio del conocimiento que poseen estudiantes para profesor y el conocimiento que se considera deseable para la enseñanza de la matemática en Educación Primaria. Se complementa con una caracterización del papel de dicho conocimiento en el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente». Estos capítulos abordan la conceptualización del conocimiento del profesor tanto desde modelos cognitivos como desde perspectivas socioculturales. Se estudia el conocimiento referido a ideas transversales de la matemática, a la práctica matemática de definir y a contenidos matemáticos base. Los diferentes dominios de conocimiento del profesor pertinentes para la tarea de enseñar matemáticas se consideran ejes para desarrollar la competencia profesional. Esta sección se cierra con una visión general de la investigación internacional sobre el conocimiento del profesor, identificando líneas de investigación emergentes.

El foco de la tercera sección es el aprendizaje del profesor y el desarrollo de competencias docentes. El primer capítulo analiza el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños en estudiantes para maestro de educación infantil. En el segundo capítulo se analiza el desarrollo de la competencia de análisis desde la perspectiva ontosemiótica. El tercer capítulo describe el diseño y fundamentación de un programa de formación para profesores en ejercicio desde la perspectiva del desarrollo de la competencia profesional. Por último, el cuarto capítulo analiza el desarrollo de la competencia digital en futuros profesores de matemáticas de educación secundaria a través del diseño de una unidad didáctica y su análisis a través de criterios de idoneidad didáctica. Se cierra con una visión general de la investigación internacional sobre el aprendizaje del profesor y desarrollo de competencias, identificando líneas de investigación emergentes.

La cuarta sección presenta investigaciones centradas en el desarrollo profesional del profesor desde tres perspectivas (reflexión, evaluación y uso de las nuevas tecnologías) y en el dominio afectivo. Los contextos de estos estudios son tanto la formación inicial de maestros y profesores de matemáticas de secundaria como contextos de desarrollo profesional. El primer capítulo aborda los procesos de reflexión de los profesores a partir de problemas de investigación en un curso de desarrollo profesional. El segundo capítulo se centra en las perspectivas sobre la evaluación de proyectos estadísticos de estudiantes para maestro. En el tercero se plantea el diseño de una propuesta de formación de profesores de secundaria utilizando el modelo MUST para generar situaciones y analizando el aporte de la tecnología a la resolución de problemas de matemáticas. El cuarto se centra en el análisis de los aspectos afectivos como elemento del conocimiento profesional del profesor ligados a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas determinando elementos teóricos y metodológicos. Finalmente, el quinto capítulo considera las concepciones de los profesores sobre la prueba y su influencia en la enseñanza desarrollada.

El contenido del libro recoge, en parte, el trabajo colaborativo de los investigadores pertenecientes al proyecto RED8-EMyFP (EDU2016-81994-REDT), financiado por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, de España. A los miembros de esta red se han unido expertos en la investigación sobre el profesor de matemáticas tanto nacionales como de otros países. Los diecinueve capítulos de este libro están escritos por 60 investigadores de diferentes países. Así, en diez capítulos además de los autores españoles participan investigadores de Latinoamérica (Chile, Brasil, México, Colombia, Portugal y Costa Rica). Además, los capítulos centrados en ofrecer una panorámica de investigación internacional identificado líneas emergentes, en las distintas secciones del libro, han sido realizados por autores de reconocido prestigio internacional como Leonor Camargo

(Universidad Pedagógica Nacional, Colombia), Olimpia Figueras (Cinvestav, México) y Alicia Ávila (Universidad Pedagógica Nacional, México).

Este libro, al mostrar una amplia diversidad de investigaciones sobre el profesor de matemáticas, puede ser de interés para investigadores, tanto expertos como en formación, profesores de matemáticas, formadores de profesores y personas interesadas en general en la Educación Matemática. Puede ser material de consulta para estudiantes de los másteres de Investigación en Educación Matemática y de los programas de doctorado.

Salvador Llinares
Coordinador de la RED8-EMyFP
EDU2016-81994-REDT

LA PRÁCTICA DE AULA

THE CLASSROOM PRACTICE

Badillo, E.
Universitat Autònoma de Barcelona

La investigación sobre el profesor centrada en el análisis de la práctica ha sido foco de discusión en las últimas décadas (Lin y Rowland, 2016). Esto se ve en el creciente número de artículos en revistas indexadas centradas en la investigación sobre el profesor como, *Journal of Mathematics Teacher Education* o *Journal for Research in Mathematics Education.* Igualmente, se constata el incremento de espacios de discusión sobre la práctica docente, concretamente el Grupo de trabajo 19, *Mathematics Teaching and Teacher Practice(s),* consolidado desde el CERME 9 y focos de trabajo dedicados a esta línea de investigación, particularmente en el PME (Lin y Rowland, 2016). La variedad de aproximaciones en esta línea de investigación ha puesto de manifiesto que la noción de práctica es quizás incluso más problemática que la noción de conocimiento y requiere una discusión epistemológica que todavía está en curso (Ponte, 2011).

Son muchos los interrogantes que se pueden considerar cuando el foco de investigación es la práctica del profesor de matemáticas, por ejemplo, ¿Cuál es la naturaleza de esta práctica? ¿Cuáles son los factores importantes que dan forma y apoyan el desarrollo de las prácticas docentes? ¿Dónde se focaliza el análisis, en la caracterización de los comportamientos y acciones de los profesores en su práctica profesional o, en cambio, en sus intenciones y significados? ¿Cómo podemos conectar los aspectos individuales y sociales de las prácticas? ¿Qué tipología de

Badillo, E. (2019). La Práctica de aula. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 15-17). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

interacciones se generan durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y qué naturaleza tienen? ¿Qué criterios y procesos configuran la «buena práctica», tanto para docentes en ejercicios como en formación? ¿Qué constructos teóricos y analíticos permiten abordar los procesos de desarrollo de la práctica profesional? ¿Qué papel juega el discurso en el análisis de la práctica? ¿Qué relación hay entre aspectos de la práctica profesional del profesor y la manera en la que el profesor ayuda a definir una determinada práctica matemática en el aula?, entre otros.

Ponte y Chapman (2006) señalan diferentes perspectivas y temas para abordar el análisis de la práctica docente, así: estudios de psicología cognitiva, estudios de interacción en el aula, estudios socioculturales, estudios basados en el currículo, estudios biográficos y colaborativos de los docentes y diferentes puntos de vista de la práctica. En esta sección se presentan cuatro capítulos con aproximaciones diferentes al estudio de la práctica de aula, centrada en el rol del profesor de matemáticas. El análisis de la práctica del profesor se aborda desde diferentes perspectivas, que van desde acercamientos más socioculturales hasta visiones más cognitivas. Los capítulos 2 y 3, asumen, desde diferentes perspectivas, que el análisis de la práctica del profesor es un espacio que permite la caracterización y/o desarrollo de los conocimientos y competencias profesionales que los profesores ponen en juego cuando gestionan la enseñanza de tópicos matemáticos concretos. El primer capítulo, se focaliza en el análisis de las prácticas discursivas del profesor de matemáticas de secundaria que se generan en el aula, mientras que el último capítulo, asume, desde perspectivas socioculturales y cognitivas, que los futuros maestros aprenden en su práctica, si se generan espacios en la formación que promuevan reflexionar sobre esta.

El primer capítulo, aborda la práctica profesional del profesor de matemáticas entendida como una práctica discursiva configurada por la práctica discursiva del alumno. Los autores asumen el análisis del discurso matemático del profesor desde principios de las teorías sociales y como fenómeno de la comunicación y de la cultura. Un aporte interesante es la propuesta de un análisis textual situado en el contexto de cultura y aplicado al discurso matemático del alumno, que luego aplican al análisis del discurso matemático del profesor. Para el análisis del discurso matemático del profesor en clase, atendiendo al contenido matemático de aprendizaje y a la tarea de clase para la enseñanza, definen cuatro indicadores y cuatro niveles por indicador: selección de ejemplos, secuenciación de ejemplos, explicación de ejemplos y adaptación de ejemplos y de explicaciones. La definición de estos indicadores supone un avance en el estudio de las relaciones entre discursos del alumno y del profesor.

En el segundo capítulo, se analiza la práctica profesional de un profesor en una clase de matemáticas de secundaria en la que se aborda la medida de longitud. Los autores, basándose en los constructos del *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática* (EOS), aplican algunas de las herramientas de análisis didáctico propuestas desde el modelo de *Conocimientos y Competencias*

Didáctico-Matemáticas (CCDM), con el propósito de hacer una radiografía que ilustra la estructura y funcionamiento de la clase video grabada. Un aporte interesante es la propuesta de un instrumento que permite sintetizar la descripción de la práctica del profesor de matemáticas, basado en una metodología de observación, que ha consistido en aplicar algunos de los constructos del análisis didáctico del CCDM: configuraciones didácticas y criterios de idoneidad didáctica.

En el tercer capítulo, se describe e interpretan las acciones de dos maestras de infantil a lo largo de una sesión de clase sobre tópicos de geometría y aritmética. Los autores, basándose en las herramientas del modelo *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK), abordan la identificación del conocimiento especializado que sustenta la práctica de las dos maestras, definiendo episodios relevantes. Una de las aportaciones de este estudio, es la definición de descriptores de los elementos de conocimiento especializado que han emergido del análisis de la práctica, que pueden ser considerados como contenido de aprendizaje en la formación inicial y continua de maestros de infantil.

En el cuarto capítulo, la autora presenta una panorámica sobre diferentes perspectivas para analizar la práctica del profesor, que tienen especial relevancia en el ámbito de investigación y en la formación del profesorado en Latinoamérica. Finalmente, se presenta un ejemplo de formación de profesores en ejercicio basado en la práctica reflexiva, en el contexto de una Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Un aporte interesante de este estudio es la articulación de dos perspectivas teóricas para caracterizar el desarrollo del conocimiento en acción, de dos profesores de matemáticas en ejercicio, como resultado de la aplicación de ciclos de reflexión sobre la práctica.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el marco colaborativo de los Proyectos EDU2016-81994-REDT y EDU2015-65378-P, MINECO-Espana / FEDER-Europa, y con el apoyo del Grupo GIPEAM, SGR2017-101, AGAUR-Catalunya.

REFERENCIAS

Lin, F-L., y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En A. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413-417.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

DISCURSOS DEL ALUMNO Y DEL PROFESOR EN CLASE DE MATEMÁTICAS

DISCOURSES OF THE LEARNER AND OF THE TEACHER IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Núria Planas[1], Judit Chico[1], Itziar García-Honrado[2], Alberto Arnal-Bailera[3]

[1]*Universitat Autònoma de Barcelona,* [2]*Universidad de Oviedo,* [3]*Universidad de Zaragoza*

RESUMEN

La práctica profesional del profesor de matemáticas es en gran medida una práctica discursiva configurada por la práctica discursiva del alumno. Por ello, resulta esencial indagar relaciones entre el discurso del alumno y el del profesor en clase, junto con explorar aspectos del contexto de cultura que pueden estar regulando dichas relaciones. En este capítulo, primero presentamos una propuesta de análisis textual situado en el contexto de cultura y aplicado al discurso matemático del alumno, que luego aplicamos al análisis del discurso matemático del profesor. Acabamos reflexionando sobre el papel de la cultura del aula de matemáticas en la producción de relaciones entre discursos de alumno y de profesor. Adoptamos principios de las teorías sociales de la actividad humana que sustentan la noción de discurso como fenómeno de la comunicación y de la cultura.

Palabras clave: *aula de matemáticas, alumno, profesor, discurso, contexto de cultura.*

Planas, N., Chico, J, García-Honrado, I, Arnal, A.(2019). Discursos del alumno y del profesor en clase de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 19-41). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The professional practice of the mathematics teacher is largely a discursive practice configured by the discursive practice of the learner. It is thus essential to examine relationships between the discourse of the learner and of the teacher in the class, along with exploring features of the context of culture that may be regulating these relationships. In this chapter, we first introduce a proposal of textual analysis situated in the context of culture and applied to the mathematical discourse of the learner, which is then applied to the analysis of the mathematical discourse of the teacher. To finish, we reflect on the role of the culture of the mathematics classroom in the production of relationships between the discourse of the learner and the teacher. We adopt principles of the social theories of human activity underlying the notion of discourse as a phenomenon of communication and culture.

Keywords: *mathematics classroom, learner, teacher, discourse, context of culture.*

UN DISCURSO DE AULA CON VARIOS DISCURSOS

¿Existe un discurso de aula? ¿Existen un discurso del alumno y uno del profesor? ¿Tiene el aula de matemáticas un discurso específico? Dada la producción cultural e histórica del aprendizaje y de la enseñanza (de las matemáticas) como realidades distintas (Roth y Radford, 2011), se suele responder en positivo a todo esto. Es habitual la posición dual sobreentendida que distingue entre discurso del profesor y del alumno. Si tomamos la idea amplia de discurso como «los múltiples procesos mediante los cuales las personas se comunican entre ellas para comunicar» (Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2018, p. 46), encontramos sin embargo un escenario más complejo con discursos sobre los modos de hablar y de hacer adecuados para enseñar matemáticas en la escuela (i.e., discursos sobre el discurso del profesor), o bien sobre los modos de hablar y de hacer adecuados para aprender matemáticas en el aula ordinaria y en sistemas paralelos de escolarización (i.e., discursos sobre el discurso del alumno). Aprovechamos la escritura de este capítulo para dar valor a una complejidad, la del discurso, que no siempre se incorpora en la reflexión didáctica ni en el análisis investigativo de la práctica profesional del profesor de matemáticas. Esto no deja de ser sorprendente si tenemos en cuenta que esta práctica profesional es en gran medida una práctica discursiva dado que implica la producción e interpretación de textos orales y escritos.

Aun cuando a veces se omite el carácter discursivo de la práctica profesional del profesor de matemáticas, la investigación sobre educación matemática y discurso lleva ya un largo recorrido bajo las tradiciones denominadas 'micro' y 'macro' en Planas y Valero (2016). Mientras que la tradición macro examina el impacto de la estructura social en la configuración de la educación matemática (e.g., estudio de discursos sobre el profesor de matemáticas), la micro trabaja con contextos próximos de comunicación en entornos de práctica matemática, mayormente aulas (e.g., estudio de discursos –hablados, escritos, visuales, corporales…– de un profesor de matemáticas en una secuencia de enseñanza). La atención a la actividad humana en el contexto próximo ha dado lugar a perspectivas distintas según la acepción de lo social (ver el análisis comognitivo del discurso en Gavilán, Sánchez-Matamoros y Escudero, 2014, el análisis crítico del discurso en Civil y Planas, 2004, o el de la interacción en Llinares y Valls, 2010). Así tenemos que:

> Una importante característica distintiva de las teorías sociales contemporáneas es la convivencia y articulación de las acepciones interaccionista y fuerte de lo social. Dentro de estas teorías, hay una variedad de matices y aproximaciones, todas ellas con el denominador común de comprender la inseparabilidad de la persona –que aprende, que enseña, que investiga…– y el contexto –en el que aprende, en el que enseña, en el que investiga…– (Planas, 2017, p. 92).

Desde los años noventa del siglo pasado, el área ha cambiado y la investigación en el seno del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM), al que pertenecemos, también. La atención a las teorías sociales de la actividad humana ha dejado de ser menor y foros como los congresos del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (IGPME), de la *European Society for Research in Mathematics Education* (ERME) y de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) han experimentado un aumento de referencias a estas teorías y de su utilización. Han contribuido las lecturas más precisas de lo social en la obra de Vygotsky, que han permitido superar la concepción de mente y pensamiento como eslabones de un orden lineal donde el aprendizaje se facilitaría en el grupo y se produciría en el individuo. Las teorías sociales suplen el supuesto de linealidad en el aprendizaje con la continuada constitución cultural y política de la matemática escolar, de la enseñanza, del aprendizaje y de la práctica profesional.

Tabla 1. Líneas de estudio sobre discurso en el equipo GIPEAM

<table>
<tr><td rowspan="4">Objeto paciente
Cultura</td><td>Actor</td><td>Actividad-Comunicar</td><td rowspan="4">Objeto agente
Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Alumno de matemáticas</td><td>Discurso matemático del alumno</td></tr>
<tr><td>Profesor de matemáticas</td><td>Discurso matemático del profesor</td></tr>
<tr><td>Grupo clase de matemáticas</td><td>Discurso matemático del aula</td></tr>
</table>

Un equipo de GIPEAM estudiamos discursos en sesiones de clase de matemáticas en la etapa de secundaria. En los últimos años hemos impulsado tres líneas simultáneas de estudio (ver filas, Tabla 1) según el participante (*actor*) cuyo texto analizamos. Para cada línea, contamos con datos donde comunicar (*actividad*) funciona como transitivo con respecto al contenido matemático (*objeto agente*) y al contexto de la cultura (*objeto paciente*). Halliday (1978, 1993) utiliza las expresiones de objeto agente y objeto paciente para señalar el juego de opacidad y transparencia propio de la comunicación de los conocimientos y prácticas desarrollados en la cultura. Nuestra interpretación de la actividad de comunicar como fenómeno de la cultura con valor semántico (i.e., siempre se comunica algo) implica que, tras la comunicación de contenido matemático en clase, persiste un objeto 'paciente' –la cultura– que regula el discurso del aula y la fabricación de significado. En particular, cualquier práctica del profesor se produce en una situación próxima y un contexto de cultura determinados sin los cuales no se puede explicar su significado. En nuestros trabajos, tratamos con datos donde el contenido matemático se comunica de manera explícita en el texto como objeto agente (e.g., «Tenemos que relacionar los casos posibles con los casos favorables»), mientras que la cultura (i.e., conocimientos y prácticas) que da significado al contenido matemático se acostumbra a comunicar de manera transparente como objeto paciente (e.g., «La fórmula de Laplace es tan importante como el teorema de Pitágoras»). A lo largo del capítulo volvemos sobre este punto con datos de experimentos de aula.

Llevamos tiempo estudiando la 'transitividad' de comunicar mediante un programa de experimentos de enseñanza, variado en cuanto a contenido matemático y contexto de cultura (e.g., Arnal-Bailera y Planas, 2013; Boukafri y Planas, 2018; Chico, 2018; Chico, Planas, Morera y Fortuny, 2014; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014; Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014; García-Honrado, Fortuny, Ferrer y Morera, 2016; Morera, Planas y Fortuny, 2013). Se considera la enseñanza de contenido matemático, primero en el diseño y desarrollo de experimentos y después en el análisis de discursos matemáticos del alumno y del profesor en interacción. Transformaciones geométricas, cálculo de probabilidades o generalización de patrones son contenidos curriculares cuya comunicación hemos investigado en entornos de clase. A modo de los ciclos de experimentos en el interaccionismo (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb, Zhao y Dean, 2009), pretendemos modificar culturas de aula para mejorar la producción y distribución de oportunidades de aprendizaje matemático. Indagamos lo que es susceptible de ser modificado con la 'herramienta' del análisis del discurso. Esta herramienta es teórica y en nuestra investigación está guiada por las teorías sociales de la actividad humana y del aprendizaje (Planas, 2010, 2017; Planas, Morgan y Schütte, 2018). En las secciones 'Discurso matemático del alumno' y 'Discurso matemático del profesor' presentamos resultados de experimentos de enseñanza a fin de ilustrar el argumento sobre la complejidad del discurso y su papel en la comprensión de la práctica profesional del profesor de matemáticas en clase.

DISCURSO MATEMÁTICO DEL ALUMNO

En esta parte del capítulo, consideramos la práctica discursiva o discurso del alumno en clase por ser constitutivo del discurso del profesor en tanto que lo regula y contribuye a configurarlo. Cabe antes comentar la elección del singular para alumno y para discurso (Figura 1). Este singular va unido al reconocimiento de una pluralidad de alumnos y discursos. La alumna con una lengua dominante distinta a la de instrucción, por ejemplo, afronta retos de aprendizaje y de participación en el discurso del aula diferentes a la alumna cuya lengua coincide con la de instrucción (Civil y Planas, 2004; Planas y Civil, 2010). Con el número singular y de acuerdo con Austin y Howson (1979), señalamos la existencia de una epistemología del discurso del alumno, esto es, un conjunto de rasgos comunes constituyentes de los procesos en clase mediante los cuales los alumnos comunican contenidos del contexto de la cultura incluida la matemática escolar. En la base de esta epistemología está la producción cultural e histórica del aprendizaje –del alumno– y de la enseñanza –del profesor– con límites y separaciones. Al respecto son interesantes las analogías con la noción de género (Pimm, 1987) y con la epistemología del discurso de la novela (Bakhtin, 1981), que fundamenta el uso del singular en contraposición con el discurso del ensayo o el de la poesía.

Dicho lo anterior, pasamos a comentar la esencia de nuestros métodos. El propósito del capítulo es divulgativo y de reflexión por lo que no precisamos el detalle técnico de métodos ni resultados. A grandes rasgos, hemos desarrollado un análisis del discurso mediante caracterización narrativa por agrupación de códigos, que producimos por comparación constante y triangulación en seminarios del equipo. Los códigos son unidades de significado sobre interacción (e.g., iniciar respuesta; compartir explicación) y sobre contenido matemático (e.g., generalización algebraica; identificación de variable). Con ambos tipos intentamos dar cuenta del discurso del alumno durante la actividad matemática en sesiones de clase que son experimentos de enseñanza. Los códigos de contenido matemático se centran en el objeto declarado de la enseñanza y son un subtipo de los de interacción. Trabajamos por tanto con códigos que no aceptan oposición simple ni exclusión de unos por otros. La complejidad de cada código aumenta en la medida en que se combina con el resto, lo cual involucra la elaboración progresiva de narrativas. Una narrativa es un texto escrito donde nos referimos a otro texto, el discurso matemático del alumno, con el objetivo de referenciar conexiones entre códigos de contenido matemático en el transcurso de la interacción, a la vez que tratamos de averiguar el significado que la situación próxima y el contexto de cultura pueden estar aportando. En este sentido, las narrativas son funcionales ya que no pretenden realizar descripciones formales del texto sino estudiar su utilización y desarrollo en la producción de unos significados matemáticos concretos de entre los muchos que podrían haberse creado en relación con una cierta tarea.

Comunicar cultura	
Discurso del alumno en clase	*Comunicar matemáticas* Discurso matemático del alumno de matemáticas en clase de matemáticas

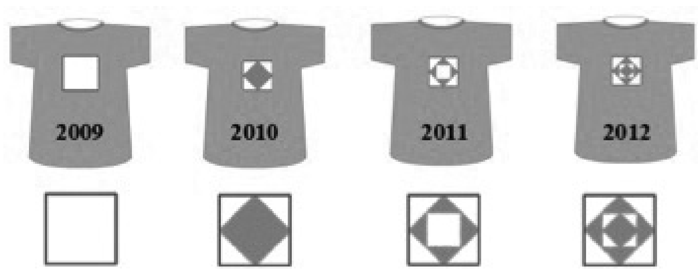
Figura 1. Línea de estudio sobre el discurso del alumno

Como indicábamos al inicio, para nosotros el discurso es un invariante de la comunicación y de la cultura donde se circunscribe la actividad de comunicar. Cualquier uso presuntamente intransitivo y culturalmente neutro de comunicar es una ficción. Siempre se comunica cultura, en particular modos de hablar y de hacer, porque siempre hay un contexto en el que se plantea la práctica y que facilita la comprensión acerca de la adecuación y relevancia de los textos. De ahí que el contexto de cultura deba ser tenido en cuenta en la producción, combinación y relación de códigos para la interpretación del discurso. Interpretar un discurso no implica ni presupone la creación de una narrativa inequívoca. Interrogamos los datos en la situación de proximidad, en un proceso inacabado que incorpora aquello a lo que tenemos acceso acerca del contexto y que puede no ser manifiesto en la literalidad del texto. Nótese que llamamos discurso a cualquier fragmento de habla independientemente de su duración y longitud o de la selección de conversaciones en torno a objetos matemáticos específicos.

ANÁLISIS TEXTUAL SITUADO EN EL CONTEXTO DE CULTURA

En este apartado, reproducimos resultados del análisis del discurso del alumno en interacción durante la resolución de la tarea de la Figura 2 en una sesión de clase en un centro de Barcelona. El detalle del análisis se documenta en Chico (2014) y los mismos datos han sido ilustrados en Chico y Planas (2018). Son datos orales que han pasado por modificaciones importantes al ser traducidos del catalán y luego transcritos. No entramos a discutir la conversión de discurso hablado en discurso escrito. Sí queremos, sin embargo, señalar la diferencia que esto supone con respecto a estudios que analizan datos de foros virtuales y chats que no requieren transcripción (ver, por ejemplo, Llinares, 2012, para análisis de datos donde profesores de matemáticas hablan por escrito en entornos de línea). Tampoco entramos a examinar el hecho de presentar datos en un único sistema lingüístico cuando se alternan varios en los datos originales. Modificar el carácter multilingüe y multimodal de los datos nos parece cada vez más problemático por el mensaje tácito que se envía sobre la irrelevancia del sistema lingüístico en el desarrollo de la actividad matemática. En los trabajos donde no estudiamos el impacto de la alternancia de lenguas y de las modalidades de comunicación en el discurso matemático del alumno, por cuestiones de espacio a menudo acabamos optando por mostrar datos «traducidos» a la vez que mencionamos la pérdida en términos de comprensión de la actividad. Hoy día, la posibilidad de depositar ficheros de audio y video en repositorios abiertos y de anexar archivos digitales a las publicaciones, tendrá que reducir los riesgos asociados a la simplificación de datos.

Desde 2009, una diseñadora hace una camiseta por año como insignia de su marca. Estos son los modelos correspondientes al primer, segundo, tercer y cuarto año:



La figura en cada camiseta sigue una serie: se toma un cuadrado blanco, se marcan los puntos medios de los lados, se unen y se pinta de gris el cuadrado resultante. Después se unen los puntos medios del cuadrado gris y se pinta de blanco, y así sucesivamente.
1. ¿Cuántos cuadrados blancos y cuántos grises tendrá la figura de la camiseta 2015?
2. ¿Cuántos de cada tipo tendrá una camiseta de cualquier año, la enésima camiseta?
3. ¿Cuántos triángulos blancos y cuántos grises tendrá la figura de la enésima camiseta?

Figura 2. Enunciado de la tarea en Chico y Planas (2018)

Producción de un discurso matemático hacia la generalización algebraica

Empezamos con datos de tres alumnos que discuten la segunda cuestión de la tarea de la Figura 2 sobre la cantidad de cuadrados blancos y grises de la enésima camiseta. Se suceden representaciones verbales aritméticas del caso general en relación con la identificación de la variable.

1. Cristina: Pues el año menos dos mil nueve es igual al año menos dos mil nueve partido entre dos más una blanca si fuera impar y sin una blanca si fuera par.
2. Jose: ¿Y la ene?
3. Cristina: El año, el año que estás buscando o sea el año que te dan.
4. Sara: El año que pone en la camiseta.

5. Jose: No, porque la enésima camiseta, la ene no sería el año, es el número de camiseta. Claro, la enésima camiseta no es dos mil nueve o dos mil trece. ¿Qué sería la camiseta dos mil trece? No, es la sexta, la quinta…

Los códigos asociados al discurso del alumno –léase Cristina, Jose y Sara– son *generalización aritmética, identificación de la variable, iniciar resolución y solicitar clarificación*. El trabajo entre alumnos en una clase de matemáticas de un aula de secundaria obligatoria habituada a una práctica determinada (ver Chico, 2014) es la 'medida' de control para la asignación de significado a lo que se comunica en el contexto de cultura. Tenemos que Cristina inicia una respuesta al exponer su generalización aritmética donde la variable es el año de creación de la camiseta y no la posición que ocupa en la secuencia [1]. Cuando Jose solicita una clarificación acerca de la variable, cuya referencia está implícita en la generalización dada [2], Sara y Cristina identifican la variable con el año de la camiseta [3-4]. Entonces Jose explica que la variable *n* indica la posición de la camiseta en la secuencia y no el año de creación [5]. Se observa por tanto la atención simultánea a la identificación de la variable y a la palabra «enésima» del enunciado (ver también [8]). En este punto, la cultura del aula aparece como factor determinante en la comunicación. La petición de clarificación de Jose es clave para que se pongan de manifiesto dos interpretaciones de la variable e informa sobre los modos de hacer. En otras culturas de aula, la exposición de una solución de un problema por parte de una alumna no conlleva la revisión por parte de otros alumnos ya que esta es una actividad que se espera del profesor. Si nos fijamos en los modos de hablar, Jose comunica lo que considera una respuesta adecuada al enunciado en lo que se refiere al contenido matemático (*identificación de la variable*), pero también en lo que se refiere a la expresión literal («enésima»). Esto ocurre después de acordar la relación de dependencia entre año de la camiseta y posición en la secuencia:

6. Jose: Yo lo único que digo es que no te dan el año, te dan el número de camiseta.
7. Maria: Pero con el número de camiseta puedes saber el año.
8. Jose: ¿Y de qué te sirve calcularlo? Tú lo que quieres saber es el número de cuadrados, no el año. El enunciado te da la enésima camiseta.

Deben tenerse en cuenta varios aspectos del contexto de cultura del aula tales como la utilización restringida del registro escrito en los momentos de discusión entre alumnos, que facilitan el soporte y andamiaje de la oralidad de las explicaciones. Por otra parte, el reconocimiento del habla entre alumnos en la cultura del aula repercute con marcas específicas de oralidad en la representación escrita posterior de la solución a la tarea. Pero también ocurre que el enorme valor de la escritura en la escuela (materializada en nuestro ejemplo mediante la ficha en papel con la tarea impresa y el encargo último de cumplimentarla y entregársela al profesor al final de la sesión de clase para ser evaluada) es una influencia fundamental en la validación de modos de hablar. Si consideramos la asociación que se establece entre «enésima» y el significado de «ene» como calificador de camiseta, el uso de la palabra «enésima» es una marca de (re)conocimiento de la lengua especializada de la matemática escolar. No obstante, tiene sentido pensar que el uso de esta palabra es además una marca de escritura (ver enunciado en la Figura 2) y del contexto de cultura. Con esto, ponemos de relieve que nuestro análisis atiende al registro literal y extra-literal, ambos con impacto en la función comunicativa del texto (ver Halliday, 1978, para ejemplos de discursos distintos vinculados a textos literalmente iguales en una variedad de contextos de cultura; y Chico, 2014, para descripciones y articulaciones del contexto de cultura en el análisis de discursos de alumnos).

Veamos todavía otros datos de esta misma sesión de clase. Ahora dos alumnos, que habían trabajado en pareja el problema previamente, presentan y discuten la tercera cuestión de la tarea, sobre la cantidad de triángulos blancos y triángulos grises de una camiseta. Durante la discusión del rango de la variable independiente de la generalización que proponen, hablan de conexiones entre el valor de n y la posición de la camiseta en la secuencia:

9. Jose: Nosotros hemos hecho, suponiendo que ene es el número de camiseta que nos dan, sabemos que ene, el número de camiseta es igual que el número de cuadrados que hay dentro. Porque en la primera camiseta hay un cuadrado, en la segunda hay dos, en la tercera hay tres… Entonces el número de camiseta menos uno, porque como ya se ha dicho hay un cuadrado que no genera triángulos, es el número de cuadrados que generan triángulos. Entonces lo multiplicamos por cuatro, porque cada cuadrado hace cuatro triángulos. Entonces obtienes el número total de triángulos. Si la ene es par, divides el número total entre dos y obtienes el número de triángulos cualesquiera porque hay el mismo número de triángulos blancos que grises. Porque cuando la ene es par hay el mismo número de cuadrados blancos que grises, como le has restado uno, te queda el mismo número de triángulos blancos que grises.
10. Gabriel: No, esto es cuando la ene es impar, no.…sí, sí, cuando ene menos uno es impar.
11. Jose: Sí, es ene menos uno que es impar…
12. Gabriel: Es decir, cuando ene menos uno es impar… Nos hemos equivocado, cuando ene es impar es cuando hay un cuadrado más blanco y es lo que hace que haya el mismo número de triángulos blancos que grises.

13. Jose: Sí, claro. Cuando la ene es impar divides entre dos y te da el número de triángulos de los dos colores.

Generalización algebraica, rango de la variable, iniciar respuesta y compartir explicación son los códigos que agrupados y relacionados con sentido nos ayudan a comprender este discurso de alumno –léase Jose y Gabriel–. En nuestra narrativa, Jose inicia su respuesta hablando de n para indicar la posición de la camiseta en la secuencia. En su búsqueda de la cantidad desconocida de triángulos de cada color, explica la expresión $4(n\text{-}1)/2$ para el caso de n par [9]. A pesar de la confusión entre camisetas pares e impares, se llega a una generalización mediante terminología algebraica y con referencias veladas de apoyo visual ('los cuadrados que hay dentro de una camiseta') en los dibujos para casos particulares del enunciado (Figura 2). Gabriel revisa la explicación y la amplía al distinguir entre números pares e impares. Ninguno de ellos, sin embargo, menciona razones subyacentes a la distinción entre tomar n o $n\text{-}1$, tales como tomar 1 o 0 como valor inicial. Con base en el dibujo de la tercera camiseta, Gabriel [12] y Jose [13] concluyen con turnos que se completan entre ellos. Jose y Gabriel comparten la responsabilidad de comunicar al grupo la solución y los argumentos en el trabajo en pareja, incluida la responsabilidad de haberse equivocado. El contexto de trabajo previo en pareja da sentido a la identificación de actividad matemática compartida, mientras que el contexto de discusión entre alumnos da sentido a las evidencias de generalización algebraica que, solo con atención a los turnos de uno de los alumnos, no podrían inferirse.

Con este ejemplo, pretendemos señalar que el análisis del discurso matemático del alumno ha de tener en cuenta al menos dos dimensiones: el texto oral o escrito y el contexto de cultura, que influye en la realización e interpretación del texto y, más en general, de la práctica. En la siguiente sección, volvemos a plantear la atención a ambas dimensiones con datos del discurso matemático del profesor.

DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Dentro de nuestro programa de experimentos de enseñanza, mantenemos una misma lógica de investigación en los trabajos sobre el discurso matemático del profesor y sobre el del alumno. Bajo una perspectiva social de la actividad humana que sitúa la actividad de comunicar en su contexto de cultura, que es el de interpretación de la lengua en uso (Halliday, 1978, 1993), consideramos que el texto del profesor no basta para estudiar su discurso. El contexto de cultura involucrado en la producción del discurso del profesor proporciona la clave para discernir modos naturalizados de hablar y de hacer matemáticas en clase que se están dando por sabidos en la práctica profesional.

Análogamente a lo explicado en la sección anterior acerca de los métodos, para el análisis del discurso matemático del profesor fabricamos códigos de interacción y de contenido matemático. Los primeros fijan la mirada en la función del discurso de comunicar cultura, mientras que los segundos se utilizan para explorar la función más específica de comunicar matemáticas (Figura 3). A fecha de hoy, estos trabajos están siendo revisados con la incorporación de nuevos indicadores orientados a la búsqueda de relaciones entre discurso del alumno y del profesor. Los indicadores actuales han surgido, por un lado, de buscar de manera reiterada relaciones ente narrativas producidas para alumnos y para profesores y, por otro, de estudiar las contribuciones al estudio del discurso del profesor de matemáticas de Adler y Ronda (2017). A lo largo de los años, se nos ha hecho evidente el uso abundante de ejemplos y de explicaciones en la organización de procesos matemáticos comunicados en la interacción entre discurso de profesor y de alumno. Con la inquietud de realizar un análisis más refinado de la comunicación de estos procesos matemáticos, en Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado (2016), anticipamos indicadores relativos a la selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos y de explicaciones en la práctica profesional del profesor en clase.

Comunicar cultura	
Discurso del profesor en clase	*Comunicar matemáticas* Discurso matemático del profesor de matemáticas en clase de matemáticas

Figura 3. Línea de estudio sobre el discurso del profesor

En el inicio del capítulo escribíamos que la práctica profesional del profesor de matemáticas es en gran medida práctica discursiva, para luego añadir en la sección anterior que dicha práctica discursiva del profesor en clase está fuertemente configurada por la práctica discursiva del alumno. De ahí que el análisis textual situado en el contexto de cultura y aplicado al discurso matemático del profesor en clase implique referencias a la interacción con el discurso del alumno. El cuarto indicador de Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018), adaptación de ejemplos y de explicaciones, supone un avance en el estudio de las relaciones entre discursos del alumno y del profesor.

Análisis textual situado en el contexto de cultura

Para el análisis del discurso matemático del profesor en clase, hemos establecido cuatro indicadores y cuatro niveles por indicador (N0, N1, N2 y N3). Dado un contenido matemático de aprendizaje y una tarea de clase para la enseñanza, los indicadores se desglosan como sigue:

- Selección de ejemplos: N0. Solo variación simultánea de dos o más aspectos, N1. Solo variación de un aspecto con atención a similitud o contraste, N2. Al menos dos variaciones de aspectos distintos con atención a similitud y/o contraste, N3. Variación simultánea de dos o más aspectos con atención a similitud y contraste
- Secuenciación de ejemplos: N0. Sin cadena de complejidad creciente, N1. Cadena de complejidad creciente excepto por ejemplos intermedios, N2. Cadena de complejidad creciente excepto por un ejemplo, N3. Cadena de complejidad creciente sin excepciones
- Explicación de ejemplos: N0. Sin argumentos matemáticos, N1. Con argumentos matemáticos sin conexiones entre ellos, N2. Con argumentos matemáticos y conexiones solo entre algunos, N3. Con argumentos matemáticos conectados entre todos
- Adaptación de ejemplos y de explicaciones: N0. Sin respuestas a preguntas de alumnos, N1. Con respuestas a preguntas de alumnos sin elaboración posterior, N2. Con respuestas a preguntas de alumnos y elaboración posterior de algunas respuestas, N3. Con respuestas a preguntas de alumnos basadas en ejemplos previos o nuevos

A continuación, resumimos resultados del análisis de discursos matemáticos de dos profesoras en dos clases con alumnos de 14 y 15 años durante la resolución de la tarea de la Figura 4. El contenido matemático de aprendizaje que consideramos es el cálculo de probabilidades del suceso 'ganar la partida cuando un jugador tiene *a* puntos y el otro *b*'. De ahí que los ejemplos sean casos particulares de la generalidad 'ganar la partida cuando un jugador tiene *a* puntos y el otro *b*' (para una discusión de la riqueza de este problema, ver Goizueta, Mariotti y Planas, 2014).

> Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3 € y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6 €. Sin embargo, la partida se interrumpe cuando uno ha ganado 7 puntos y el otro 5. ¿Cómo se repartirán el dinero?

Figura 4. Enunciado de la tarea en Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018)

Adaptación del discurso matemático de la profesora P1 a discursos de alumnos

En una de las clases, tras una propuesta de reparto proporcional, la profesora (P1) utiliza cuatro ejemplos: el primero es un caso extremo (a = 7, b = 0), el segundo es el dado en el enunciado de la tarea (a = 7, b = 5) y los dos últimos (a = 1, b = 0; a = 2, b = 0) surgen en interacción con el discurso de una alumna (A1). Se observa por tanto una primera cadena de ejemplos de complejidad monótona creciente con a = 7, que se interseca con otra cadena de ejemplos para b = 0 que tampoco se mantiene.

P1: Ahora imaginad que la partida se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro todavía ningún punto. ¿Cómo se reparten el dinero si ocurre esto? Según vuestro grupo, hay que repartir los seis euros entre... ahora no son doce tiradas con siete y cinco puntos, ahora son siete tiradas. Pues... [en la pizarra, 7/7·6=6, 0/7·6=0], aplico lo que me habéis dicho y va a pasar que uno se queda con los seis euros y el otro con nada.

A1: Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto y el otro casi ha ganado.

P1: O sea que vuestra manera os sigue pareciendo que funciona. ¿Y si la partida se interrumpe cuando uno ha ganado un punto y el otro está aún con cero puntos? ¿Entonces? Ahora no son ni doce ni siete tiradas... [en la pizarra, 1/1·6=6, 0/1·6=0]. Otra vez hay un jugador que se lleva todo el dinero, pero ahora ni siquiera estaba en la recta final para ganar.

A1: Ya, mala suerte. Solo han tirado una vez.

P1: Pero esto puede ocurrir, se puede interrumpir así de pronto. Incluso si solo da tiempo a dos tiradas y uno saca dos puntos, entonces hacemos lo mismo y... [en la pizarra 2/2·6=6, 0/2·6=0], un chico se lo va a volver a llevar todo, con solo dos puntos. ¡Solo ha conseguido dos puntos y los seis euros para él!

A raíz de los discursos de dos alumnos (A1 y A2), sigue un discurso de la profesora que alude a las posibilidades totales y favorables de ganar de cada jugador. De las explicaciones, inferimos los siguientes argumentos: todos los ejemplos se resuelven con un mismo razonamiento; el razonamiento de reparto proporcional no es válido; el razonamiento debe contemplar lo que falta por ganar; el cálculo de posibilidades totales de ganar es relevante; el cálculo de posibilidades favorables deriva del cálculo de posibilidades totales. Los tres primeros argumentos se complementan, mientras que los dos últimos se subordinan. Por otra parte, no se conectan ambas cadenas de argumentos ni se relacionan los puntos que faltan por ganar con cálculos de posibilidades ni con el de probabilidades.

P1: El mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable. Pero seis euros para uno y nada para el otro, cuando apenas había empezado la partida, no sé, no veo que el mismo modo de proceder convenza por igual. Se saquen los puntos que se saquen y se interrumpa la partida cuando se interrumpa, deberíamos llegar a repartir el dinero siempre convencidos. ¿Qué se nos puede estar escapando? A lo mejor ni siquiera los dos coma cinco euros y los tres coma cinco deberían convencernos porque el modo de proceder luego nos lleva a seis y cero. Siempre debería funcionar.

A2: Pero... ¿cómo?

P1: ¿Alguien ha tenido en cuenta cuántos puntos les faltan para ganar la partida cuando uno lleva siete puntos y el otro cinco? ¿Y cuando uno de los chicos lleva un punto y el otro lleva cero puntos? Entonces, ¿cuántos puntos le faltan a cada uno para ganar? El chico que tiene solo uno y al que le queríais dar los seis euros solo le lleva un punto de ventaja al chico que no tiene ningún punto, ese que queríais dejar sin nada de dinero. Tenemos que conseguir verlo de otro modo para que funcione. ¿Por qué decidimos los euros con los puntos que tienen? ¿Por qué no estamos viendo los puntos que les faltan?

A1: Cuando solo le falta un punto por ganar, podemos verlo en negativo porque todavía se puede perder.

P1: Vamos a volver a pensar qué se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro ninguno. Al chico que le falta un punto por ganar, ¿cuántas posibilidades tiene de ganar? ¿Qué puede pasar? De todo lo que puede pasar, ¿qué le va bien a este chico?

Con respecto a la adaptación de ejemplos y de explicaciones, el discurso de la profesora responde a comentarios de una alumna hasta en tres ocasiones. Dos ejemplos tienen el efecto de refutar comentarios de A1, de inmediato y cuando la aproximación de esta alumna al problema se retoma. No obstante, la pregunta de A2 acerca de cómo proceder en la resolución no se responde ni se retoma más adelante. Sí hay indicios de que la respuesta a la alumna se comunica en el contexto de cultura donde supuestamente hay un significado para 'modos que sean bastante razonables' («El mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable»). En síntesis, los niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación dan cuenta de una variación por contraste seguida de dos variaciones por similitud (N2), de una cadena de complejidad creciente con dos ejemplos que se separan de dicha cadena (N1), de argumentos matemáticos orientados a refutar las soluciones dentro del modelo proporcional y avanzar hacia el cálculo de posibilidades totales y favorables de ganar sin establecer conexiones entre ellos (N1) y, por último, de la influencia de discursos de alumnos (N2). No se observan argumentos sobre el cálculo de probabilidades que apoyen la conexión entre cálculo de posibilidades y cálculo de probabilidades. Esta conexión se comunica al escribir en la pizarra la fórmula laplaciana acompañada del comentario «Esto es lo que tenéis que recordar». No hay, por tanto, comparación de sucesos mediante el cálculo combinatorio de posibilidades favorables y desfavorables para dos ejemplos. De ahí que se concluya que el discurso matemático de la profesora no enlaza los ejemplos con la comparación de probabilidades y su cálculo.

El análisis del cuarto indicador sugiere relaciones entre discursos. Dadas las evidencias de comprensión mejorada de la tarea y de aproximación al cálculo de probabilidades (con un cambio de razonamiento determinista a especulativo), puede decirse que, por un lado, el discurso de la profesora proporciona la oportunidad de explorar la tarea desde la perspectiva de las posibilidades de ganar de cada jugador y, por otro lado, el discurso de la alumna proporciona la oportunidad de explicar argumentos introducidos en la puesta en común. Más en general, no obstante, consideramos que una mayor exposición del discurso de la profesora a discursos de alumnos hubiera permitido mejorar la comunicación de los procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea.

Adaptación del discurso matemático de la profesora P2 a discursos de alumnos

Al igual que en el ejemplo anterior y dado el interés del capítulo por mostrar relaciones entre la práctica profesional del profesor de matemáticas en clase y el discurso del alumno, presentamos resultados de los cuatro indicadores mencionados con énfasis en el último. En la clase con la profesora P2, vemos la comunicación de cuatro ejemplos: $a = 7$, $b = 5$; $a = 7$, $b = 6$; $a = 7$, $b = 7$; $a = 3$, $b = 4$. Excepto por el último, se observa una cadena monótona de complejidad creciente al variar los valores de b, relacionados estos aspectos con la selección (N3) y secuenciación de ejemplos (N2). Hay además dos argumentos concatenados que involucran a todos los ejemplos: los ejemplos son matemáticamente resolubles; la situación de incertidumbre no es un obstáculo a la resolución.

P2: Este problema histórico se puede proponer de muchas maneras. Como os lo doy: un jugador que ha llegado a siete puntos y otro que está con cinco. Pero también podría haber dicho que un jugador ha llegado a siete puntos y el otro está con seis, o que los dos jugadores están con siete puntos cuando se interrumpe la partida... Si queréis pues que ninguno esté a solo un punto, que uno tenga tres y el otro cuatro. En todos los casos se soluciona matemáticamente sin saber qué hubiera pasado de verdad si la partida hubiera continuado hasta el final (…)

A3: Si no sabemos lo que va a pasar realmente, pues no se puede solucionar. O hay muchas soluciones...

A4: Sí, porque lo que va a pasar puede ser o esto, o aquello, o aquello otro...

P2: De acuerdo, no sabemos lo que va a pasar realmente, pero sabemos lo que seguro que no va a pasar en la tirada trece. No puede pasar que el jugador que tiene cinco puntos ya gané la partida.

A4: Pero el jugador que tiene siete puntos ya podría ganar si le sale cara.

P2: Pues eso, también podemos hablar seguro de lo contrario, de todo lo que puede pasar.

A4: Me he hecho un lío... ¿cuántos puntos tiene el otro?

P2: Los dos tienen siete. Aciertas seguro si dices todo lo que puede pasar.

A4: Se acaba la partida en la tirada que viene porque o gana uno o gana el otro.

A3: La mitad del dinero para cada uno. Hacemos el otro, que no es tan fácil.

P2: Vamos poco a poco. Si ahora un jugador tiene siete puntos y el otro tiene seis, acierto si digo que puede pasar todo esto... [en la pizarra, dibujo de bifurcaciones].

A4: O se acaba en seguida porque el de siete saca un punto más, o quedan empatados en la tirada trece y luego estamos como antes, o gana uno o el otro.

P2: Vamos a ver, de aquí salen dos opciones, ocho y seis o siete y siete, y de aquí salen otras dos, ocho y siete o siete y ocho [dibujo de bifurcaciones]. Acierto seguro si digo que pasará realmente una de estas tres opciones. Al jugador con siete puntos, le encantan dos de estas tres opciones, y al que tenía seis puntos solo le encanta una de estas tres. ¿Sí? No sabemos lo que va a pasar, pero sabemos seguro todo lo que puede pasar y de todo esto sabemos seguro lo que le va bien a cada uno. De ahí sale una relación de dos tercios y un tercio. El segundo podría ganar, pero solo le va bien una de tres [escritura de 1/3]. ¿Sí? Al otro le van bien dos de tres [escritura de 2/3]. Es más, dos tercios que un tercio. Entonces es más probable que gane el primero. Sin saber qué pasará de verdad, hemos conseguido resolverlo matemáticamente.

Cuando dos alumnos (A3 y A4) solicitan ayuda, se produce una cadena de explicaciones con argumentos conectados: lo no posible es predecible con certeza; todo lo posible es predecible con certeza; todo lo posible y favorable es predecible con certeza; la relación entre posible y favorable es relevante; la comparación de esta relación es comparación de probabilidades. A pesar de que son argumentos válidos, notamos que para el ejemplo $a = 7$ y $b = 6$ se indica que hay tres posibilidades de desarrollo del juego que son equiprobables. Esto pasa inadvertido en este momento, pero al quedar escritas las probabilidades equivocadas en la pizarra

(2/3 y 1/3), el error se detecta y modifica poco más tarde. Con respecto a la adaptación de ejemplos y de explicaciones, el discurso de P2 incorpora apreciaciones que precisan cuestiones introducidas por discursos de A3 y de A4 (N3). Cuando se menciona el hecho de que no se puede predecir con certeza lo que va a pasar en las tiradas siguientes, desde el discurso de P2 se sigue con esta consideración, lo cual lleva a elaborar un argumento acerca de la posibilidad de predecir con certeza lo que no va a pasar. Por otro lado, cuando se comunica la posibilidad de ganar para el caso del jugador de un ejemplo, de nuevo se da continuidad y amplía esta consideración mediante un argumento acerca de la posibilidad de predecir con certeza todo lo que puede pasar. La relación entre discursos, con afirmaciones seguidas de argumentos, se mantiene habiendo también respuesta directa a una pregunta en el discurso de A4. Todo esto permite concluir sobre una elevada adaptación del discurso de la profesora, que debe sin embargo matizarse con la comunicación transparente de significados adecuados para el término «matemáticamente».

En el análisis del discurso matemático de esta profesora vemos un doble impacto: el producido en el propio discurso de la profesora durante la adaptación a discursos de alumnos y el producido en los discursos matemáticos de alumnos. Encontramos evidencias de cambio de comprensión de la tarea en los discursos de A3 y A4, que han sido influyentes en la elaboración de argumentos acerca de la noción de probabilidad. En el discurso de A3 se produce un cambio de considerarse la tarea irresoluble o bien con múltiples soluciones a comunicarse una solución para un ejemplo. Inferimos que los discursos de P2 y de A4 facilitan que se considere esta solución. Vemos una situación similar cuando se pasa de sugerir la multiplicidad de soluciones a mencionar las posibilidades de ganar con un razonamiento combinatorio aplicado a un ejemplo. El impacto del discurso de P2 en discursos de alumnos sugiere que la exploración del ejemplo $a = 7$ y $b = 7$ genera oportunidades de aprendizaje relevantes en la comprensión del cálculo de probabilidades. El impacto hubiera sido mayor, no obstante, si en las explicaciones finales se hubieran retomado los ejemplos a los cuales se ha dedicado tiempo en la presentación de la tarea o si se hubiera revisado su papel cuando se comunica que no se ha clarificado con qué ejemplo se va a trabajar. No se observan, por tanto, conexiones matemáticas entre todos los elementos (N2), ni tampoco parece sistemática la utilización de ejemplos. Como en el ejemplo anterior, volvemos a conjeturar que una mayor exposición a discursos de alumnos, hubiera podido mejorar el establecimiento de conexiones entre argumentos en el discurso de la profesora.

DISCURSO DEL AULA DE MATEMÁTICAS

Para la discusión de la práctica profesional del profesor de matemáticas, hemos reflexionado acerca de la práctica discursiva de este profesor en relación con el discurso del alumno en clase. Además, hemos resumido nuestra propuesta de análisis textual del discurso, del profesor y del alumno, situándolo en el contexto específico de cultura donde se produce. Este es el punto de partida de nuestra aproximación al discurso del aula de matemáticas. Tanto el discurso matemático del profesor como el del alumno en clase se desarrollan en la medida que son contestaciones a los discursos con los que interactúan; en este escenario de interacción, emerge la coordinación de textos y significados del aula de matemáticas. En particular, el discurso hablado del aula, tiene forma de conversación donde el cambio de actor es recurrente, el orden y la duración de discursos específicos no están unívocamente establecidos y el contenido de lo que se comunica se puede anticipar, pero no determinar.

La Figura 5 representa el discurso del aula de matemáticas en su actividad de comunicar matemáticas y la más general de comunicar cultura, esto es, modos de hablar y de hacer (matemáticas en el aula, en pareja y en grupo, en la escuela, en el sistema escolar con tecnología digital…) que se han ido construyendo como adecuados en el contexto y que a menudo son objeto paciente en el texto visible. Cuando un profesor dice a un alumno que «el triángulo está en lápiz», puede estar pidiendo que se dibuje con bolígrafo, lo cual ni el alumno ni el investigador pueden deducir solo a partir del texto. El contexto de cultura fija el significado. Cuando un profesor dice de un problema que se debe «resolver matemáticamente», la interpretación del calificador tiene que ver con los significados para hablar y hacer matemáticas fabricados en el contexto. En Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018), se ilustran discursos de profesor donde los modos de hablar y de hacer en la resolución de un problema de probabilidad se vinculan con un supuesto quehacer de la matemática escolar («En todos los casos se soluciona matemáticamente», p. 53; «Hemos conseguido resolverlo matemáticamente», p. 54) sin que dichos modos se comuniquen en el texto literal. También en Arnal-Bailera y Planas (2013) puede leerse sobre la comunicación transparente de los modos de utilizar la pizarra digital interactiva junto a programas de geometría dinámica en la resolución de problemas de matemáticas. El contexto de cultura se hace notar en la actividad matemática pero no se habla, ni se explica o prepara mediante textos ofrecidos en clase porque no se piensa como objeto de enseñanza.

Comunicar cultura	
Discurso del aula	*Comunicar matemáticas* Discurso matemático del aula de matemáticas

Figura 5. Línea de estudio sobre el discurso del aula

Dada la centralidad del contexto de cultura en la coordinación del discurso del alumno, del profesor y del aula de matemáticas, encaminamos estas últimas líneas a la necesidad de estudiar más a fondo aspectos de la cultura del aula. Cabe profundizar en aspectos que se acostumbran a manifestar de manera transparente –como objeto paciente de la comunicación– en la práctica profesional discursiva del profesor. Hace más de dos décadas, Yackel y Cobb (1996) se refirieron a: «las regularidades en la actividad comunitaria o colectiva del aula que pueden considerarse conjuntamente establecidas por profesor y alumnos como miembros de la comunidad del aula» [nuestra traducción del inglés] (p. 178). Nombraron normas sociomatemáticas a las regularidades particulares de la actividad matemática (e.g., qué cuenta como explicación en clase de matemáticas, como ejemplo de un objeto matemático, como demostración matemática) y alertaron sobre la escasa atención a su enseñanza en la práctica profesional, a pesar de la obligación exigida al alumno de reconocerlas, aprenderlas y utilizarlas. Una función de la práctica del profesor de matemáticas en su enseñanza es comunicar proposiciones declarativas (e.g., cuántos vértices tiene un cuadrilátero, cuáles son las ternas pitagóricas), pero también rutinas y obligaciones, que no son socialmente neutras, ni didácticamente adecuadas *per se*, sino fruto de la constitución naturalizada de modos de hablar y de hacer matemáticas en la escuela. Precisamente uno de nuestros aprendizajes ha sido descubrir discursos matemáticos de alumnos que retan y enriquecen el discurso del profesor con preguntas sobre contenidos que se empiezan considerando en el grupo próximo de alumnos y que incorporan dudas razonadas sobre cuáles son los modos adecuados de hablar y de hacer matemáticas en clase. En Civil y Planas (2004) relatamos situaciones donde los alumnos decidían sobre la adecuación de ciertos modos en función de quién era el alumno que los había introducido. Ya sea en el análisis de la adaptación a discursos de alumno o en el del discurso en interacción entre alumnos, la propuesta de estudiar el texto debe incorporar reflexiones acerca de lo que tiene significado y valor en el contexto. Estas reflexiones permiten concluir sobre la construcción conjunta de una generalización algebraica en la actividad de Jose y Gabriel, o bien sobre la existencia velada de significados para 'matemáticamente' en la comprensión del cálculo de probabilidades en el aula de P2.

Desde un punto de vista didáctico, el problema de la transparencia de las normas del aula está asociado a la concepción y al desarrollo de la práctica profesional del profesor de matemáticas. Si bien las normas sociomatemáticas se hacen notar en la enseñanza y son objeto de aprendizaje y evaluación, no se acostumbran a enseñar porque se suponen sabidas, compartidas y estandarizadas. Así, se espera del alumno que hable y escriba las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas sin que haya habido una práctica profesional del profesor deliberada y sostenida en el tiempo al respecto. Se entra en un círculo complicado que dificulta suponer lo que haría el profesor de matemáticas. Como quiera que comunicar cultura y comunicar matemáticas no se pueden separar más que artificialmente, conviene formar al profesor en una interpretación amplia del contenido matemático que tiene que enseñar. Esto es, formarle en la producción, distribución y consumo de normas sociomatemáticas mediante la incorporación de textos visibles en el discurso del aula. Lo que en particular significa que, en lugar de darse por sentadas, las normas deben justificarse reflexivamente en relación con otras opciones de hablar y de hacer alternativas. Esto nos lleva finalmente a la cuestión del desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Una consecuencia de la necesidad de explicar y justificar reflexivamente las normas es la demanda al profesor de sofisticadas habilidades dialógicas de adaptación y atención al discurso del alumno.

En varios de los proyectos en los que hemos participado, el discurso del profesor de matemáticas en clase ha sido investigado como objeto cualitativo de desarrollo profesional. En los capítulos de Hunter, Civil, Herbel-Eisenmann, Planas y Wagner (2018), se reconoce de manera recurrente el contexto de cultura y su influencia en la práctica profesional de aula. Ahí se relatan iniciativas –algunas basadas en experimentos de enseñanza– de deconstrucción de culturas del aula de matemáticas que relegaban sistemáticamente y de manera transparente ciertos modos de hablar y de hacer y, con ello, reducían la distribución equitativa de oportunidades de participación, entre alumnos y entre alumnos y profesor. Varios de los capítulos de ese volumen están escritos por equipos de investigadores universitarios y profesores de aula, que explican sus experiencias de desarrollo profesional en colaboración y de transformación de culturas de aula mediante la mejora de las habilidades dialógicas del profesor de matemáticas en su comunicación con los alumnos. También el caso de Brayan, en Arnal-Bailera y Planas (2013), es ilustrativo de una experiencia de enseñanza orientada a la deconstrucción de modos de hacer y de hablar matemáticas que excluían la participación de modos ajenos al capital social y cultural privilegiado por la institución escolar. En todos estos estudios, la 'adaptación de ejemplos y de explicaciones' es un indicador útil para identificar y evaluar la construcción compartida del discurso matemático del profesor y sus efectos.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el marco colaborativo de los Proyectos EDU2016-81994-REDT y EDU2015-65378-P, MINECO-Espana / FEDER-Europa, y con el apoyo del Grupo GIPEAM, SGR2017-101, AGAUR-Catalunya.

REFERENCIAS

Adler, J. y Ronda, E. (2017). Mathematical Discourse in Instruction matters. En J. Adler y A. Sfard (Eds.), *Research for educational change. Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 64-81). Londres, Reino Unido: Routledge.

Arnal-Bailera, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de geometría con grupos de riesgo: Un enfoque discursivo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Actas del XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

Austin, J. L. y Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 161-917.

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays* (Ed., M. Holquist; Trad., C. Emerson y M. Holquist). Austin, Estados Unidos: University of Texas Press.

Boukafri, K. y Planas, N. (2018). Métodos para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase. En L. J. Rodríguez, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, A. Bruno y F. J. García (Eds.), *Actas del XXIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 171-180). Gijón: SEIEM.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. Trabajo de tesis doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 31-47.

Chico, J. y Planas, N. (2018). Producción de la lengua de las matemáticas en clase durante la interacción en grupo. En L. J. Rodríguez, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, A. Bruno y F. J. García (Eds.), *Actas del XXIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 201-210). Gijón: SEIEM.

Chico, J., Planas, N., Morera, L. y Fortuny, J. M. (2014). Mathematical practices inside the classroom: An episode of cooperative interaction in pair work. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 22*(1), 403-407 (Actas 63 CIEAEM).

Civil, M. y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 7-12.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Zhao, Q. y Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences, 18*(2), 165-199.

Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32*, 385-405.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N. y Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Actas del XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 297-305). Salamanca: SEIEM.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En J. A. Macías y otros (Eds.), *Actas del XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 253-263). Málaga: SEIEM.

Gavilán, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en matemáticas: Estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 529-550.

Goizueta, M., Mariotti, M. A. y Planas, N. (2014). Validating in the mathematics classroom. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 3, pp. 169-176). Vancouver, Canadá: PME.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Londres, Reino Unido: Edward Arnold.

Halliday, M. A. K. (1993). Towards a language-based theory of learning. *Linguistics and Education, 5*(2), 93-116.

Hunter, R., Civil, M., Herbel-Eisenmann, B., Planas, N. y Wagner, D. (Eds.) (2018). *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalised learners*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos de línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1506-1517). Antalya, Turquía: ERME.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: Reflexiones y datos bibliométricos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Planas, N. (2017). Aprendizaje matemático multilingüe: Qué se sabe y desde qué teorías. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Actas del XXI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 91-105). Zaragoza: SEIEM.

Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N. y Civil, M. (2010). Discourse processes in critical mathematics education. En H. Alrø, O. Ravn y P. Valero (Eds.), *Critical mathematics education: Past, present and future. Festschrift for Ole Skovsmose* (pp. 45-59). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor. Ejemplos, explicaciones y coherencia local. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Hernández y otros (Eds.), *Actas del XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Londres, Reino Unido: Routledge.

Planas, N. y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En Á. Gutiérrez, G. H. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 447-479). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers (Brill).

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA PROFESIONAL DE UN PROFESOR CUANDO EXPLICA CONTENIDOS DE MEDIDA

ANALYSIS OF THE PROFESSIONAL PRACTICE OF A TEACHER WHEN EXPLAINING MEASUREMENT CONTENTS

Vanegas, Y.[1], Font, V.[2] Pino-Fan, L.[3]

[1, 2] *Universidad de Barcelona,* [3] *Universidad de Los Lagos*

RESUMEN

El interés por investigar la práctica del profesor ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis de la interacción y práctica educativa en el aula. En este capítulo, se analiza la práctica profesional de un profesor en una clase de matemáticas en la que se aborda la medida de longitud con alumnos de 12-13 años. Se usan las herramientas de análisis didáctico propuestas desde el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), las cuales se basan en constructos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, para realizar una radiografía que ilustra la estructura y funcionamiento de la clase.

Palabras clave: *práctica del profesor, análisis didáctico, medida de longitud.*

ABSTRACT

The interest to investigate the practice of the teacher has led to the development of models for the analysis of the interaction and educational practice in the classroom. In this

Vanegas, Y., Font, V., Pino-Fan, L. (2019). Análisis de la practica profesional de un profesor cuando explica contenidos de medida. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 43-62). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

chapter, we analyze the professional practice of a teacher in a mathematics class in which the measure of length is studied with 12-13-year-old students. We used the didactic analysis tools proposed by the Didactic-Mathematical Knowledge and Competence Model, which are based on constructs of the Ontosemiótic Approach of Cognition and Mathematical Instruction (OSA), to carry out a radiograph for illustrating the structure and performance of the class.

Keywords: *teacher's practice, didactic analysis, length measurement***.**

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el profesor ha evolucionado desde perspectivas más cognitivas en las que se estudia el pensamiento del profesor (Leinhardt y Greeno, 1986; Shulman, 1986; Simon y Tzur, 1999), hasta perspectivas más antropológicas y socioculturales en las que se estudia el conocimiento y práctica profesional del profesor (Gavilán, García y Llinares, 2007; Lerman, 2001; Ramos y Font, 2008; Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat y Perrot, 2005). El interés por investigar la práctica del profesor ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula (Coll y Sánchez, 2008), dichos modelos han desarrollado herramientas y métodos de investigación que ofrecen amplias perspectivas para afrontar este objetivo (Gellert, Becerra, y Chapman, 2013). Algunos ejemplos claros de estos enfoques son: *Lesson Study* (Fernández y Yoshida, 2004), *Mirar con sentido profesional* (Fortuny y Rodríguez, 2012; Llinares, 2012; Mason, 2002), *The Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005), *Concept Study* (Davis, 2008); en estos se trata de promover la reflexión del profesor sobre la acción, de manera individual o en interacción con sus pares, identificando factores claves que afectan los procesos de instrucción y así, tomar decisiones basadas en tales reflexiones. Entre estas propuestas encontramos el modelo de análisis didáctico formulado por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS a partir de ahora) (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013; Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Contreras y Font, 2006; Mateus, 2016; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016), que ha desarrollado herramientas de análisis específicas que ayudan a realizar tres tareas básicas del trabajo docente: descripción, explicación y valoración de la práctica de enseñanza y de aprendizaje. En este modelo se entiende la práctica del profesor de matemáticas, sobre todo, como «una práctica» que posibilita que los alumnos realicen prácticas matemáticas.

Después de esta introducción, en las siguientes secciones se presenta un resumen de las herramientas generadas en el marco del EOS para el análisis de la práctica del profesor y se comenta su uso en la formación de profesores. A continuación, se presenta el contexto donde tuvo lugar la práctica del profesor que será analizada con dichas herramientas. Seguidamente se muestra el uso de estas herramientas en el análisis de un episodio de la clase. Por último, se presentan unas reflexiones finales sobre las implicaciones de esta investigación para el formador de profesores de matemáticas.

HERRAMIENTAS PARA EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA. UNA PROPUESTA DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

A continuación, se presenta una síntesis del modelo Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM) y del modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS, que sirve en este caso de fundamento para realizar el análisis del episodio.

El Modelo CCDM

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas. Tal como afirman autores como Pino-Fan, Assis y Castro (2015) y Pino-Fan, Godino y Font (2018), una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Por otra parte, también en el marco del EOS, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Breda, Font, Lima y Pereira, 2018; Ferreres y Vanegas, 2015; Font, 2011; Giménez, Font y Vanegas, 2013; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Pochulu et al., 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016), las cuales también han puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias. En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, cuyo núcleo fundamental (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Font, 2011; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) consiste en: *Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de idoneidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora*.

En diferentes investigaciones y contextos de formación, se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias de este modelo y aprendan los conocimientos que se contemplan en él (Rubio, 2012; Pochulu et al., 2016; Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes los tipos de análisis didáctico que se contemplan en el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS. Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y, 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo de análisis emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo.

Modelo de Análisis Didáctico propuesto por el EOS

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Contreras, García y Font, 2012; Font et al., 2010; Pino-Fan, Assis y Godino, 2015; Pochulu y Font, 2011) considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción: 1) Identificación de prácticas matemáticas; 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; 4) Identificación del sistema de normas y metanormas; y, 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer tipo de análisis explora las prácticas matemáticas hechas en un proceso de instrucción matemático. El segundo tipo de análisis se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. El tercer tipo de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas; las configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas. El cuarto tipo de análisis estudia dicha trama.

Los cuatro primeros tipos de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto se centra en la valoración de la idoneidad didáctica. Este último tipo se basa en los cuatro análisis previos y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

El modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS integra aspectos del llamado enfoque epistemológico y de las teorías socioculturales. Por una parte, el análisis de las prácticas, objetos y procesos matemáticos permite describir las matemáticas del proceso de instrucción analizado. Mientras que el análisis de las interacciones y de la dimensión normativa permite describir la interacción producida en el proceso de instrucción y las normas que la regulan. Por último, los criterios de idoneidad implican la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, y la justificación del cambio, entre otros aspectos.

El desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica permite a los profesores realizar estos tipos de análisis didáctico y, a su vez, los dispositivos de formación para la enseñanza y aprendizaje de estos tipos de análisis didáctico contribuyen al desarrollo de dicha competencia y a la adquisición de los conocimientos del profesor contemplados en el modelo CCDM (Pino-Fan, Godino y Font, 2018, Rubio, 2012; Seckel, 2016).

A continuación, se presenta parte del análisis de una clase con el que se pretende mostrar algunos de los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo propuesto por el EOS (Font et al., 2010; Font y Rubio, 2014; Pino-Fan et al., 2015). En particular, se presenta la primera fase, que consiste en el análisis experto de los cuatro primeros tipos de análisis de dicho modelo de una clase sobre contenidos de medida.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA CLASE ANALIZADA

La clase que será objeto de nuestro análisis tiene una duración aproximada de 50 minutos, se desarrolla en el primer año de educación secundaria de un Instituto, con 25 alumnos de 12 y 13 años. El instituto está ubicado en la población de Vilassar de Mar, provincia de Barcelona, y es de carácter público.

La clase forma parte de una secuencia de sesiones orientadas al estudio de la noción de medida de longitud. Con esta secuencia el profesor tiene como intencionalidad que se relacione la noción de medir inicialmente con la idea de comparar, buscando con esto alejar a los alumnos de la concepción usual de que medir es calcular. Las primeras actividades de la secuencia se centran en la identificación de unidades arbitrarias tradicionales no decimales asociadas al cuerpo humano (palmos, codos, brazadas, etc.) y en el cambio de unidades. Las actividades siguientes se refieren al deseo europeo de llegar a una unidad de medida común para todos y, finalmente, a cómo se llegó a determinar la medida del metro. Se plantean actividades en las que se pretende que los alumnos reconozcan la inconveniencia del uso de instrumentos de medida con diferentes unidades de medida. Se contextualiza la situación con el contexto histórico que dio lugar a la creación del metro.

Para el análisis de la clase hemos subdividido el registro en nueve episodios que denominamos configuraciones didácticas (Godino et al., 2006), de acuerdo con los planteamientos del EOS. Cada una de las configuraciones didácticas (CD) muestra las interacciones en torno a una situación problema y finaliza cuando inicia otra. Aunque el criterio básico para determinar una CD es la realización de una tarea, tal y como lo plantean Font, Bolite y Acevedo (2010), la agrupación de las líneas de transcripción es flexible y queda a criterio del investigador.

Episodio 1: se hace una introducción del uso de medidas convencionales de tipo local. Se toma el ejemplo de la cana, enunciando datos numéricos que indican el tamaño de cada una y se enfatiza la diferencia de éstos dependiendo del lugar en el que eran usadas.

Episodio 2: se centra en la ubicación de la problemática de la diversidad de unidades de medida en el contexto social, las implicaciones que tenía y la necesidad de una unidad convencional universal.

Episodio 3: está orientado a realizar cambios de una medida dada en una unidad convencional de tipo local a metros.

Episodio 4: está centrado en la realización de comparaciones entre medidas, mediante comparaciones numéricas con la misma unidad.

Episodio 5: se centra en el planteamiento de un problema de comparación de medidas con unidades diferentes.

Episodio 6: se centra en la discusión y argumentación sobre el proceso de conmensurabilidad, que surge como respuesta al problema abordado en el episodio anterior.

Episodio 7: se busca resaltar la propuesta de representación y comparación del metro y la cana que ha realizado una estudiante en el desarrollo del problema del episodio 5.

Episodio 8: se valida el proceso de conmensurabilidad de medidas propuesto por un estudiante, para comparar medidas con unidades diferentes.

Episodio 9: se reconstruye el procedimiento multiplicativo de cambio de unidad en otro contexto (paso de leguas a metros, usando como referencia la relación de leguas a canas y de canas a metros).

A partir de la transcripción completa de la clase, se observa que el profesor en su implementación pretende que los alumnos reconozcan: a) el valor de la unidad de medida universal por la necesidad de lo convencional; b) la no arbitrariedad de una unidad de medida acordada. En los distintos episodios se reconocen los contenidos siguientes: a) identificar los dos componentes de una medida: la unidad y el número asociado al número de veces que se encuentra la unidad (en los episodios 1, 2, 3 y 4); b) usar comparaciones entre medidas de la misma especie (misma unidad y unidades diferentes, en los episodios 4, 5, 6) y, c) establecimiento de una relación multiplicativa asociada al cambio de medidas con unidades diferentes (episodios 5, 6 y 7).

ANÁLISIS DEL EPISODIO 1

Al inicio de la clase el profesor evoca el recuerdo de la clase anterior en la que se reconocieron tipos de unidades no convencionales para la medida de longitud que se usaban en Catalunya en los siglos XVI-XVIII. Se había hablado de un patrón llamado cana, al que se le asignaba un valor diferente dependiendo de la población. Remarca los inconvenientes de la ausencia de la medida común. En el episodio 1 (transcripción que se muestra a continuación) se hace una introducción al contenido del uso de medidas convencionales de tipo local. Se toma el ejemplo de la cana como medida que se materializa mediante datos numéricos diferentes (dependiendo del lugar), y se muestra posteriormente el inconveniente que generó dicha diversidad de medidas y la necesidad de construir una unidad de medida de longitud universal: el metro.

1	P:	Antes que nada, voy a daros unos datos para poder hacer el problema. ¿Estáis preparados?
2	P:	La Cana de Montpeller (Montpeller es una población del sur de Francia actualmente, que los franceses llaman Montpellier, en catalán la llamamos Montpeller), medía:
3	P:	Atención al número, todos a la vez
4	P:	Uno coma nueve, ocho, siete, nueve metros
5	P:	Uno coma nueve, ocho, siete, nueve metros
6	A1:	¿Y qué?
7	P:	Y que nada
8	A2:	¿Uno cómo? …
9	P:	Todos a la vez
10	A3:	¿Cómo?
11	P:	Por lo tanto, fijaros que la cana de Montpeller es uno coma nueve. Quiere decir que casi… ¿Casi qué?
12	A	Dos metros
13	P:	¡Casi dos metros!
14	P:	Era una cana muy larga. Una cana más o menos así… Sabéis que dos metros sería, más o menos, la altura de una persona con la mano levantada. O si queréis la altura de un jugador de baloncesto
15	P:	Unos dos metros
16	P:	La cana del Baix Camp (sabéis que es una comarca de Catalunya). La cana del Baix Camp hacía (todos juntos) uno coma cinco, cinco, cinco metros. Uno coma cinco, cinco, cinco metros.
17	P:	Atención, fijaros que uno coma cinco
18	A5:	Más que un metro
19	A1:	Mucho más pequeño
20	P:	Mucho más pequeño
21	P:	La diferencia era muy grande. No era una diferencia pequeña. La diferencia es de trozos enormes
22	P:	Esta cana se usaba también en Barcelona
23	A:	Hablan varios alumnos simultáneamente
24	P:	Esta cana se usaba en Barcelona y en el Maresme, pero no en Arenys. … pero no Arenys. Donde su cana era …
25	P:	Donde su cana era de … y ahora todos juntos
		Uno coma cinco, seis, cuatro, metros
26	A:	Murmullos
27	P:	Uno coma cinco, seis, cuatro, metros
28	A10	¿Cinco, seis, cuatro?
29	P:	Metros

30	P:	Si os fijáis en el Mareseme se utilizaba la misma cana, pero no en Arenys que es una población del Maresme, incluso estando en la misma comarca.
31	P:	Fijaros hasta qué punto el enredijo era enorme
32	P:	Si un comerciante de Arenys con uno de Mataró tenían canas diferentes con uno de Blanes
33	A4:	Pero ¿si lo hubieran medido con palmos? ¿Por qué no…?
34	P:	Porque los palmos no son iguales. Tú sabes que los palmos, ya lo habéis probado con los pasos.
35	A7:	Aquel señor… (no se entiende lo que sigue en el vídeo)
36	P:	Este es el acuerdo al que no habían llegado hasta entonces. Es lo que la revolución francesa propone. Los revolucionarios franceses proponen que se termine con ese enredo de canas diferentes y que hay que unificar todas las medidas en una sola

Identificación de las prácticas matemáticas

En este nivel se pretende identificar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción. El profesor es quien realiza mayoritariamente las prácticas matemáticas de este episodio dado que está contextualizando la problemática de la sesión. Los alumnos, a petición del docente, realizan pequeñas intervenciones fundamentalmente procedimentales y de registro. En la Tabla 1 se describen las prácticas matemáticas identificadas.

Tabla 1. Prácticas matemáticas identificadas en el episodio 1

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	SUJETO
PP1: Lee y enuncia la medida de la cana de Montpeller, la cana de Baix Camp; la cana de Arenys. Indicando en cada caso un número decimal. **PP2**: Contextualiza cada dato que enuncia, indicando las poblaciónes en que eran utilizadas cada una de las canas. **PP3**: Realiza una aproximación de la medida de la cana de Montpeller. **PP4**: Realiza comparaciones entre las medidas de las canas, para resaltar las diferencias de tamaños. **PP5**: Relaciona el tamaño de las canas con referentes cotidianos. **PP6**: Plantea el problema de no tener una unidad de medida de longitud convencional universal. **PP7**: Interviene para aclarar la duda de un estudiante sobre el uso de una unidad de medida de longitud no convencional: los palmos, y explica por qué ésta no resolvería el problema de tener una unidad de medida común. **PP8**: Considera el valor del contexto histórico en la definición de actividades para la clase de matemáticas.	Profesor

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	SUJETO
PA1: Atienden y registran las cantidades numéricas (números decimales) que indican del tamaño de cada una de las canas. **PA2**: Siguen los aspectos que relacionan las canas y los lugares en los que eran usadas. **PA3**: Realizan un procedimiento de redondeo. **PA4**: Realizan comparaciones entre cantidades numéricas, para determinar qué cana es mayor o menor. **PA5**: Proponen el uso de una unidad de medida no convencional.	Alumnos

De estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos primarios: lenguaje, situaciones problema, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos –los cuales se articulan formando *configuraciones epistémicas* cuyo análisis nos informa de la «anatomía de un texto matemático»– y también se activan procesos, entre otros: generalización-particularización; institucionalización-personalización; representación-significación; descomposición-reificación; idealización-materialización y los procesos asociados a los objetos matemáticos: comunicación, definición, enunciación, argumentación.

Análisis de los objetos primarios

A continuación (Tabla 2), se presenta la configuración epistémica de objetos primarios correspondiente al episodio 1, en la cual la situación-problema que la motiva, aunque no aparece en la transcripción de manera explícita, se podría expresar del siguiente modo: *¿Cómo llegar a una unidad de medida de longitud, aceptada por todo el mundo?*

Tabla 2. Objetos primarios matemáticos en el episodio 1

OBJETOS PRIMARIOS	SUJETO
Problema	
¿Cómo llegar a una unidad de medida de longitud estándar aceptada por todo el mundo?	Profesor
Proposiciones	
P1: La cana de Montpeller mide uno coma nueve, ocho, siete, nueve metros	Profesor
P2: La cana de Baix Camp mide uno coma cinco, cinco, cinco metros	Profesor
P3: La cana de Arenys mide uno coma cinco, seis, cuatro metros	Profesor

Definiciones	
D1: Unidad de medida de longitud convencional de tipo local (Cana de Montpeller, Baix Camp, Arenys)	Profesor
D2: Unidad de medida de longitud estándar (Metro)	Profesor
D3: Unidad de medida no convencional: Palmos	Alumnos
Procedimientos	
M1: Redondeo	Alumnos
M2: Comparación	Profesor
Lenguaje	
L1: *Verbal oral* [Cana de Montpeller; cana de Baix Camp; cana de Arenys, Metro; Palmos, casi, que; dos metros; mucho más pequeño; diferencia; uno coma nueve, ocho, siete, nueve metros; uno coma cinco, cinco, cinco metros; uno coma cinco, seis, cuatro metros]	Profesor
L2: *Verbal escrito* [Números decimales, símbolos para unidades de medida]	Alumnos
L3: *Gestual* [Indicaciones del tamaño de las canas con los brazos y el cuerpo, mostrando una altura del piso a la mano]	Profesor
Argumentos	
A1: Se había podido medir con palmos	Alumno
A2: *Tesis:* Los palmos no pueden ser. *Razón:* Los palmos no son iguales	Profesor
A3: Tiene que ser una nueva unidad de medida de longitud (metro), que sea igual para todos	Profesor

Si consideramos los aspectos del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permiten resolver esta situación problema –entender cómo se llega a definir una unidad de medida de longitud aceptada por todos (metro)–, vemos el uso de lenguajes verbales, simbólicos y gestuales. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si los razonamientos realizados son satisfactorios. Dichos elementos se articulan en lo que desde el EOS se denomina una configuración epistémica (ver Figura 1).

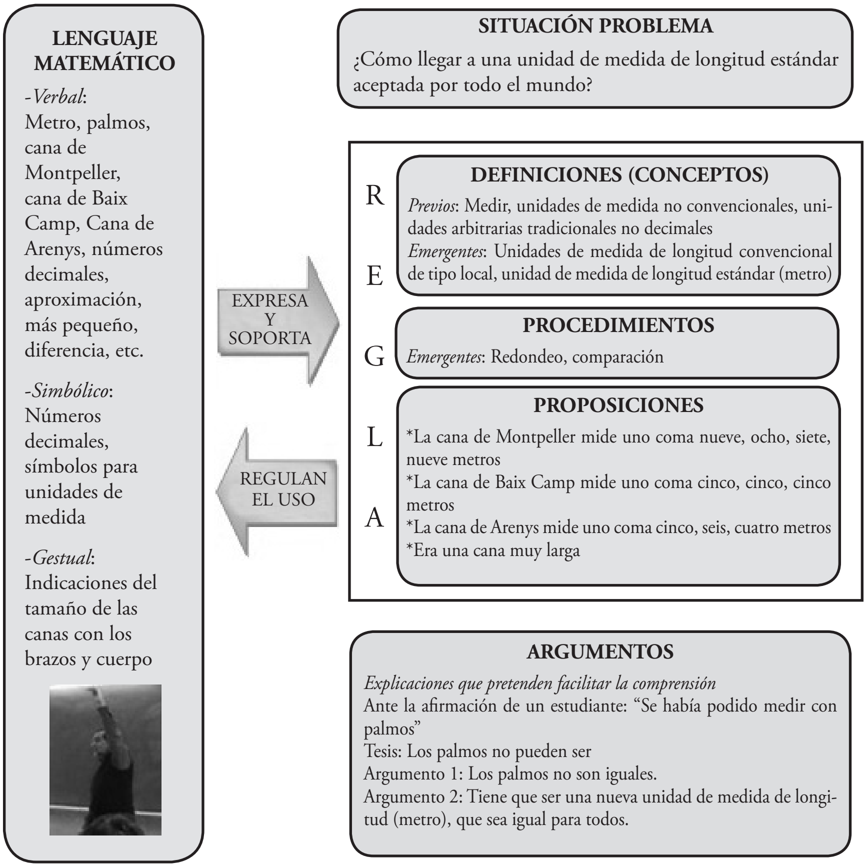


Figura 1. Configuración epistémica en el episodio 1

Análisis de los procesos matemáticos

En la Tabla 3 se describen algunos de los procesos matemáticos, con lo que se busca reconocer el «funcionamiento» de la actividad matemática, es decir, como interactúan los objetos primarios detallados en la Tabla 2 en una perspectiva temporal y dinámica.

Se observa que no se da un proceso de institucionalización bien definido, puesto que el docente busca fundamentalmente mostrar la problemática, acudiendo a los elementos históricos como medio. Dominan los elementos de enunciación y comunicación por parte del docente y sólo se argumenta ante una breve intervención de un estudiante.

Tabla 3. Procesos matemáticos en el episodio 1

PROCESOS MATEMÁTICOS	SUJETOS
Enunciación / Particularización: Al detallar los datos de las medidas de las canas (4, 5, 16, 17, 25, 27)	Profesor
Descomposición / Reificación: Aproximaciones de una medida en relación con la aproximación de un número (12, 13, 14, 18, 19, 20)	Profesor, Alumnos
Representación y **Materialización:** Al mostrar el tamaño de la cana con un gesto, indicando una altura, aludiendo a referentes de la vida cotidiana para que los alumnos se hagan una idea del tamaño de la cana en relación con la cantidad que indica los números que está dictando (13, 14, 18, 19)	Profesor, Alumnos
Enunciación: Proposiciones que indican comparaciones sobre el tamaño de las canas (14, 21)	Profesor, Alumnos
Comunicación: Al explicitar las relaciones que deben interpretarse del enunciado por el hecho de que el profesor está tomando la información de un texto externo (Interpretación del lenguaje) (22, 24). También se da un proceso de comunicación cuando busca llamar la atención sobre la problemática que generaba en el contexto social el que no hubiese una unidad de medida común en lugares geográficamente cercanos (31, 32, 33, 34). Otro proceso de comunicación surge cuando un estudiante plantea la posibilidad de resolver la problemática usando otra unidad de medida (33)	Profesor, Alumnos
Argumentación: Para resolver la duda de un estudiante (34)	
Institucionalización: Al resaltar la importancia del proceso de unificación de la unidad de medida pasando de lo convencional local a lo universal (36)	Profesor

Tipo de interacción y conflictos semióticos

Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) describen, utilizando como criterio el tipo de interacción y las funciones asumidas por el profesor y los alumnos en ellas, cuatro tipos teóricos de configuraciones: *magistral*, *a-didáctica*, *personal* y *dialógica*. Las configuraciones reales que acontecen están más o menos próximas a ellas. Una CD se considera a-didáctica cuando el alumno y el profesor logran que el primero asuma el problema planteado como propio y entre en un proceso de búsqueda autónomo. La *configuración teórica magistral* se basa en la exposición del profesor. Una variante intermedia entre los tipos anteriores puede definirse cuando el profesor se encarga de la formulación y validación, mientras que los alumnos se responsabilizan de la exploración. La institucionalización tiene lugar mediante un diálogo entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución. En este caso, se habla de *configuración teórica dialógica*. Otro tipo teórico de CD surge cuando el estudiante resuelve la situación problema sin intervención directa del docente; en esta configuración los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor o que incluye el libro de texto. Se trata de un tipo de CD en la que predomina el estudio personal y que se denomina *configuración didáctica personal*.

En el episodio analizado la configuración es fundamentalmente magistral, aunque haya interación, ya que la exposición recae sobre todo en el profesor, en los episodios posteriores se acerca más a la configuración didáctica dialógica. Aunque el registro de la sesión muestra un constante diálogo entre el profesor y los alumnos que podría llevarnos a situar la clase en una configuración dialógica, un análisis más detallado revela que la institucionalización, formulación y validación quedan exclusivamente a cargo del profesor, sin intervención de los alumnos.

En las interacciones didácticas del episodio se infieren conflictos de tipo semiótico, entendidos como cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de *conflictos semióticos de tipo epistémico*, mientras que si se da entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto se llaman *conflictos semióticos de tipo cognitivo* (una noción muy relacionada con la de conflicto cognitivo propuesta por Piaget). Cuando la disparidad surge entre las prácticas –discursivas y operativas– de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) se habla de *conflictos semióticos interaccionales.*

El principal conflicto semiótico de tipo interaccional (numerado como CE31 en la Figura 2) evidenciado en este episodio se manifiesta al final, cuando después de explicitarse la problemática de las diferentes unidades de medida, un alumno enuncia como posible solución el uso de otra unidad de medida convencional arbitraria. Ello evidencia un conflicto epistémico potencial anterior no resuelto sobre el uso del objeto cana como representante de la «clase de medidas» convencionales locales no arbitrarias, que no resuelve el problema de universalidad de la medida. Pero, aparecen además otros tipos de conflictos potenciales que no se analizan aquí por cuestiones de espacio (pero que aparecen también numerados en la Figura 2).

Análisis de las normas

Consideramos que la actividad matemática posee una dimensión social y que es a través de la interacción entre alumnos y profesor como surge la construcción y la comunicación de conocimiento. Tal y como lo plantean Yackel y Cobb (1996), asumimos que el aprendizaje matemático está condicionado no sólo por conocimientos matemáticos y didácticos, sino por algunas reglas denominadas normas socio-matemáticas. Pero ¿cómo podemos clasificar dichas normas, desde el punto de vista del análisis de la práctica matemática? Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) proponen diferentes criterios: el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación); el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológicas) y su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad). De acuerdo con estos autores, las normas epistémicas se encuentran en los elementos de las configuraciones de objetos: situaciones problema, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que regulan la práctica matemática en un contexto específico.

Hemos detallado las normas epistémicas al describir la configuración de objetos de la Figura 1. A continuación, en la Tabla 4, se muestran otras normas que fueron identificadas en el episodio, siguiendo la tipología propuesta por Godino et al. (2009). Se distingue entre las que se centran en el docente y las centradas en los alumnos. Como ya se ha mencionado, en el episodio analizado el profesor pretende situar a los alumnos respecto a algunos aspectos sociales que motivaron la necesidad de la unificación de medidas (longitudinales) en un momento histórico determinado, lo cual puede evidenciarse en las intervenciones (4, 16, 22, 24, 32, 34, 36), de las cuales pueden inferirse diferentes normas (por ejemplo, N2 y N3). Con ello se facilita y motiva la reflexión de los alumnos sobre las conexiones entre la matemática y el contexto histórico. Enfatizar en la problemática y necesidad de la convencionalidad, y en las características de ciertos instrumentos de medida, brinda soporte a los alumnos en la internalización de la historia científica (Mortimer y Scott, 2003).

Tabla 4. Normas identificadas en el episodio 1

NORMAS	SUJETO
Metaepistémicas: **N1:** Los enunciados de los problemas se pueden modificar, para hacer una mejor interpretación de estos. Es importante hacer una aproximación de las medidas para hacer una mejor interpretación del tamaño que nos indican (11, 14, 17, 18) **N2:** Hay elementos, referentes en lo «cotidiano» que nos ayudan a comprender lo matemático y establecer relaciones (14) **N3:** Hay problemáticas sociales que conducen a la construcción de conceptos matemáticos (32, 34, 36) **N4:** La contextualización es fundamental para la introducción y desarrollo de conceptos matemáticos	Profesor
Interactivas: **N5:** El profesor tiene un papel determinante en el inicio, distribución y finalización de las intervenciones. (1, 9, 11) **N6:** Hay que prestar atención cuando se está tomando nota de la información con la que se va a desarrollar el problema, es importante reconocer los elementos matemáticos cuando se lee un texto (1, 3, 7, 19, 17, 20, 25) **N7:** El profesor interviene para resolver dudas de los alumnos (34, 36)	
Afectivas: **N8:** Se usa el contexto histórico para motivar e implicar a los alumnos en la clase (2, 16, 22, 24, 30, 32, 36)	
Interactivas: **N9:** Los alumnos intervienen cuando tienen dudas (6, 8, 10, 28, 33) **N10:** Hay que prestar atención cuando el profesor llama la atención sobre algún aspecto concreto de la información que está dictando. (10, 12, 18, 19) **N11:** Los alumnos responden a las preguntas y observaciones del profesor (12, 18, 19, 35)	Alumnos

Síntesis de las herramientas de análisis

Con la intención de visualizar de manera global las diferentes herramientas de análisis del EOS y hacer diferentes lecturas de lo ocurrido, a continuación, en la Figura 2, se presentan las contribuciones que se desprenden desde los diferentes tipos de análisis didáctico del modelo para el episodio 1. Para ello, el episodio se ha subdivido en agrupaciones de líneas que indican diferentes momentos del episodio en donde se enfatizan aspectos distintos relacionados con los propósitos de la clase.

Con una lectura horizontal del cuadro, podemos reconocer en el episodio diferentes tipos de prácticas, las cuales podemos evidenciar al relacionar los diferentes objetos y procesos. Las prácticas identificadas (desarrolladas fundamentalmente por el docente) están orientadas a la lectura y enunciación de datos sobre el tamaño de las medidas y la contextualización de estos en relación con la población en que eran usadas dichas medidas. Una lectura vertical de la primera componente de la Figura 2 (Conocimiento/Significado), permite ver que es posible detallar de forma más fina la construcción del significado, en cada momento y a lo largo de los distintos episodios, al reconocer las prácticas matemáticas, identificar objetos y procesos correspondientes a cada una de dichas prácticas, y analizar cómo cambian en el tiempo y conjeturar por qué se han producido dichos cambios.

Respecto al tipo de configuración didáctica y la complejidad de los procesos instructivos a partir de una lectura horizontal de la tabla, vemos que el conjunto del episodio 1 se caracteriza por un tipo de configuración magistral que se explica en el detalle de la lectura horizontal de la tabla.

La Figura 2 nos permite observar también que en el episodio 1, la introducción a la medida que se hace se caracteriza por la presencia de normas metaepistémicas. El análisis de más episodios permite inferir normas que caracterizan el contrato didáctico, ya que se repiten a lo largo de los episodios.

	Sobre el conocimiento/significado			Sobre el docente	Sobrelosestudiantes	Sobre la interacción en el aula		Reglas sociales
Líneas	Prácticas Mat.	Objetos	Procesos	Funciones del docente	Funciones del estudiante	ConfiguraciónDidáctica	Conflictos	Normas
1 - 11	PP1, PP2, PP8 PE1, PE2	P1, C1, L1	Enunciación	Fijación de reglas Motivación	Recepción de la información Demanda de información	Magistral	CIT, CE41, CE32	Epistémica: P1, C1, L1 Metaepistémica: N3, N4, Afectivas: N8 Interactivas: N5, N6, N9, N10
12 - 16	PP3, PP5 PE3	M1, L1, L2	Algoritmización Representación Materialización	Regulación Constatación	Recuerdo Formulación	Magistral	CE12, CE31	Epistémica: M1, L1, L2 Metaepistémicas: N2, Interactiva: N5, N10, N11
17 - 24	PP1, PP2, PP4, PP8 PE1, PE2, PE4	P2, C1, M2, L1	Enunciación ComparaciónComunicación	Fijación de reglas	Recepción de la información Recuerdo Formulación	Magistral	CIR, CIT, CE11	Epistémica: P2, C1, M2, L1 Metaepistémica: N4 Interactivas: N6, N10, N11 Afectiva: N8
25- 31	PP1PP2, PP8 PE1, PE2	P3, C1, L1	Enunciación Comunicación		Formulación		CE31	Epistémica: P3, C1, L1 Metaepistémica: N4 Interaccional: N6, N9, N10 Afectiva: N8
32 - 38	PP6, PP7, PP8 PE2, PE5	C1, C2, L1	Enunciación Comunicación Argumentación	Regulación Motivación		Magistral/Personal	CE11	Epistémica: C1, C2, L1 Metaepistémica: N3, N4, Interaccional: N7, N9, N11 Afectiva: N8

Figura 2. Cuadro sintetizador de los niveles de análisis en el Episodio 1

REFLEXIONES FINALES

Actualmente se considera que los profesores deben desarrollar competencias profesionales que les permitan identificar e interpretar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, para poder tomar decisiones fundamentadas sobre su propuesta de enseñanza. En este sentido consideramos que los niveles de análisis propuestos por el EOS brindan herramientas eficaces para que el docente reflexione sobre su propia práctica de una forma estructurada, describiendo lo que ha ocurrido en la clase y reflexionando sobre por qué ha ocurrido, lo cual puede ayudarle a tomar decisiones para la mejora de sus propuestas en el diseño, planificación, implementación y valoración de secuencias didácticas para la clase de matemáticas.

En este trabajo se aplica parte de un modelo que permite realizar un análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. La noción de *idoneidad didáctica* y sus criterios para describirla, junto con las herramientas de los cuatro primeros niveles de análisis (que son los que se han utilizado aquí), hacen posible establecer un puente entre una didáctica descriptiva-explicativa y una didáctica axiológica que propicie la crítica, la justificación del cambio, etc.

La descripción de la sesión de clase es el resultado de una metodología de observación, que ha consistido en aplicar los constructos del marco teórico adoptado. Dicho marco nos ha servido de guía sobre lo que había que observar, cómo se debía observar y nos ha proporcionado las herramientas para realizar la observación. La diversidad de herramientas propuestas en el EOS para el análisis de la práctica del profesor cuando enseña matemáticas refleja la complejidad inherente a este tipo de análisis, en tanto que es necesario distinguir elementos de diferente naturaleza.

Este análisis minucioso apoyado en las herramientas didácticas que provee el EOS precisa e ilustra con detalle la estructura y funcionamiento de una clase de matemáticas. Los diferentes niveles de análisis permiten diferenciar todo lo que está involucrado en el conglomerado que conforma una clase de matemáticas (situación problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, interacciones, conflictos, normas y metanormas), así como establecer relaciones entre dichas partes. En términos metafóricos, podemos decir que se realiza una *radiografía* de la clase, donde se observan conflictos semióticos que están relacionados con dificultades de los alumnos, que han sido documentados en otras investigaciones. La Figura 2 permite hacer tanto *lecturas horizontales* como *verticales*, dependiendo de lo que se quiera describir o estudiar. Lo horizontal permite ver la estructura y anatomía de los episodios, mientras que la verticalidad permite ver el desarrollo temporal.

Una cuestión que queda abierta es ¿cuál es el uso que se puede y debe hacer de las herramientas para el análisis didáctico presentadas anteriormente en la formación de profesores? En nuestra opinión, este trabajo muestra la utilidad del uso de dichas herramientas para el análisis y la mejora de la práctica del profesor, pero quedan abiertas las cuestiones de cómo y cuándo convendría enseñárselas a los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, si se debe enseñar (o no) la técnica de análisis de la actividad matemática en términos de prácticas, objetos y procesos en la formación inicial, tal como se hizo en Rubio (2012) con futuros profesores de secundaria.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigacion en formacion de profesorado: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

REFERENCIAS

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 207-225.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. y Pereira, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Coll, C. y Sánchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación, 346*, 15-32.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42 B), 667-690.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 86-91.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ferreres, S. y Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *196*, 219-225.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, *26*(1), 9-25.

Font, V., Bolite, J. y Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 131-152.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Font, V. y Rubio, N. (2014). Un modelo de ànalisis didáctico de procesos de instrucción matemàtica. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *7*(1), 11-31.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación matemática, 1*, 23-37.

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias*, *25*(2), 157-170.

Gellert, U., Becerra, R. y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En, K. M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 327-360). Nueva York, NY: Springer-Verlag.

Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 581-590). Oxford, United Kingdom.

Godino, J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII* (2), 221–252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 63-83.

Leinhardt, G. y Greeno, J. G. (1986). The Cognitive Skill of Teaching. *Journal of Educational Psychology*, *78*(2), 75-95.

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: a Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 87-113.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53-70.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* London: Routledge.

Mateus, E. (2016). Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. *Bolema*, *30*(55), 559-585.

Mortimer, E. y Scott, P. (2003). *Meaning making in science classrooms*. Milton Keynes: Open University Press.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación matemática*, *27*(1), 37-64.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa-RELIME, 19*(1), 71-98.

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, *11*(2), 233-265.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, Barcelona.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación básica con mención en matemática*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona, Barcelona.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F. y Perrot, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher's Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 153-181.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Simon, M. A. y Tzur, R. (1999). Explicating the teacher's perspective from the researchers' perspectives: Generating accounts of mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(3), 252-264.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE INFANTIL DESDE EL AULA DE MATEMÁTICAS

EARLY CHILDHOOD TEACHERS' MATHEMATICS SPECIALIZED KNOWLEDGE FROM PROFESSIONAL PRACTICE

Muñoz-Catalán, M.C.[1], Joglar, N.[2], Ramírez, M.[2, 3], Escudero, A.M.[1], Aguilar, Á.[4], Ribeiro, M.[5]

[1]*Universidad de Sevilla,* [2]*Universidad Complutense de Madrid,*
[3]*La Salle Centro Universitario,* [4]*Universidad de Oviedo,*
[5]*Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP (Brasil)*

RESUMEN

Con el objetivo de avanzar en la comprensión de la naturaleza y contenido del conocimiento del profesor de Educación Infantil en lo que respecta a la enseñanza de las Matemáticas, en este capítulo describimos e interpretamos las acciones de dos profesores a lo largo de una sesión. Así, con foco en la práctica de aula, considerando el modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) y adoptando un paradigma interpretativo, analizamos un vídeo de cada profesor para comprender qué conocimiento especializado sustenta sus prácticas en lo que respecta a la enseñanza de Aritmética y Geometría. Los resultados ponen de relieve la sólida formación matemática en contenidos específicos de la etapa que estos profesionales necesitan y la importante relación de estos con elementos de conocimiento didáctico del contenido.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Palabras clave: *profesor de Educación Infantil, MTSK, descomposición numérica, composición geométrica, enfoque geométrico proyectivo.*

ABSTRACT

With the aim of advancing in the understanding of the nature and content of Early Childhood teachers' knowledge with respect to the teaching of Mathematics, in this chapter we describe and interpret the actions of two Early Childhood teachers throughout a session. Thus, putting the focus on classroom practice, considering the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) model and adopting an interpretive paradigm, we analyze one video from two teachers to understand what specialized knowledge supports their practices in regard to the teaching of Arithmetic and Geometry. The results highlight the depth of the mathematical content knowledge that these professionals in this stage need, and the important relation between some aspects of this knowledge and some elements of pedagogical content knowledge.

Keywords: *Early childhood teacher, Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK), number decomposition, geometric composition, projective geometric approach.*

INTRODUCCIÓN

La atención a la etapa de Educación Infantil es relativamente reciente en nuestra comunidad de investigación. Asociaciones profesionales como el National Council of Teachers of Mathematics o la National Association for the Education of Young Children (NAEYC y NCTM, 2013) han articulado la necesidad de proporcionar una formación matemática sólida en esta etapa sobre la base del importante papel que la formación matemática temprana juega en el desarrollo de los alumnos. Esta formación matemática temprana contribuye, por un lado, a minimizar la brecha entre alumnos debido a diferencias socioeconómicas y, por otro, actúa de predictor del éxito escolar posterior, pues las competencias de razonamiento que desarrolla se constituyen como fundamento cognitivo para pensar y aprender en todas las materias (Clements, Baroody y Sarama, 2013).

El currículo oficial español (Orden ECI/3960/2007), orientado al desarrollo integral del alumno, aparece estructurado en tres áreas: *conocimiento de sí mismo y autonomía personal*, *conocimiento del entorno* y *lenguajes: comunicación y representación*. Las matemáticas aparecen explícitamente asociadas a la segunda área y se deja la responsabilidad al profesor de plantearse la relación de las matemáticas con las demás, de establecer cuáles son los contenidos matemáticos, cómo secuenciarlos por ciclos y cursos y con qué enfoque debe trabajarlos. Así, no se puede hablar específicamente del profesor de matemáticas en Educación Infantil, pero, quizás en mayor medida que el profesor de otras etapas educativas, este profesional necesita disponer de un sólido conocimiento para identificar con rigor los cimientos del edificio matemático, promover un aprendizaje profundo de los mismos y revestirlos de un aparataje lúdico y funcional.

Poco se sabe todavía de la naturaleza y del contenido de este conocimiento. En una revisión que Parks y Wager (2015) realizaron de los artículos de los últimos 20 años pertenecientes a las cuatro revistas más relevantes sobre esta etapa, constataron que en las dos específicas del área (*The Journal of Research in Mathematics Education y The Journal of Mathematics Teacher Education*) se daba, de manera general, una escasa atención a la etapa de Educación Infantil, y, en particular, a la investigación sobre la formación matemática de los profesores de esta etapa educativa. Lamentaban que los cursos orientados a estos profesionales solían estar centrados en la memorización de hechos, definiciones y procedimientos, en lugar de ayudarlos a comprender la esencia de los conceptos y procedimientos.

Los escasos estudios que hay sobre el conocimiento de este profesional para enseñar matemáticas se han centrado principalmente en aspectos relacionados con el subdominio del *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) propuesto por Shulman (1986) (e.g., Lee, 2010; McGray yChen, 2012), tratando de evidenciar su influencia en la calidad instruccional. Comienzan a emerger estudios que abogan por atender también al conocimiento de la propia matemática como elemento necesario para construir un adecuado PCK matemático (e.g. Opperman, Anders y Hachfeld, 2016). En esta línea, en Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro (2017), presentamos una propuesta articulada de conocimiento especializado sobre la resta para el profesor de Infantil. La reflexión sobre dicha propuesta nos permitió concluir que este conocimiento era denso conceptualmente, altamente cohesionado y con un fuerte peso en el dominio matemático.

En este capítulo presentamos nuestros avances en la identificación de elementos de conocimiento que este profesional necesita para enseñar matemáticas, haciéndolo desde la práctica como lugar privilegiado para comprender cómo este conocimiento sustenta las acciones del profesor. Así, ampliando el trabajo realizado con foco en la resta, en este capítulo nos centramos en dos de los núcleos matemáticos más relevantes en esta etapa: Número y operaciones y Geometría (Clements, 2004), lo que además nos permitirá avanzar en la comprensión de la naturaleza y contenido del conocimiento especializado del profesor de Infantil para enseñar matemáticas.

MARCO TEÓRICO

La mayoría de los modelos de conocimiento del profesor parten del trabajo de Shulman (1986), quien planteó la necesidad de considerar la especificidad del contenido que se está enseñando, enfocando el conocimiento necesario para enseñar a través de la lente de la propia disciplina. Introdujo la distinción entre *conocimiento del contenido* y *conocimiento didáctico del contenido*, entendiendo esta última categoría como la combinación entre contenido y pedagogía (general) y considerándola como la que podía distinguir la comprensión del especialista en contenido de la del pedagogo.

Esta atención a la especificidad del contenido que se enseña es igualmente pertinente para el profesor de Educación Infantil. La naturaleza abstracta de las matemáticas confiere también una especificidad particular a los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados a ella en esta etapa educativa. Así, consideramos que su conocimiento ha de ser especializado puesto que supone una manera particular de conocer las matemáticas para un fin docente y para un público particular que, a la vez, es diferente al del profesor de Primaria o Secundaria (Ribeiro et al, 2015). Adoptamos el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Montes et al., 2018; Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017) y, por ende, su conceptualización del conocimiento como aquel que el profesor necesita, utiliza y tiene a su disposición (Schoenfeld, 2010) y, por tanto, sustenta sus acciones.

El modelo MTSK distingue 6 subdominios de conocimiento, organizados atendiendo a la distinción planteada por Shulman, entre dominio matemático (MK) y dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK), dentro del cual se ha integrado el conocimiento curricular de Shulman. También se ha incluido el dominio de las creencias y concepciones sobre la Matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como elemento que permea todo el conocimiento (el cual no va a ser objeto de estudio en este trabajo) (ver Figura 1).

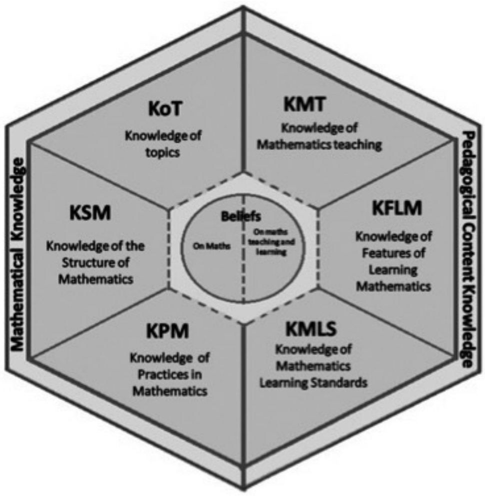


Figura 1. Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK)
(extraído de Carrillo, Climent, et al., 2018).

En el dominio del *Mathematical Knowledge (MK)* se encuentran los siguientes tres subdominios:

Knowledge of Topics (*KoT*) contiene el conocimiento disciplinar, que incluye los procedimientos (desde el cómo se hace hasta el cuándo puede hacerse pasando por el porqué), las definiciones, propiedades y sus fundamentos, la fenomenología y aplicaciones de un contenido y los diferentes registros de representación. Se incluyen aquí las conexiones intraconceptuales, es decir, aquellas que relacionan conceptos o procesos de un mismo tema. Serían elementos del *KoT* conocer: las propiedades del esquema parte-todo y su papel en la comprensión del número; los atributos relevantes e irrelevantes de las figuras geométricas, así como sus definiciones, o los registros que se pueden utilizar para representar la descomposición del número o las figuras, las especificidades de cada uno de ellos y la complementariedad entre ellos.

Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) está formado por el conocimiento del profesor de conexiones que permite disponer de una visión global del conocimiento matemático. Para la etapa de Infantil, se identifican, por un lado, las *conexiones transversales,* que se refieren a ideas matemáticas que enlazan varios núcleos de contenidos; podrían asociarse al conocimiento de las *grandes ideas* en matemáticas (Clements, 2004). Los tres enfoques geométricos topológicos, proyectivos y métricos podrían considerarse como una *gran idea* porque articulan el conocimiento geométrico en todos los niveles educativos.

También se incluyen las *conexiones de complejización o simplificación*, que permiten ver tanto el contenido elemental desde una perspectiva avanzada, como el conocimiento avanzado desde una perspectiva elemental. Un ejemplo podría ser saber que, en función de cómo se trabajen determinados contenidos aritméticos (como la descomposición numérica), se puede potenciar la construcción de conocimientos sobre algunos aspectos de diferentes estructuras algebraicas en los conjuntos numéricos incidiendo en propiedades (como la conmutativa de la suma de números naturales) y relaciones, lo que tiene repercusiones en cómo abordar esos contenidos en el aula y otorga a la aritmética actual un enfoque potencial. Habrá que explorar las *conexiones auxiliares* en esta etapa educativa, que son las que permiten hacer un uso instrumental de un concepto o procedimiento en el trabajo con otro contenido.

Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) abarca el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático, incluyendo aspectos de la comunicación, la argumentación y la demostración matemáticas. Ejemplos de este subdominio sería saber que la comparación de elementos matemáticos es un proceso matemático válido para identificar relaciones y propiedades numéricas.

En el dominio del *Pedagogical Content Knowledge (PCK)* se consideran los siguientes tres subdominios:

Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) integra el conocimiento del profesor de teorías personales o formales de enseñanza asociadas a un contenido matemático; de las limitaciones y potencialidades de los recursos materiales o virtuales para su enseñanza; así como de estrategias de enseñanza, técnicas, tareas y ejemplos útiles para ello. Serían ejemplos de este subdominio conocer el potencial del uso de fotografías de composiciones de figuras desde distintas perspectivas para el desarrollo de la capacidad de visualización de los alumnos o de la conversión entre distintos registros de representación para favorecer la comprensión de un concepto.

Knowledge of Features of Learning Mathematics (*KFLM*) se refiere al conocimiento de cómo los alumnos aprehenden el contenido procedente de la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento sobre teorías personales o formales de aprendizaje tanto asociadas a la matemática general como a contenidos particulares. Junto a ellas, se sitúa el conocimiento sobre las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de contenidos concretos, sobre las formas de interacción de los estudiantes con estos, y sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas. Un ejemplo de este subdominio es saber que muchos alumnos de Educación Infantil no son capaces de comprender mensajes matemáticos sin apoyo visual.

Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS) considera el conocimiento tanto del currículo oficial vigente en cada país en cada momento, como de estándares definidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se incluye el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, así como el conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores. Así, por ejemplo, conocer que la descomposición del seis se puede abordar en el último curso de Educación Infantil y puede facilitar la construcción de conocimiento de propiedades de estructuras algebraicas (grupo conmutativo de los enteros con la suma), son elementos de este subdominio de conocimiento.

METODOLOGÍA

Este capítulo responde a nuestra preocupación por comprender la naturaleza y contenido del conocimiento del profesor de Educación Infantil en lo que respecta a la enseñanza de las Matemáticas, con el fin de organizar procesos formativos para estos profesionales sustentados en elementos de conocimiento procedentes de la investigación. En trabajos anteriores (Ribeiro, Muñoz-Catalán y Liñán, 2015; Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro, 2017) abordamos este interés desde una reflexión teórica en torno a la operación resta, lo que nos permitió realizar una propuesta de elementos de conocimientos especializados interconectados útiles para la formación de estos profesionales. En esta ocasión queremos hacerlo desde la práctica de dos profesores, cada uno de ellos enseñando contenidos relativos a dos de los principales núcleos de esta etapa educativa: *Números y operaciones* y *Geometría*. En particular, pretendemos comprender qué conocimiento especializado sustenta la práctica de dos profesores de Educación Infantil, en lo que respecta a la enseñanza de Aritmética y Geometría.

Afrontamos este objetivo desde el paradigma interpretativo (Bassey, 1999), y mediante un estudio exploratorio centrado en el análisis de vídeos de clase de dos profesores de Educación Infantil. Los pseudónimos de los informantes son Javier e Irene, dos profesores de Educación Infantil comprometidos con mejorar su práctica, especialmente en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas. Javier es un profesor con más de 10 años de experiencia, que ha realizado diversas formaciones específicas de Didáctica de las Matemáticas, cuyas orientaciones trata de integrar después en su práctica. En el vídeo seleccionado, cuya duración es de aproximadamente 30 minutos, Javier trabaja en un centro de titularidad pública con un grupo de 25 alumnos de 4 años sobre dos fotografías que contienen una misma composición de cuerpos geométricos desde dos perspectivas diferentes, composición que los alumnos han de reconstruir con piezas manipulables. Irene tiene más de 25 años de experiencia en la etapa, trabajando en diferentes centros de titularidad pública y ha sido muy activa en asistencia a actividades formativas, entre las que hay que destacar un Máster de Didáctica de las Matemáticas. Desde el curso 2016-2017 participa en un taller colaborativo con otras profesoras de Infantil y formadoras-investigadoras del área. En el vídeo seleccionado, cuya duración también es de 30 minutos, trabaja la descomposición aditiva del número seis con contadores, y los alumnos, 24 niños de 5 años, han de representar cada una con el Numicon®[1]. Los alumnos de ambos grupos pertenecen familias de clase media.

El análisis se realiza sobre la base de la transcripción de ambas sesiones y comienza con la identificación de episodios relevantes para los fines de esta investigación, siguiendo a Schoenfeld (2000). A continuación, aplicamos un *enfoque interpretativo* (Kvale, 1996) en el que los datos son recontextualizados a la luz del modelo analítico MTSK. El conocimiento movilizado por el profesor se sustenta en indicios y evidencias (Carrillo, Montes, et al., 2017), que son dos grados de certeza asignados por el investigador sobre las manifestaciones orales o gestuales del profesor.

ANÁLISIS DE LOS VÍDEOS DE JAVIER Y DE IRENE

En este apartado analizamos la práctica de los profesores con foco en el conocimiento especializado que movilizan en sus respectivas sesiones. Primero mostramos

[1] Numicon® es un material multisensorial comercializado actualmente por Oxford, basado en las placas por puntos de Herbeniere-Lebert.

una descripción de cada sesión y, a continuación, el análisis donde destacamos aquellos elementos de conocimiento que consideramos más significativos para comprender las prácticas de estos profesores.

Descripción del fragmento de vídeo de Javier: «Composiciones desde distintas perspectivas»

En la sesión considerada, Javier pretende que los alumnos construyan imágenes mentales más completas de los cuerpos geométricos trabajados. Javier presenta en asamblea una serie de tarjetas de elaboración propia, que contienen una fotografía (representación gráfica en 2d) de una composición formada por tres cuerpos geométricos distintos de madera. El problema consiste en que los alumnos reproduzcan el contenido de la fotografía con los bloques de una caja de construcciones, respetando la selección de las figuras, su posición respecto de la base sobre la que se sustentan y su ubicación en la composición. En el proceso, se les pide que identifiquen el nombre de cada cuerpo geométrico involucrado y alguna de sus propiedades.

Antes de comenzar les recuerda que: «*El año pasado no sabíamos lo que era un prisma, ni qué era un cubo, ni sabíamos que los rectángulos salían de los prismas, ni que los cuadrados salían de los cubos, ni que los círculos salían de las esferas*» y les explica en qué va a consistir el problema en el que se tienen que fijar en lo que ven: «*qué está arriba, qué hay abajo en todo lo que veamos en la tarjetita para después poderlo hacer nosotros*». En el primer episodio se desarrolla el trabajo con la primera tarjeta (Figura 2), donde Javier les pide que identifiquen los cuerpos involucrados en la composición y valida la respuesta: «*pirámide, prisma y cilindro*». Después, pide a un alumno que salga a reproducir la imagen sobre una silla ubicada debajo de la tarjeta, aclarando que: «*Manuel, la tienes que poner igual que está puesta ésta* –señalando el prisma–. *Fíjate bien*». Y, por último, vuelve a dirigirse al grupo para pedirles que comprueben si lo construido por el compañero es igual a lo que se encuentra representado en la tarjeta: «*¿es igual el dibujo que teníamos en la tarjeta a lo que ha construido Manuel?*».

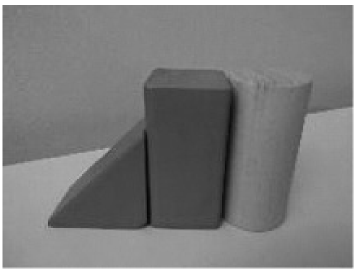


Figura 2. Primera tarjeta

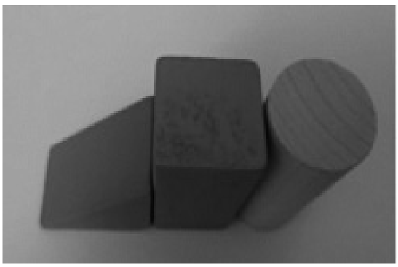


Figura 3. Segunda tarjeta

En el segundo episodio, dejando la primera tarjeta en la pizarra, muestra la foto de la misma composición desde otra perspectiva (Figura 3), y pregunta: «*¿es igual?*». Al comprobar las dificultades de los alumnos para identificar la igualdad de ambas composiciones coge en peso a varios alumnos para que observen la composición desde distintas perspectivas, pero sigue prevaleciendo la imagen habitual que contiene la Figura 2. A continuación, saca a varios alumnos para que miren a otro compañero desde distintos puntos de vista (por ejemplo, tumbándose en el suelo o subiéndose a una silla), preguntándoles en cada ocasión: «*¿lo ves igual que antes o distinto*?» Como los alumnos responden que lo ven igual, Javier reinterpreta lo ocurrido: «*Cuando estabas antes tumbado en el suelo ¿le veías el pelo como ahora (que está subido en una silla)? […] Lucía siempre ha visto a Ricardo igual, pero lo ha visto desde sitios diferentes*».

A continuación, pega las dos fotografías en paralelo en la pizarra, reproduce la composición en una silla debajo de ellas y les invita a que respondan si lo ven como en la tarjeta 1 (Figura 2) o la 2 (Figura 3) estando sentados en asamblea, aunque también les hace salir, por grupos de tres, para que vean la composición desde distintos puntos de vista.

Elementos de conocimiento especializado sobre geometría movilizado por Javier

Javier formula un problema de construcción geométrica con el que pretende que los alumnos enriquezcan su imagen mental de los cuerpos geométricos, abordando de manera interrelacionada dos aspectos clave del trabajo geométrico: la forma de las figuras, su posición y sus transformaciones[2] (KoT – definiciones, propiedades y sus fundamentos). Parece sabedor de la importancia de que en esta etapa desarrollen imágenes mentales ricas de las figuras y reproduzcan composiciones geométricas (KMLS – expectativas de aprendizaje), y lo hace mediante los cuerpos que sus alumnos ya conocen por haberlos trabajado desde el curso pasado (KMLS – secuenciación con temas anteriores y posteriores). Para tal fin, promueve la visualización como proceso geométrico que potencia el conocimiento de los cuerpos geométricos (KPM – visualización como proceso matemático), asociando esta visualización a la perspectiva, elemento caracterizador del enfoque geométrico proyectivo (KSM –gran idea).

Javier comienza la sesión recordando los cuerpos geométricos que conocen (esfera, cubo, prisma) y sus caras más representativas, desde el enfoque geométrico con el que se ha abordado el conocimiento de dichas figuras (KoT – propiedades).

[2] Entendemos la transformación de una manera amplia, integrando las que trabajan relaciones proyectivas.

En su momento utilizó la estampación de estas (en el caso de la esfera, previo corte en dos mitades) en una actividad (KMT – estrategia, tarea, técnica, ejemplo), sabedor de que tanto la estampación como el corte de los objetos son dos procedimientos para pasar de las 3D a las 2D (KoT – procedimientos). El modo en que valida el nombre de las figuras de la fotografía, pone de relieve que su concepto de prisma excluye la primera figura de la composición y el cubo, lo que evidencia que su definición de prismas y pirámides no descansa en atributos relevantes, sino en la imagen de prismas habituales y en una posición determinada (KoT – definiciones, propiedades).

El tipo de tarea que aquí implementa refleja su conocimiento acerca de distintos sistemas de representación en el ámbito de la Geometría (gráfico, lenguaje verbal y manipulativo) (Lesh, Post y Behr, 1987), y la complementariedad entre ellos (KoT – registros de representación). Usa dichos sistemas como vehículo para el desarrollo de la sesión, promoviendo la conversión entre distintos sistemas de representación (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y para el diseño de las tarjetas y la selección del material utilizado (KMT – recursos materiales y virtuales).

Javier utiliza elementos de distintos sistemas de representación (fotografías, material manipulativo y lenguaje oral) para describir distintas características de una composición geométrica vista desde distintos puntos de vista (KoT – registros de representación). Además, trabaja la conversión del registro gráfico al manipulativo y viceversa, ayudándose del lenguaje natural oral, para que los alumnos expliciten las propiedades de los cuerpos (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y como ayuda para solventar las posibles dificultades en esas conversiones (Lesh, Post y Behr, 1987) (KFLM – fortalezas y dificultades). Conocedor de que los alumnos necesitan acercarse a los conceptos matemáticos con un lenguaje próximo (KFLM – formas de interacción), Javier utiliza los términos del lenguaje cotidiano que transmiten la idea asociada a un concepto (KMT – lenguaje como herramienta de enseñanza); así, por ejemplo, utiliza la palabra «*pico*» como sinónimo de vértice y «*caminito*» como sinónimo de arista al comienzo del vídeo. No obstante, en el curso de la sesión sustituye esa terminología por un vocabulario geométrico más formal, es decir, los términos son institucionalizados, sabedor del papel que juega en la construcción y comunicación matemática (KPM – papel del lenguaje formal; KMT – teorías de enseñanza): *«lo que la semana pasada llamamos caminito, verdaderamente, se llama arista»*.

En el primer episodio, Javier conoce las características relevantes del problema geométrico planteado (tipo de figura y posición respecto de la base y de las demás figuras) y lo utiliza para explicar la consigna del mismo. Les proporciona estrategias concretas para su resolución, animándoles a que visualicen atentamente la fotografía (KPM – heurísticos) y a que sean ordenados al realizar la composición (KPM – heurísticos), siguiendo el orden de izquierda a derecha, como se hace en la lectoescritura (lo que podría considerarse como un elemento de conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia). El profesor plantea la validación del problema, preguntándoles si «*¿es igual el dibujo que teníamos en la tarjeta a lo que ha construido Manuel?*», con lo que está promoviendo la comparación entre la tarjeta (Figura 2) y la composición realizada por el alumno como una estrategia de validación (KPM – formas de validación). El profesor contempla la validación como fase relevante en la resolución de problemas (KPM – resolución de problemas).

En el segundo episodio, anticipando las dificultades que sus alumnos pueden presentar para identificar como iguales representaciones gráficas en dos dimensiones desde diferentes puntos de vista o perspectivas del mismo objeto tridimensional (KFLM – dificultades), parte de la vista frontal de una composición pero a continuación utiliza otra tarjeta con la misma composición, pero fotografiada desde una vista cenital (Figura 3) y la pone en paralelo a la anterior, sabiendo el papel que la comparación posee en el establecimiento de relaciones entre objetos (KPM – forma de génesis epistemológica) y lo utiliza como estrategia de enseñanza (KMT – estrategia). Les pregunta uno a uno: «*¿chicos, es igual*? Y después al grupo entero: «*¿Hay alguien que piense que esto es igual a esto (señalando cada tarjeta)*?» Ante la respuesta unánime de que no son iguales, comienza a precisar la pegunta, señalando cada una de las fotos: *¿Aquí hay las mismas figuras geométricas que aquí?* Los alumnos dicen que sí y uno, en particular, indica que en una tarjeta las figuras están tumbadas y en la otra están de pie, que le sirve a Javier para matizar: «*Aquí se ven de una forma y aquí se ven de otra, pero ¿son las mismas?*». En el diálogo que mantiene con sus alumnos, su discurso se va mostrando cada vez más preciso tanto a la hora de preguntar por la igualdad, como cuando parafrasea los descubrimientos de sus alumnos (KMT – lenguaje como estrategia de enseñanza). Percibiendo las dificultades de los alumnos y sabedor de la importancia de que los alumnos de estas edades actúen directamente sobre objetos (se podría considerar como un elemento de conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia) y, en particular, sobre recursos específicos para un contenido (KFLM – formas de interacción), plantea las dos situaciones descritas anteriormente para que experimenten cómo se ve un objeto desde distintas perspectivas (KMT – tarea). Con ello trata de hacer emerger aspectos proyectivos de la situación: que el niño que es observado no cambia y que lo que cambia es el foco (el punto de mira), y, por lo tanto, la forma de la imagen resultante de dicha proyección – vista del niño observado (KPM – gran idea). A continuación, debajo de ambas tarjetas, realiza la composición con el material y les pregunta, desde sus puestos, con qué tarjeta la identifican y, por tríos, se van acercando a la composición para visualizarla desde arriba y Javier descubre que, a pesar de la experimentación, la mayoría sigue asociándola con la figura 1, que se corresponde con la imagen mental que los alumnos tienen de las figuras (KFLM – formas de interacción con un contenido).

Descripción del fragmento de vídeo de Irene: «El juego de la familia de los ositos»

En esta sección se analiza una sesión de clase de unos 30 minutos gestionada por Irene en la que se trabajan las descomposiciones aditivas del número 6. Irene comienza planteando en asamblea una actividad con la que los niños están familiarizados (ella ha sido su profesora los dos años anteriores). Se presenta, en una lámina grande plastificada (Figura 5c) una representación icónico-gráfica de una casa de muñecos con una distribución específica de estancias realizada por la profesora (un salón, una cocina, un baño y un dormitorio), en la que se muestra el símbolo del número 6 en el tejado. Se sacan seis contadores con forma de oso, que constituyen una familia, los cuales se van moviendo por la casa siguiendo la historia narrada por la profesora. La profesora presenta los miembros de la familia mientras los coloca uno a uno en el salón. A continuación, desplaza el oso abuelo al cuarto de baño y plantea las preguntas siguientes: «*¿Cuántos ositos hay ahora en el salón*? *¿Y en el baño*? *¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño*? *¿Cuántos hay ahora en el dormitorio*? *¿Y en la cocina*?». La maestra continúa con la historia, realizando movimientos de los miembros de la familia de una estancia a otra. Así, desde la acción, la maestra generaba cada descomposición quitando un oso del salón y lo añadía al baño de manera ordenada y sucesiva representando las descomposiciones binarias del 6 siguientes: 6+0, 5+1, 4+2, 3+3 y 2+4.

En paralelo, la profesora ha sacado el material Numicon® (Figura 4, Manipulativa), conocido ya por los alumnos por tareas desarrolladas anteriormente, que presenta una configuración puntual binaria de los 10 primeros números. Irene les pide que representen con el material cada descomposición que aparece en la casa, y que comprueben su respuesta mediante la superposición de las fichas escogidas con la correspondiente del 6 (Figura 5a Manipulativa). Irene incorpora nuevas preguntas (e.g., «*¿Cuántos ositos hay ahora en el salón? ¿Y en el baño? ¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño? ¿Cuántos hay ahora en el dormitorio? ¿Y en la cocina?*») para hacer que los alumnos comparen una situación con la anterior y así se den cuenta de que siempre hay 6 osos en total en la casa, independientemente de cómo estén distribuidos.

Finalmente, tras unos 10 minutos en los que la maestra va variando la colocación de los muñecos en la casa y haciendo las mismas preguntas, cada niño pasa a su mesa. Allí individualmente tienen que completar una ficha que, en la parte izquierda, (Figura 4, Gráfica) contiene un espacio para dibujar una de las situaciones que han aparecido previamente en la sesión, y en la parte derecha, proporciona huecos para que escriban los símbolos numéricos de las cantidades que corresponden con el número de osos que han dibujado en la parte izquierda de cada estancia indicada a través de un icono (dormitorio con una cama, cocina con un tenedor, baño con un peine, salón con una TV, Figura 4, Simbólica).

Elementos de conocimiento especializado sobre aritmética movilizados por Irene

En la actividad descrita, Irene utiliza el lenguaje natural oralmente para ayudar a los niños a construir enlaces entre sus experiencias matemáticas informales, «la situación real» planteada en la casa a través del juego simbólico, los materiales estructurados (fichas Numicon®), los dibujos en papel generados por los niños de la situación planteada y los símbolos formales usados en la ficha escrita (Figura 4) (KoT – registros de representación).

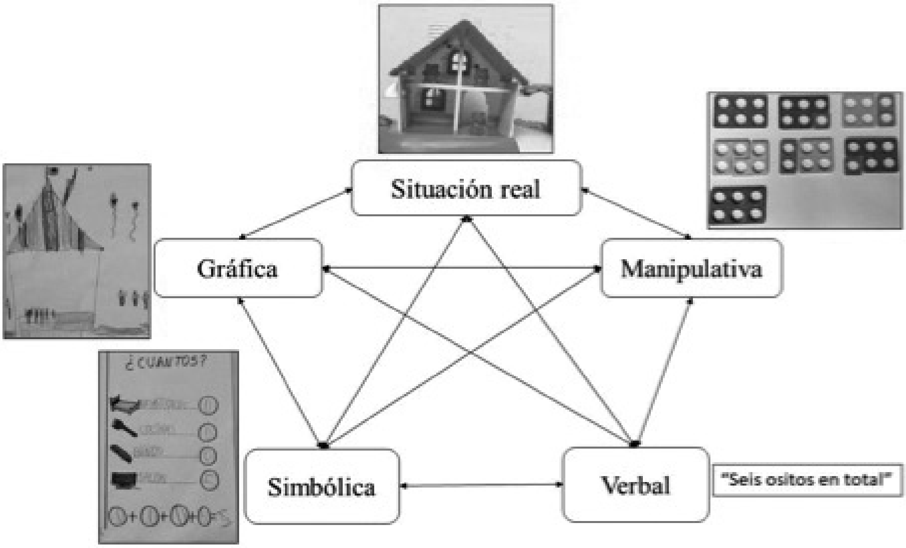


Figura 4. Representaciones facilitadas por Irene
(Modelo adaptado de Lesh; Lesh, Post yBehr, 1987)

Irene es consciente de que la composición-descomposición de números hasta 10 es un contenido central en el aprendizaje del número en Infantil (KMLS – expectativas de aprendizaje). Sus acciones en el fragmento descrito muestran la importancia que ella da al uso de diferentes sistemas de representación para trabajar con sus alumnos las relaciones numéricas y a presentar en paralelo, y delante del grupo, las distintas representaciones de la situación trabajadas en cada momento, para facilitar la comparación (KMT – estrategias). Usa como punto de partida una situación muy cercana a los niños y el juego simbólico, lo que hace que la implicación de estos en la actividad sea alta (mostrando su conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia como sustento de esta elección), pero también sabedora de las dificultades de los niños de manejar cantidades numéricas sin apoyo visual (KFLM – formas de interacción con un contenido matemático). Utiliza el lenguaje para facilitar las conversiones entre representaciones como técnica de enseñanza (KMT – estrategias) y realiza las conversiones entre sistemas de representación en general en el sentido de la más concreta a la más abstracta, pero ante dificultades de los alumnos vuelve a lo concreto – como veremos más abajo en el caso de la descomposición 3+3 (KMT – ejemplos).

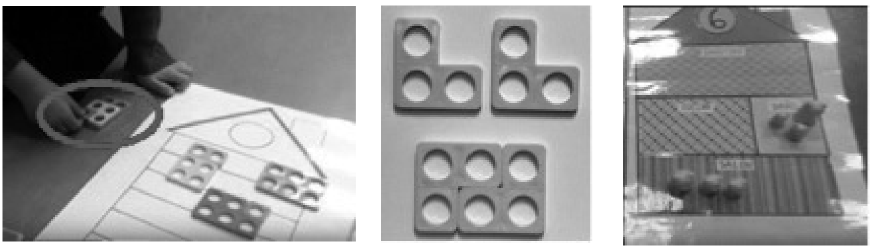
Para facilitar las conversiones entre distintos sistemas de representación, Irene introduce representaciones «mixtas» que tienen características de dos registros diferentes del Modelo de Lesh (Lesh, Post y Behr, 1987) (KoT – registro de representación). En primer lugar, para promover la conversión de la situación real hacia una representación icónico-gráfica, prescinde de la casa de muñecos (de juguete, en 3 dimensiones) que había utilizado en cursos anteriores (Figura 4, Situación real), y la sustituye por una representación icónico-gráfica (Figura 5, c, lámina plastificada) en dos dimensiones, sobre la cual va colocando los osos de plástico. En segundo lugar, utiliza una representación mixta para facilitar el paso de una representación icónico-gráfica a una en lenguaje formal introduciendo símbolos numéricos. Esto queda patente en el diseño que realiza de la ficha que trabaja en la parte final de la sesión (Figura 4, Simbólica) (KMT – estrategias de enseñanza).

Al comenzar la sesión constituye la familia nombrando a cada miembro, «*el abuelo, la abuela, la mamá…*», mientras lo asocia a cada oso del material; parece sabedora de la importancia en la etapa de dedicar un espacio a la construcción de una colección y de favorecer que los alumnos la conciban como tal antes de empezar a identificar el cardinal de la misma (KoT – propiedad). Hace explícito a los alumnos la creación de la colección mediante la enumeración (KMT – estrategias y técnicas de enseñanza), procedimiento de naturaleza pre-numérica y base del conteo (KoT – procedimientos).

Por otra parte, sabedora de la importancia de la resolución de problemas en la actividad matemática (KPM – resolución de problemas), lo utiliza como estrategia de enseñanza (KMT – resolución de problemas como estrategia) al plantear problemas de combinación (Carpenter y Moser, 1983) (KoT – definiciones y propiedades, fenomenología), que describen una relación estática entre dos subconjuntos disjuntos, también llamados partes, que juntos forman el conjunto total o todo, que dan sentido a la relación parte-todo (KoT – definiciones y propiedades). Las preguntas que formula a los alumnos cuando desplaza un oso de una dependencia a otra reflejan su conocimiento de las características relevantes de este tipo de problema (KoT – definiciones y propiedades) y su conocimiento del desarrollo conceptual y procedimental esperado (KMLS), lo que le lleva a ser muy precisa en el tipo de preguntas que formula, en el vocabulario y tiempo verbal utilizado (KoT – registro de representación), basándose en él como recursos para la enseñanza (KMT – lenguaje como recurso de enseñanza): «*¿Cuántos ositos hay ahora en* *el salón?* (parte)… *¿Y en el baño?* (parte)… *¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño?*» (todo).

Cuando introduce una nueva situación en la lámina con los osos, pide a un alumno que represente con el Numicon® esa situación en paralelo, lo que muestra que Irene conoce el potencial del material (KMT – recursos) tanto para representar el cardinal de conjuntos como para la composición y descomposición de los números utilizando la subitización, y decide poner a su disposición solo las piezas de 1 a 6 agujeros para facilitar su tarea («*he sacado estas porque vamos a hacer el 6*») (KoT – definiciones y propiedades).

Irene utiliza la comprobación de la descomposición con el material a través de la superposición como un modo de validar la respuesta que consiste en la comparación de cantidades representadas con ayuda de las fichas (KPM – formas de validación) y lo utiliza como estrategia de enseñanza (KMT, estrategia). En el caso de la descomposición del 3 y 3, el alumno comienza colocando la ficha del Numicon® del 1 sobre la ficha de comprobación (Figura 5, a). Aunque visualmente el alumno tiene la distribución de los osos en las estancias, Irene facilita al alumno la conexión entre los dos sistemas de representación (KMT – estrategia de enseñanza), incidiendo en los elementos del problema que son relevantes para su resolución: «*hay 3 en el baño y 3 en el salón, como ha dicho María*», es decir, el cardinal que corresponde con cada *parte* de la descomposición (KoT – propiedades). El alumno coge la ficha del 3 y la superpone, de manera que los huecos libres suponen la necesidad de seleccionar la ficha del 1 y del 2 (Figura 5, a).



a) b) c)

Figura 5: Dificultades para la descomposición del 6 en 3 más 3 con el Numicon®

Aunque la descomposición 3, 1 y 2 que construye el alumno con las fichas también es 6, no hay una correspondencia entre la descomposición de la modelación con la situación representada en la casita (3 y 3). Irene le corrige así: «*¿Hay un osito solo en una habitación?* (alumno: no). *Hay 3 en el baño y 3 en el salón. Ya tienes 3. ¿Ahora cuál tienes que coger?*». Irene percibe que la dificultad del niño procede, en parte, de la dificultad de encajar la forma geométrica de las dos figuras del 3 (Figura

5, b) de manera que coincida con la forma de la ficha del 6 (KFLM – fortalezas y dificultades) y pide a un compañero que le ayude. Pero dicha dificultad también está condicionada por el interés de la profesora de que los niños validen el resultado siempre mediante la superposición de las fichas (KMT – estrategia condicionada por el recurso), que impone la misma distribución espacial a las distintas descomposiciones, teniendo, de esta manera, siempre presente el número 6 y priorizando la comprobación a la limitación del material (KPM – formas de validación).

Tras la descomposición 3 y 3, se plantea la descomposición 2 y 4, quedando 2 osos en el salón y 4 en el cuarto de baño. Para la validación, una alumna coge las piezas del 2 y del 4, pero antes de que las superponga en la del 6, Irene dice: «*¿Hay alguna también ahí que diga 4 y 2?*». La niña superpone las fichas en la misma descomposición que había del 4 y 2 (situación vista anteriormente, 4 en el salón y 2 en el baño), y la profesora dice: «*Iguales, ¿verdad? Si ya está ahí, es lo mismo. No lo tienes que poner ahí porque ya está puesto ¿no?*». En este fragmento se observa que Irene no aborda la propiedad conmutativa, incluso ordena los sumandos con las fichas sin seguir el orden con el que ha construido la descomposición con los muñecos, desconectando así las dos representaciones por primera vez en la sesión (KSM – conexiones de complejización).

En la última parte de la sesión, Irene introduce explícitamente por primera vez el signo igual, el signo de la suma y numerales escritos (lenguaje formal), consciente de la importancia de no precipitar la aparición del lenguaje simbólico (pudiendo representar esto posibles indicios de KFLM – teorías de aprendizaje; KMLS – nivel de desarrollo conceptual esperado). La representación simbólica no es punto de partida de la actividad, como ocurre generalmente en los libros de texto. Es claro que Irene potencia el desarrollo de la abstracción en sus alumnos a través de la manipulación y de la introducción gradual, en un orden muy preciso, de diferentes sistemas de representación (KMT – estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y teniendo en cuenta sus expectativas de aprendizaje de los alumnos (KFLM – expectativas de aprendizaje).

CONCLUSIONES

A partir de los análisis de vídeos de la práctica de los dos profesores presentados en la sección anterior, hemos identificado elementos del conocimiento especializado del profesor para enseñar matemáticas en la etapa de Infantil. A pesar de que los temas matemáticos sean distintos, algunos aspectos del conocimiento especializado del profesor son comunes en los dos contextos, como, por ejemplo, el uso del lenguaje matemático adecuado a cada contexto o la resolución de problemas como estrategia de enseñanza de los contenidos matemáticos. Sin embargo, otros han emergido específicamente asociados al contenido matemático concreto tratado en cada vídeo (sólidos y visualización, y descomposición del número 6), poniéndose de relieve la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas incluso en la etapa de Infantil.

En estas sesiones observadas en Infantil, algunos elementos de conocimiento de carácter pedagógico general no ligado a la materia parecen hacerse más presentes (y necesarios) que, en otras etapas educativas, por el desarrollo físico y cognitivo de estos alumnos. Por ejemplo, las sesiones se estructuran partiendo de una organización en asamblea con una tarea grupal y, posteriormente, cada niño completa una ficha de manera individual que permite al profesor la evaluación del aprendizaje logrado; se considera la importancia de la interacción social en situaciones particulares de dificultad; los alumnos han de enfrentarse a situaciones relevantes cuya resolución requiere de la manipulación y experimentación.

No obstante, en las situaciones en que el foco es la discusión matemática estos elementos de conocimiento no ligados a la materia aparecen subsidiarios de otros específicos del quehacer matemático asociado a cada uno de los temas que se discuten con los alumnos. Así, cuando Javier insiste en la sesión en que la composición debía realizarse de izquierda y derecha (para reforzar el sentido de la escritura), desde la perspectiva del contenido matemático, el sentido de la composición es irrelevante pero esta opción pedagógica se encuentra al servicio de la importancia que le concede a la sistematicidad en la resolución de problemas (KPM – heurístico). Así, aunque sin menospreciar los aspectos de índole general, se torna evidente que los elementos del conocimiento especializado del profesor en el ámbito de la Matemática moldean su práctica y, en ese sentido, han resultado clave para comprender la práctica de ambos profesores para enseñar matemáticas.

Hay que destacar que, las tareas matemáticas que ambos profesores proponen en el aula tienen su origen en una situación problemática diseñada por ellos mismos que no se corresponden con tareas al uso trasladadas al aula directamente siguiendo las indicaciones de un libro de texto comercial. En ese sentido, sus respectivas prácticas se sustentan en el conocimiento que poseen sobre lo que los alumnos ya saben al respecto y su nivel de desarrollo, lo que se relaciona, obviamente, con su conocimiento de lo que consideran que deben aprender los alumnos en ese curso (KMLS): Descomposición del número 6 y reproducción de composición geométrica desde un enfoque proyectivo y, por otro lado, de las implicaciones para los aprendizajes futuros en los temas centrales de Números y Geometría.

En ambos casos, las tareas propuestas tienen como punto de partida situaciones/contextos que resultan significativos para los niños y que, simultáneamente se convierten en relevantes para el aprendizaje de las matemáticas (las discusiones que ocurren lo permiten). El caso de la situación de la composición de figuras es un tipo de problema relevante en Geometría (KoT – fenomenología) y se realiza mediante fotografías tomadas desde distintas perspectivas (KMT – recursos). La situación de la casa y los osos se organiza mediante la formulación de problemas de combinación que permiten ampliar la comprensión de los alumnos de las relaciones numéricas implicando el todo y las partes correspondientes, que son la base de la descomposición numérica (KoT – propiedades). El análisis de la sesión pone de relieve la necesidad de un amplio y sólido conocimiento especializado en el dominio del MK. En el caso discutido en el ámbito de la Geometría, se moviliza el conocimiento de Javier sobre el papel relevante que el enfoque geométrico proyectivo posee para el conocimiento de los cuerpos geométricos (KSM – gran idea). También se ha reflejado la necesidad de conocer las propiedades relevantes (e irrelevantes) de los cuerpos geométricos, que, en este caso, se desconocen y se asocian de forma incorrecta a la posición de las mismas y a figuras prototípicas (KoT – propiedades), siendo el motivo por el que designa al prisma de base triangular y de poca altura, apoyado sobre una de sus caras laterales, como pirámide. De su práctica se desprende la importancia de conocer los rasgos relevantes de este tipo de problema (identificación de cada figura y la posición de cada una en la composición, tomando como referente simultáneamente la base de cada una y las demás figuras) (KoT – propiedades), del papel de la visualización como proceso matemático para la construcción de conocimiento geométrico (KPM, prácticas particulares); y de la sistematización para reproducir la composición (KPM, formas de proceder en la resolución de problemas). Asimismo, destaca el papel de la validación de la respuesta mediante la comparación entre la fotografía y la composición realizada por el alumno (KPM – formas de validación) como fase importante de la resolución de estos tipos de problemas (KPM – fases de resolución de problemas).

En el caso del trabajo en el ámbito de la Aritmética sobre el número, el foco en el desarrollo de las bases del conocimiento numérico de los alumnos en esta etapa está sustentado en el conocimiento del profesor de la relación entre el todo y las partes que lo forman (KoT – propiedades); del tipo de problemas que promueven la comprensión de dicha relación (KoT – propiedades); de la enumeración como procedimiento para construir una colección con un criterio cuantitativo (KoT, procedimientos); de la comprobación como práctica matemática para validar que la composición de las partes identificadas forman el todo (KPM – formas de validación); y de la subitización para apoyar la validación y reconstruir el todo (KoT – procedimientos).

Podemos destacar otros dos aspectos del MK comunes en la práctica de ambos profesores: el conocimiento de la comparación, como práctica matemática que promueve conocimiento matemático en esta etapa (KPM) y el conocimiento de distintos sistemas de representación y la complementariedad entre ellos (KoT). Ambos elementos de conocimientos están íntimamente relacionados entre sí y, a su vez, con elementos de conocimientos del dominio del PCK, que detallamos a continuación.

La comparación como práctica matemática (KPM) es usada como estrategia de enseñanza (KMT), que se plantea tanto respecto de diferentes estrategias de resolución empleadas por los alumnos, como de distintos modos de representar una estrategia concreta, mostradas en paralelo delante de ellos, facilitando la detección de elementos comunes o diferentes relevantes en cada situación. Así, este conocimiento parece clave para promover el desarrollo del pensamiento flexible o adaptativo de los estudiantes en esta etapa, y está íntimamente relacionado con el conocimiento del papel de distintos sistemas de representación y de la conversión entre ellos (KMT) en los procesos de enseñanza de contenidos aritméticos y geométricos y en la necesidad de los alumnos de esta etapa de partir de representaciones concretas (KFLM – formas de interacción).

El conocimiento de los distintos sistemas de representación (KoT) se muestra decisivo para tomar decisiones sobre los recursos didácticos. El análisis ha revelado la importancia de conocer las bondades y limitaciones del material utilizado para la enseñanza de cada tema (KMT – recursos). Los bloques de construcción y Numicon® representan conceptos abstractos por naturaleza y promueven razonamientos particulares sobre ellos. Javier potencia que los bloques sean observados desde distintos puntos de vista, sobre la base de la visualización, con el fin de observar propiedades de los distintos cuerpos. Irene utiliza el Numicon® como una configuración con puntos para representar colecciones de una situación relevante contextualizada que facilita procesos como la subitización y la correspondencia uno a uno. Puede observarse cómo en ambos casos se promueve la coordinación entre visualización, representación y razonamiento de sus alumnos.

Otro sistema de representación importante se refiere al lenguaje; un elemento clave de la enseñanza de la matemática en Infantil es la selección del vocabulario apropiado, ya sea formal o informal, que transmita el significado de los conceptos abordados (KMT), y de ir introduciendo progresivamente, aunque sin forzar, el registro simbólico (de naturaleza numérica, en el caso de Irene, y geométrica, en el caso de Javier) para favorecer la designación en Infantil (KMT). Javier usa la fotografía, que es una representación icónico-gráfica en 2d de los cuerpos geométricos, como recurso para incluir la perspectiva en el conocimiento de las figuras e Irene utiliza una representación sencilla de una casa con distintas estancias, donde se puede identificar el total de estancias y su distribución como las partes que la componen, para potenciar la idea de la relación parte-todo. Durante los episodios de ambos maestros se les puede observar facilitando conversiones de una representación a otra, evolucionando de las representaciones más contextualizadas a las más simbólicas y recurriendo a las más intuitivas, como las situaciones relevantes y los materiales manipulativos (KMT – recursos, estrategias), en el caso de que los niños presenten dificultades (KFLM – dificultades).

Los elementos de conocimiento especializado que han emergido del análisis de la práctica son un resultado de investigación relevante para el campo que respalda su consideración como contenido de aprendizaje en la formación inicial y continua de profesores. Se observa la especificidad de ese conocimiento para la enseñanza en esta etapa y su enraizamiento en la propia matemática. Así, el dominio del MK, habitualmente excluido de los programas de formación de estos profesionales y de las agendas de investigación, debe ser considerado y abordado con suma seriedad y profundidad. Tres vías trabajo surgen de este estudio: por un lado, profundizar en las relaciones entre elementos de conocimiento especializado que ayuden a comprender mejor el conocimiento que sustenta las prácticas de los profesores. Por otro lado, completar el análisis realizado con el análisis del conocimiento especializado que habría sustentado una gestión alternativa (*Conocimiento Especializado Evocado al Investigador por las Oportunidades*, Liñán, (2017)), que permitiría convertir los vídeos analizados en recursos para la formación del profesor. Por ejemplo, el análisis del vídeo de Irene enfocando la aritmética desde el álgebra como perspectiva avanzada (conexión de complejización, KSM), nos permitiría identificar elementos de conocimiento especializado necesario para, a partir de ciertos ejemplos de las descomposiciones aditivas del número, promover el aprendizaje intuitivo de propiedades de la suma, como la propiedad conmutativa, la asociativa y el elemento neutro, así como la idea de equivalencia entre las distintas descomposiciones. Finalmente, una tercera vía tiene que ver con profundizar en el subdominio *conocimientos de la estructura de la matemática* porque consideramos que debería ser relevante en el conocimiento de este profesional (Klein, 2006; Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro, 2017), al otorgar a las matemáticas en Educación Infantil una entidad que trasciende a la propia etapa (NCTM, 2000).

REFERENCIAS

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University press.

Carpenter, T.P. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.). *Acquisition for mathematic concepts and processes* (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 1-18. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L.C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *22*, 185-205.

Clements, D.H. (2004). Part 1: Major themes and recommendations. En, D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in Mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7–76). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Clements, D.H., Baroody, A.J. y Sarama, J. (2013). Background research on early mathematics. Background Research for the National Governor's Association (NGA) Center Project on Early Mathematics. Recuperado de: https://www.nga.org/files/live/sites/NGA/files/pdf/2013/1311SEME-Background.pdf.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 42, 27-41.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En, C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Liñán, M.M. (2017). *Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/14230.

McCray, J. y Chen, J.Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, *26*, 291-307.

Muñoz-Catalán, M.C., Liñán-García, M.M. y Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, *24*, 4-19.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23.

Oppermann, E., Anders, Y. y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184.

Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil. MEC (2008, 5 de mayo), *BOE, 5*, 1016-1036.

Parks, A.N. y Wager, A.A. (2015). What Knowledge is Shaping Teacher Preparation in Early Childhood Mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education*, *36*(2), 124-141.

Klein, F. (2006). Matemática elemental desde un punto de vista superior. Tres Cantos: Nivola.

Ribeiro, C.M., Muñoz-Catalán, M.C. y Liñán, M.M. (2015). Discutiendo el conocimiento matemático Especializado del profesor de infantil como Génesis de aprendizajes futuros. En, I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P.R. Richard (Eds.), *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium* (p. 575-589). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261.

Schoenfeld, A. H. (2010). How we think. New York: Routledge.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

PERSPECTIVAS PARA LEER LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

PERSPECTIVES FOR READING THE PRACTICES OF MATHEMATICS' TEACHER

Camargo Uribe, Leonor[1]

[1] *Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)*

RESUMEN

Describimos siete perspectivas para analizar la práctica del profesor, que tienen especial relevancia en el ámbito académico latinoamericano. Sin pretender ser exhaustivos ni considerar que son las únicas, buscamos generar un espacio de debate entre los profesores e investigadores interesados en el tema y enmarcar los trabajos presentados en los capítulos previos. En la sección final presentamos un ejemplo de formación de profesores en ejercicio basado en la práctica reflexiva, en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá – Colombia).

Palabras clave: *Estudio de clase, Ciclo de Smyth, Reflexión y acción en comunidades de práctica, Cuarteto de conocimiento, Idoneidad didáctica, racionalidad de la práctica, Modelo MTSK.*

ABSTRACT

We describe seven perspectives to analyze the teacher's practice, which have special relevance in the Latin American academic context. Without pretending to be exhaustive neither to consider that these perspectives are the only ones, we seek to generate a space for

Camargo, L. (2019). Perspectivas para leer la práctica del profesor de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 85-106). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

debate among teachers and researchers interested in the subject, and to build a framework for the previous chapters of this book. In the final section, we present an example of situated teacher training based on reflective practice, which is presently under development in the Maestría en Docencia de la Matemática at the Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá – Colombia).

Keywords: *Lesson study, Smyth cycle, Reflection and action in communities of practice, Knowledge quartet, Didactic suitability, Practical racionality. MKTS model.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la práctica del profesor se inscribe en el campo de estudio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Este se ha desarrollado desde la década del ochenta del siglo XX, a partir de los trabajos de Shulman (1986). Actualmente aún es considerado un ámbito pertinente y necesario de investigación, como lo corroboran innumerables trabajos investigativos (Fernández y Yoshida, 2004; Escudero, 2003; Barbé, Bosh, Espinoza y Gascón, 2005; Martin, Soucy, Wallace y Dindyal, 2005; Llinares y Krainer, 2006; Martin et al., 2005; Rowland, Huckstep y Thwaites,2005; Parada, 2011; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; Herbst, 2018; Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto, Ramírez-García, Escudero-Domínguez, Aguilar y Ribeiro, 2019).

La apertura del campo de investigación sobre el conocimiento profesional del profesor se debe, entre otras razones, a la crisis de confianza en el conocimiento del profesor, derivada de bajos niveles de desempeño de los estudiantes. Como lo señaló Schön (1992) hace más de treinta años, a pesar del cúmulo de propuestas de diseños de enseñanza, técnicas y fundamentos conceptuales, dirigidos a la formación de profesores, la efectividad de la enseñanza se desafía permanentemente y aún no existe un consenso sobre cuáles son las opciones más adecuadas para formar profesores. Esto hace de la investigación sobre el conocimiento del profesor, y en particular sobre la práctica del profesor, un ámbito de investigación vigente y dinámico, del cual difícilmente se puede dar cuenta en unas pocas líneas.

El conocimiento profesional del profesor ha sido concebido de manera general, como de naturaleza teórico-práctica (Flores, 2000). Se configura mediante un entramado de fuentes que provienen de los ámbitos académicos de formación (inicial y continuada), pero también de la propia experiencia escolar, del contexto de la acción educativa y de los retos que demanda la gestión de situaciones de enseñanza y aprendizaje; estas son, por naturaleza, complejas, inciertas, inestables y únicas. La agenda específica sobre la práctica del profesor sitúa la indagación en uno de los aspectos de la dualidad de tal conocimiento. Esto hace que algunos autores, como Llinares (2000) se refieran a este ámbito como «el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en acción». La investigación busca principalmente:

– Establecer las fuentes personales, sociales, organizacionales, culturales y políticas con las que el profesor construye su conocimiento en el curso de la acción de enseñar matemáticas y los procesos interpretativos a través de los cuales dota de significado las situaciones que enfrenta a diario, las examina y dirige su acción (García y Llinares, 1999);

- Dar cuenta del conocimiento práctico que pone en funcionamiento el profesor cuando enseña matemáticas, junto con las justificaciones que elabora para ponderar su práctica, explicar las actividades que realiza y examinar los cambios que introduce a su enseñanza, fruto de la reflexión sobre esta (Llinares y Krainer, 2006);
- Caracterizar el papel que desempeña el profesor en la constitución de prácticas matemáticas en el aula, por su capacidad explicativa para identificar aspectos relevantes de dichas prácticas (Escudero, 2003).

El propósito de esta contribución es describir algunas perspectivas analíticas para investigar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en acción, que tienen especial relevancia en el ámbito académico latinoamericano. Con ello pretendemos proponer una panorámica en la cual enmarcar los trabajos presentados en los capítulos previos. Somos conscientes que la práctica del profesor no se circunscribe a lo que sucede en el aula, sino que se configura en el marco de otras actividades que realiza en la institución educativa y en la fundamentación que logra de su práctica por medio de actividades de autoaprendizaje, trabajo con colegas, asistencia a centros de formación, etc. Sin embargo, privilegiamos la reflexión sobre la práctica del profesor en el aula e intentamos centrarnos en el aprendizaje del profesor en ese ámbito y en el conocimiento que pone en funcionamiento cuando posibilita que sus estudiantes realicen prácticas matemáticas.

Sin pretender ser exhaustivos ni considerar que las perspectivas presentadas son las únicas, buscamos generar un espacio de debate entre los investigadores interesados en el tema. Organizamos las propuestas en dos apartados: perspectivas para identificar y promover el aprendizaje del profesor desde su práctica y perspectivas para analizar aspectos específicos del conocimiento profesional del profesor en acción. En la última sección del capítulo presentamos un ejemplo de proceso de formación de dos profesores en ejercicio, cuyo objetivo es promover prácticas reflexivas y favorecer transformaciones en su práctica, de cara a hacer realidad las orientaciones curriculares colombianas.

PERSPECTIVAS PARA IDENTIFICAR Y PROMOVER EL APRENDIZAJE DEL PROFESOR DESDE SU PRÁCTICA

En este grupo ubicamos investigaciones que centran su interés en identificar qué aprende el profesor en su práctica por medio de la reflexión sobre esta, y proponen vías sobre cómo promoverla. Dado que, como señala Flores (2000), las actividades cotidianas del profesor se dirigen a diferentes estudiantes cuyas identidades individuales, o su configuración como grupos, cambian permanentemente, el profesor tiene que atender problemas profesionales de distinta índole y necesita adaptarse permanentemente a nuevas situaciones inciertas, singulares y desestabilizadoras (Schön, 1992). Esto hace que se vea abocado a experimentar procesos de formación continua, basados en la reflexión sobre su práctica.

Schön (1992) fue pionero en señalar la importancia de la reflexión sobre la práctica como elemento central del aprendizaje de los profesores. Su trabajo es referenciado en múltiples investigaciones posteriores (Liston y Zeichner, 1997; Contreras, 1997; Flores, 2000; Llinares, 2004, 2012, 2013; Fernández y Yoshida, 2004; Godino, 2009). El adjetivo «reflexivo» en la expresión «práctica reflexiva» alude a la actitud del profesor que convierte su acción en objeto de estudio con el fin de comprenderla y transformarla. En palabras de Rogers (2001; citado en Godino y Batanero, 2009), la reflexión permite al profesor «integrar la comprensión lograda en la propia experiencia con el fin de realizar mejores elecciones o acciones en el futuro, así como estimular la propia efectividad global» (p. 12).

A continuación, nos referimos a tres perspectivas para identificar y promover el aprendizaje de los profesores en la práctica.

Estudio de clase

La opción denominada Estudio de clase surgió como una estrategia en Japón (Yoshida, 1999; Fernández y Yoshida, 2004) encaminada a promover indagaciones sistemáticas sobre las prácticas de enseñanza de los profesores en ejercicio, en busca de obtener mejores resultados en los estudiantes. La estrategia se enfoca en el estudio detallado de lo que pasa al interior de las clases de matemáticas cuando se implementan diseños preparados cuidadosamente por equipos colaborativos, conformados por profesores y directivos docentes. Específicamente, ellos llevan a cabo una reflexión sistemática en torno a una situación o problema de enseñanza (por ejemplo, el análisis del funcionamiento de una tarea, la gestión de la clase, el papel de los instrumentos mediadores, los procesos de evaluación, etc.) que ocurre en su propia práctica, sugieren formas de atenderla, las experimentan y reflexionan sobre el funcionamiento de las alternativas efectuadas. La reflexión se considera importante para mejorar sus prácticas.

La implementación de la estrategia se desarrolla en ciclos continuos que comprenden tres fases: exploración–planeación; ejecución–observación; y, revisión–reflexión. (Cuadro 1). Una vez se culmina un ciclo de reflexión o estudio de una clase comienza un nuevo ciclo que puede partir de alguna situación o problema detectado en el ciclo previo o asumir una situación diferente de interés del equipo.

En la Fase 1 (**exploración–planeación**) se comparten preocupaciones sobre lo que ocurre en el aula para decidir, de común acuerdo, cuál es la situación o problema en la que se va a enfocar un ciclo de Estudio de clase. Generalmente, el equipo prioriza la situación que se considere tiene mayor impacto en el aprendizaje de los estudiantes y concreta la situación con una descripción sucinta o una pregunta.

A partir de la definición de la situación que será objeto del Estudio de clase se adelanta un proceso de fundamentación en el que se estudian materiales que puedan servir para interpretar el problema, aclarar dudas en torno a este y planear una clase, colaborativamente, con el fin de enfrentar la situación con miras a remediarla o encontrar alternativas de mejora. El equipo en pleno es responsable de planear la clase. Esta se hace minuciosamente y exige atender asuntos como: detalles específicos de las actividades matemáticas que harán los estudiantes; los aprendizajes esperados; el papel que jugará el material; el uso eficiente del tiempo de la clase; las evidencias de aprendizaje que se tendrán en cuenta, etc. El producto de la planeación colaborativa es un plan escrito de la lección, que describe en detalle el diseño de esta.

Una vez prevista una planeación se prepara la observación de la ejecución de la clase. Un miembro del equipo asume la gestión de la clase y los demás se distribuyen tareas de observación, enfocando la atención en asuntos diferentes. Si así lo consideran, construyen rejillas de registro de información para documentar los sucesos de la clase.

Cuadro 1. Fases de un Estudio de clase.

Fase 1: Exploración–planeación
- Conformación del equipo.
- Delimitación de la situación.
- Estudio del problema.
- Elaboración del plan de clase.
- Selección o construcción del material didáctico.
- Preparación de la observación.

Fase 2: Ejecución–observación
- Realización de la clase.
- Organización de la información registrada en la observación.

Fase 3: Revisión–reflexión
- Reflexión sobre los asuntos observados.
- Reflexión sobre el Estudio de clase.
- Proyección de un nuevo Estudio de clase.

En la Fase 2 (**ejecución-observación**) un miembro del equipo implementa la clase y los demás están presentes como observadores no participantes. Son los responsables de recoger y organizar la información obtenida sobre los sucesos de la clase que será objeto de la reflexión posterior. Por lo general los observadores no interfieren con el proceso natural de la clase. Sin embargo, pueden circular por el salón e incluso acercarse a estudiantes o grupos de estudiantes para registrar comentarios, dudas, gestos, etc., que pueden servir para la reflexión posterior.

Asuntos como la pertinencia de la planeación, la mediación lograda por el profesor, la interacción comunicativa promovida, el empleo de los recursos previstos, etc., son motivo de registro. El hecho de abrir el aula y permitir ser observado para recibir contribuciones posteriores permite al profesor que dirige la clase aprender a partir de la propia experiencia de la realización de esta. Para los observadores es una experiencia enriquecedora que les permite aprender diferentes formas de gestión y conduce a reflexiones personales sobre las propias maneras de orientar las clases.

En la Fase 3 (**revisión-reflexión**) se analiza el impacto de la clase en el aprendizaje de los estudiantes. Se busca profundizar en las condiciones que rodearon el aprendizaje, tales como: el proceso seguido, la gestión, el papel de los instrumentos, la evaluación y los alcances de esta. Se considera que es la fase más importante del Estudio de clase pues se hacen explícitos los aprendizajes del equipo. Generalmente se realizan dos momentos de revisión-reflexión: uno, a partir de la información recogida en la observación, que se adelanta una vez se ha ejecutado la clase; otro, en un encuentro posterior en donde se retoma todo el estudio, para analizarlo en su conjunto y proyectar un nuevo estudio.

El ciclo reflexivo culmina con la elaboración de un documento escrito que reporta el fruto de la reflexión sobre la práctica. En algunos casos, si el equipo así lo decide, se revisa la planeación de la clase y se ajusta de acuerdo con los cambios sugeridos en las reuniones de revisión-reflexión. Otro miembro del equipo dirige la clase en otro grupo y esta es observada por el colectivo. Nuevamente, después de la lección, los profesores se reúnen para compartir sus observaciones comentarios, sugerencias y aprendizajes.

En Japón, la indagación Estudio de clase es apoyada administrativa y económicamente por entidades educativas. Aquellas instituciones que se comprometen con este tipo de estudios son reconocidas como escuelas innovativas y son tenidas en cuenta en las evaluaciones al sistema educativo. Por esa vía se da a los profesores la oportunidad de influir en las políticas educativas. En Colombia, la estrategia Estudio de Clase se implementó en algunas instituciones educativas entre 2003 y 2008, en el marco de un convenio entre el Ministerio de Educación y la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA), quien aportó recursos para su implementación (MEN, 2009).

Ciclo reflexivo de Smyth

Smyth (1991) propone la perspectiva denominada Ciclo reflexivo, la cual se sustenta en la necesidad de acompañar la reflexión sobre la práctica con fundamentación teórica que contribuya al profesor a estudiar su experiencia profesional. El autor afirma que la reflexión debe conducirse en un ciclo que involucra procesos de clarificación de los problemas de la práctica profesional y de comunicación con otras fuentes, para poder plantear reformulaciones a los problemas y a las propuestas de acción para resolverlos. Las nuevas acciones dan lugar al planteamiento de nuevos problemas, que a su vez conducen a un nuevo ciclo de reflexión. De esta manera, la reflexión se vuelve un proceso sistemático que el profesor desarrolla permanentemente para actuar frente a problemas de su práctica con base en experiencias anteriores y transformar su acción.

Para capitalizar la tendencia de los profesores de elaborar interpretaciones específicas de las situaciones que experimentan en su práctica, construir conocimiento profesional en acción y adquirir la capacidad de desenvolverse en situaciones conflictivas e inciertas, Smyth (1991) sugiere un proceso reflexivo que involucra: (a) profundizar sobre el significado de las situaciones que se experimentan y sobre el valor educativo que pueden tener; (b) ahondar sobre las finalidades de las situaciones; (c) realizar acciones prácticas consistentes con las finalidades y con el valor educativo; (d) y argumentar sobre el valor del proceso y de sus consecuencias.

La acción reflexiva propuesta por Smyth (1991) es esquematizada por Flores (2000) de forma análoga a como aparece en el Cuadro 2, en ciclos de cuatro fases que integran cuatro acciones fundamentales de la reflexión y que dan lugar a nuevos ciclos de reflexión.

Cuadro 2. Ciclo reflexivo de Smyth (1991).

Descripción: ¿Qué es lo que hago? ¿Cuáles son mis prácticas? **Información:** ¿Qué teorías se expresan en mis prácticas? ¿Qué significado tiene lo que hago? **Confrontación:** ¿Cómo he llegado a hacer mis prácticas de esta manera? ¿Cuáles son las causas? **Reconstrucción:** ¿Cómo podría hacer mi práctica de otra manera?

Un Ciclo reflexivo comienza con la acción de **describir** de manera precisa una situación de la práctica que los profesores conciben como problemática, para poder abordarla. Después, realizan la acción de **informar(se)** o delimitar la situación y la práctica en la que esta se inscribe, interpretando la situación con base en fundamentos teóricos. En la acción posterior de **confrontar(se)**, los profesores incorporan nuevos elementos al análisis de la práctica, identificando supuestos, creencias, valores, etc. Esta acción se adelanta con otros, pues es a través de la toma de conciencia de otras posibles formas de interpretar la situación que se identifican las limitaciones en la percepción personal y se favorece una mirada en perspectiva de la propia práctica. La confrontación da lugar a la acción de **reconstruir** la situación desde una nueva óptica y hacer propuestas de transformación de la práctica que serán susceptibles de revisión en nuevos ciclos reflexivos.

Según Smyth (1991), su propuesta de Ciclo reflexivo da la oportunidad a los profesores de construir una ruta de concientización progresiva. Esto se logra a partir de procesos de comunicación en los que expresan sus preocupaciones, dudas, factores que limitan su actuación etc., acompañados de oportunidades de verse a sí mismos como agentes de cambio potencialmente activos y comprometidos con su labor, dejando de verla como un ejercicio técnico de reproducción de tareas ajenas.

Reflexión y acción en comunidades de práctica

Parada (2011) propone un modelo para analizar el conocimiento profesional del profesor en la acción y a su vez apoyar procesos de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Este se denomina «Modelo reflexión-y-acción en comunidades de práctica de educadores de matemáticas». El modelo se fundamenta en constructos de la teoría de la práctica social sugeridos por Wenger (1998) tales como comunidad de práctica, participación y reflexión. El primero, comunidad, intenta capturar la idea de que somos seres sociales y no aprendemos de manera aislada sino en comunidades en donde desarrollamos prácticas valoradas socialmente y en donde nuestra participación es importante para los demás y nos permite constituir una identidad en relación con dichas prácticas. Este hecho es innegable en el aprendizaje de los profesores de matemáticas quienes hacen parte de distintas comunidades: la comunidad de profesores de matemáticas, la comunidad de profesores en general, la comunidad del aula de matemáticas, etc. El segundo constructo, la participación, es definida por Wenger (1998) como un proceso complejo que combina hacer, hablar, pensar, sentir y pertenecer, contribuyendo con lo que se conoce y se es en la práctica de la comunidad. Y el tercer constructo que fundamenta el modelo es la reflexión sobre los saberes conceptuales y experienciales, como mecanismo para mejorarlos, corregirlos y potenciarlos, a favor de la educación matemática. Esta reflexión se realiza para, en y sobre la acción de la enseñanza en busca de una coherencia entre las prácticas reales en el aula y los discursos sobre dicha práctica.

El modelo propuesto por Parada (2011) considera tres aspectos sobre los cuales centrar la reflexión: el pensamiento matemático escolar, el pensamiento pedagógico y didáctico de las matemáticas y el pensamiento orquestal. En el Cuadro 3 describimos de manera sucinta los tres procesos de reflexión propuestos por la autora, quien siguió principalmente las ideas de Schön (1992).

Cuadro 3. Modelo de Parada (2011).

Reflexión-para-la-acción: Se centra en la planificación de la actividad matemática escolar de los estudiantes. Se realiza cuando se prepara la ruta cognitiva de los contenidos y objetos matemáticos que van a ser aprendidos por ellos. Es aquí donde el profesor selecciona los recursos que usará en su clase para acercar los contenidos a sus estudiantes, prevé posibles dificultades de aprendizaje y establece posibles alternativas.
Reflexión-en-la-acción: Se centra en los intercambios entre el profesor y los estudiantes en torno al contenido matemático de estudio.
Reflexión-sobre-la-acción: Se centra en la evaluación de la actividad matemática lograda por los estudiantes con respecto a la actividad matemática planeada.

Los tres procesos se repiten de tal forma que Parada (2011) propone una estructura en forma de espiral que perfecciona la reflexión. No se llevan a cabo de manera individual y aislada, sino en el marco de comunidades de práctica en las que los profesores participan para desarrollar pensamiento reflexivo. Dichas comunidades se reúnen para tratar asuntos de interés común y profundizar en su conocimiento a través de una estructura social basada en el aprendizaje como un proceso de participación en la empresa de enseñar matemáticas escolares. La reflexión para, en y sobre la acción se alimenta de intercambios de saberes, producto de las experiencias vividas, permitiendo hacer interpretaciones de estas y promoviendo acciones de mejora. Algunas de las prácticas sobre las que se reflexiona tienen que ver con: seleccionar, diseñar y usar recursos para la enseñanza, proponer tareas (ejercicios, problemas, exploraciones, investigaciones), gestionar la comunicación en el aula, evaluar a los estudiantes y hacer adaptaciones curriculares. Fruto de cada proceso se logra un avance en el conocimiento profesional del profesor en la acción y esta última se optimiza.

En el proceso de **reflexión-para-la-acción** se negocien significados en torno a los contenidos matemáticos de la enseñanza, las maneras de proponer su estudio y de evaluarlos. Los conocimientos que tienen los profesores, fruto de su formación y experiencias previas, son confrontados con aportes sobre fundamentos teóricos que presentan sus colegas. Del intercambio de significados en la comunidad de práctica emergen conocimientos basados en situaciones reales del aula y aplicables en ella.

La **reflexión-en-la acción** permite identificar el conocimiento puesto en acción y posibles situaciones o resultados inesperados. El proceso reflexivo está constituido por elementos intuitivos (por ejemplo, emociones, percepciones, sensaciones) y por elementos racionales (por ejemplo, información, razonamientos, juicios). Estos elementos se interrelacionan para modificar, durante la acción, la gestión del profesor en respuesta a los eventos de la clase, no sólo en situaciones previstas, sino especialmente en situaciones imprevistas que causan sorpresa o llaman su atención. La reflexión conduce al profesor a cuestionar, sobre la marcha, las suposiciones puestas en juego y da lugar a la experimentación de opciones diversas de actuación, empleo de recursos, tipos de interacción, etc.

La **reflexión-sobre-la-acción** se realiza sobre una actividad matemática escolar que ya ha ocurrido. Pretende suscitar una reflexión crítica y evaluativa, en busca de interpretar las situaciones experimentadas, reestructurar nuevas estrategias de acción y tomar conciencia del conocimiento puesto en juego. El ejercicio puede desarrollarse con apoyo de videos de fragmentos de la clase, la revisión de producciones de estudiantes y el contraste entre lo planeado y lo sucedido. Permite a los profesores contrastar el conocimiento ganado con presupuestos contemplados en teorías didácticas y evaluar su pertinencia para el cumplimiento de las metas educativas.

PERSPECTIVAS PARA ANALIZAR ASPECTOS ESPECÍFICOS DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR EN ACCIÓN

En este grupo ubicamos investigaciones que centran su interés en analizar aspectos específicos del conocimiento profesional en acción que se hacen evidentes en las prácticas profesionales. Con la inclusión, en la década del noventa, de marcos de referencia socioculturales al campo de la Educación Matemática, los aspectos a los que se atiende son de diversa naturaleza y abarcan asuntos que atañen no solo al papel del saber individual sino a las influencias de la cultura, la historia, la política, etc., en la configuración del conocimiento profesional del profesor.

Un asunto que ha cobrado interés de los investigadores, debido a la toma de conciencia de la importancia de aspectos sociales y culturales que median la acción educativa, es el análisis de prácticas discursivas. Por ejemplo, la investigación de Planas, Chico, García-Honrado y Arnal-Bailera (2019), reportada en el capítulo 1 de esta publicación, se centra en el análisis del discurso matemático del profesor en clase y en las relaciones de este con los discursos de los estudiantes. Los autores profundizan en aspectos del contexto cultural que regulan dichas relaciones y ponen de presente fenómenos de la comunicación que determinan los modos de hacer matemáticas y de hablar acerca de ello, que tienen que ver con el conocimiento del profesor en acción.

Con el ánimo de ejemplificar las perspectivas investigativas que se centran en analizar aspectos específicos del conocimiento profesional en acción, en los siguientes apartados hacemos referencia a cuatro perspectivas.

El Cuarteto de conocimiento

Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) proponen un modelo, llamado el Cuarteto de conocimiento, para promover discusiones sobre el conocimiento de contenido matemático de los profesores, en el contexto escolar. Estos autores están interesados en indagar por las vías en las que este conocimiento (tanto de matemáticas en sí mismas como del conocimiento pedagógico con el que se hacen comprensibles las matemáticas para otros) interviene en la enseñanza y proponer procesos de desarrollo de conocimiento del profesor en acción. En el Cuadro 4 esquematizamos la perspectiva.

Cuadro 4. Cuarteto de conocimiento de Rowland et al. (2005).

Fundamentación: Conocimiento de contenido matemático que tiene el profesor, fruto de las experiencias académicas, intencionales o no, para desempeñar el rol de profesor. **Transformació**n: Conocimiento de contenido matemático que el profesor transforma y pone en juego para desarrollar formas pedagógicamente poderosas dirigidas a sus estudiantes, las cuales se surgen de la deliberación y juicio informado por la fundamentación. **Conexión:** Conocimiento de contenido matemático que el profesor configura y conecta a partir de partes más o menos discretas de conocimiento de contenido matemático y que se exhibe en la coherencia en la enseñanza en una clase o en una secuencia de clases. **Contingencia:** Conocimiento de contenido matemático que el profesor pone en funcionamiento en eventos inesperados y situaciones contingentes que son casi imposibles de planear.

Según los autores, el primer componente del cuarteto, la **fundamentación**, está enraizado en el bagaje de conocimientos y creencias que el profesor tiene, fruto de sus experiencias académicas y personales. Difiere de los otros tres componentes porque se refiere al conocimiento que se tiene, independientemente de si se pone en funcionamiento o no. Es un conocimiento proposicional que tiene potencial de influir en las decisiones pedagógicas razonadas que adopta un profesor y que supone algo más que imitación o hábito. Dentro de este, los autores incluyen: el conocimiento y la comprensión de las matemáticas per se; el conocimiento de extractos significativos de literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; y, conocimientos y creencias resultado de indagaciones sistemáticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos específicos.

Los otros tres componentes del Cuarteto se refieren a situaciones en las cuales el conocimiento de contenido es usado en la preparación y en la conducción de la enseñanza. Es decir, se enfocan en el conocimiento profesional en acción. El segundo componente del cuarteto, la **transformación**, se relaciona con lo que Shulman (1986) denomina conocimiento base para la enseñanza y tiene que ver con el conocimiento que se pone en juego para ayudar a alguien a aprender matemáticas.

Se hace evidente en las formas de explicar, ejemplificar, representar, justificar, seleccionar o producir tareas y recursos mediacionales y en la gestión misma de las interacciones comunicativas. Es un conocimiento que se fundamenta en literatura de referencia sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, dirigida especialmente a la formación de profesores.

El tercer componente del cuarteto, denominado **conexión**, se refiere al conocimiento de contenido matemático que se pone en juego cuando el profesor articula fragmentos de contenido matemático escogidos por él, para proponer un plan de enseñanza o desarrollarlo en una clase o en una serie de clases. La conexión se hace evidente en la coherencia lógica entre las partes que componen el contenido enseñado en una o varias clases, incluyendo la estructura temática, el orden al desplegar la complejidad, las relaciones entre procedimientos y la organización de tareas.

El cuarto componente del cuarteto, la **contingencia**, se distancia de los anteriores no solo porque no se fundamenta en literatura de referencia ni está basado en decisiones «racionales» de conectar fragmentos de contenido. Tiene que ver con el conocimiento de contenido matemático que se pone en juego en situaciones contingentes o eventos inesperados, que son difícilmente imaginados y por lo tanto casi imposibles de planear. El profesor acude a este conocimiento para responder a ideas de los estudiantes que no están en la línea anticipada por el profesor, en circunstancias en las que intuye una oportunidad de introducir una idea o simplemente cuando tiene una inspiración repentina.

La Idoneidad didáctica

En busca de una perspectiva con la cual analizar el grado de adecuación de un proceso de enseñanza de las matemáticas a los logros de aprendizajes pretendidos, Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) proponen la Idoneidad didáctica. Este es uno de los constructos del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos que contribuyen a comprender y transformar procesos de enseñanza de las matemáticas y, por lo tanto, el conocimiento profesional del profesor en acción. Otros constructos del enfoque son tratados en Vanegas, Font y Pino-Fan (2019) en el capítulo 2.

En el Cuadro 5 listamos las categorías específicas de idoneidad, propuestas por los autores, con las cuales es posible valorar un proceso de enseñanza, pretendido o implementado, como adecuado, óptimo o apropiado para lograr que los estudiantes adapten sus significados sobre el contenido de las clases de matemáticas a los significados institucionales previstos. Como señalan Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013), la valoración de la idoneidad en cualquiera de las seis categorías es un proceso analítico, pues ninguna categoría es observable directamente. Requiere hacer inferencias a partir de conjuntos de indicadores con los cuales valorar el proceso de enseñanza (y por lo tanto del conocimiento profesional del profesor en acción) y promover procesos formativos de los profesores en busca de mejorar el grado de idoneidad.

Cuadro 5. Categorías de Idoneidad didáctica para valorar la adecuación de un proceso de enseñanza.

Idoneidad epistémica: Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. **Idoneidad cognitiva:** Grado en el que los significados promovidos (o pretendidos) por el profesor están en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes. Grado en el que los significados personales logrados por los estudiantes se acercan a los significados pretendidos. **Idoneidad interaccional:** Grado en el que los medios de interacción permiten anticipar, identificar y resolver conflictos de significado y promueven el aprendizaje autónomo. **Idoneidad mediacional:** Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo de la enseñanza y el logro del aprendizaje. **Idoneidad afectiva:** Grado de implicación (interés, motivación, disposición, participación) de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. **Idoneidad ecológica:** Grado en el que el proceso de enseñanza y aprendizaje se adapta al proyecto educativo institucional y a los condicionantes del entorno en donde esta se encuentra.

El modelo MTSK

A partir del trabajo de Shulman (1986) y de Ball, Thames y Phelps (2008), Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) proponen el modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) con el cual buscan caracterizar de forma operativa el conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático que sustenta las acciones del profesor en su práctica. En el modelo, los autores procuran considerar a profundidad la especificidad de la enseñanza de las matemáticas, por lo que las matemáticas se constituyen en la columna vertebral del modelo.

Muñoz-Catalan, Joglar-Prieto, Ramírez-García, Escudero-Domínguez, Aguilar y Ribeiro (2019) presentan el modelo MTSK, en el capítulo 3, y ejemplifican su utilidad investigativa al usarlo de marco de referencia para identificar qué conocimiento especializado sustenta las prácticas de dos profesores de educación infantil. Nosotros hacemos una síntesis de los seis componentes del modelo en el Cuadro 6.

Cuadro 6. Componentes del modelo MTSK

Conocimiento de la estructura de las matemáticas: conocimientos avanzados y elementales mediante los cuales el profesor trabaja la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y viceversa, constituyendo una visión integrada y conectada del contenido de la enseñanza.
Conocimiento de la práctica matemática: conocimiento de las formas válidas de proceder en matemáticas; incluye formas de comunicar, argumentar y demostrar.
Conocimiento de enseñanza de la matemática: conocimiento de estrategias de enseñanza, recursos y materiales, así como conocimiento, personal o institucional, de teorías de enseñanza de las matemáticas, generadas en la investigación.
Conocimiento de los temas: conocimiento de la matemática como disciplina, la fundamentación teórica de los procedimientos estándares y alternativos, distintas formas de representación, la fenomenología de los conceptos y aspectos de la epistemología de las matemáticas vinculados a los significados de un contenido.
Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: conocimiento sobre formas de aprender, procedencia de obstáculos, errores y dificultades al aprender un contenido, formas de interacción de los estudiantes que estimulan su aprendizaje, expectativas e intereses de los estudiantes y conocimiento de teorías de aprendizaje matemático generadas en la investigación.
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas: conocimiento de los referentes curriculares que sugieren en qué momento y con qué nivel de dificultad puede aprender un contenido matemático (lineamientos, estándares, disposiciones).

La Racionalidad de la práctica del profesor

La cuarta perspectiva de la que informamos en esta sección, la Racionalidad de la práctica del profesor, es propuesto por Herbst (2018) para enfocar la atención en las decisiones que toman los profesores en las clases, que conciernen a la transacción de conocimientos en contextos institucionales. Esta mirada pretende ser una opción a consideraciones prescriptivas en las que se asume que lo que hacen los profesores en clase puede ser manipulado a voluntad y se desconoce la fuerte influencia de las políticas educativas y la cultura del trabajo docente.

Más allá de centrarse en identificar o explicar las decisiones que toma el profesor en su clase sobre el contenido matemático, el estilo de la enseñanza o la forma de evaluar, lo que busca Herbst (2018) es aportar un recurso para enfocar la atención en la gestión (local y situada en situaciones y momentos específicos) de las matemáticas que están en juego; por ejemplo, en asuntos como la explicación del cambio en la formulación de un enunciado de un problema dirigido a los estudiantes. Con este recurso, el conocimiento profesional del profesor en acción puede explorarse y fomentarse en relación con: la identificación de aspectos de las concepciones matemáticas que el profesor pone en juego al actuar en clase; la atención a las demandas de conocimientos específicas de una situación en la que el profesor toma decisiones; y, los recursos profesionales que el profesor tiene a su disposición para justificar sus acciones referidas a la gestión del contenido matemático. Su inquietud no se centra en «decidir qué es lo que el maestro debería hacer, sino a estudiar cuál posible es que lo haga» (p. 12).

El constructo Racionalidad de la práctica propone un conjunto de elementos teóricos y metodológicos para estudiar las decisiones del profesor, que Herbst (2018) organiza en tres tipos de recursos (Cuadro 7). Los recursos personales tienen que ver con el conocimiento personal del profesor sobre las matemáticas y con otras características individuales del profesor, propias de su perfil. Para identificar esos recursos, Herbst propone realizar cuestionarios, con base en contribuciones de investigadores como Ball, Thames y Phelps (2008) sobre el conocimiento de contenido matemático de los profesores.

Cuadro 7. Recursos de la Racionalidad de la práctica.

Recursos personales
Conocimiento personal y perfil del profesor
Recursos sociotécnicos disponibles
Normas de instrucción
Obligaciones profesionales

Los recursos sociotécnicos disponibles son recursos sociales y específicos del conocimiento que Herbst (2018) clasifica en dos grupos: las normas de instrucción y las obligaciones profesionales. Las normas de instrucción tienen que ver con las demandas sociotécnicas de la situación de enseñanza. Se refieren a lo que hay que enseñar sobre un conocimiento específico, en una determinada situación, lo que el profesor debe hacer para enseñarlo, lo que hay que aprender en la situación y lo que los estudiantes tienen que hacer para aprenderlo. Pueden referirse al intercambio académico, la división del trabajo y la temporalidad. Las primeras expresan las expectativas del conocimiento que está en juego y el trabajo que se debe hacer para poder obtenerlo; las segundas expresan expectativas que se refieren a quién tiene que hacer qué y con qué herramientas; las terceras expresan a la organización del tiempo y aluden a expectativas acerca de cuándo hay que hacer las cosas y cuánto tiempo puede tardar hacerlas.

Las obligaciones profesionales se refieren a los recursos sociotécnicos de los que dispone el profesor para justificar decisiones, dada su posición institucional de profesor de matemáticas. Uno de tales recursos, según Herbst (2018), es el currículo previsto, el cual generalmente es implementado a través de los libros de texto. Pero la perspectiva no busca identificar cuáles son tales recursos sino identificar: cuáles son los conocimientos sobre la enseñanza que son movilizados por las situaciones de trabajo profesional, en qué condiciones se puede afirmar que los contenidos matemáticos que el profesor debe enseñar se ponen en juego en la tarea que los estudiantes realizan y cómo describir la interacción en clase en términos de los objetos curriculares en juego.

Para Herbst (2018) las obligaciones profesionales reúnen cuatro tipos de aspectos de la práctica para los que los profesores deben tener una disposición. Estas son: obligaciones con la disciplina matemática, que los predisponen a presentar las ideas de una determinada manera y con un lenguaje específico; obligaciones con los estudiantes como individuos, que los predisponen a atender sus necesidades emocionales; obligaciones con el grupo de estudiantes de una clase, como colectivo social, que los predisponen a promover formas apropiadas de comunicarse entre los miembros de la clase; y obligaciones institucionales, que los predisponen a atender requerimientos como cumplir los programas, atender el calendarios escolar, etc.

UN EJEMPLO PROCESO DE FORMACIÓN PROFESIONAL

En este apartado ilustramos el uso de una de las perspectivas mencionadas en un proceso de formación profesional que busca proponer una reflexión guiada (Nolan, 2008), en el marco del programa de Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional, dirigido a la formación continuada de profesores de matemáticas. En este proceso dos profesores, Luis y Alex, construyen conocimiento en el curso de la acción y experimentan procesos interpretativos a través de los cuales dotan de significado las situaciones que enfrentan y examinan su trabajo diario para redirigir sus acciones.

Luis y Alex trabajan en una institución educativa rural localizada a cuatro horas de Bogotá, hace alrededor de cinco años, desde que obtuvieron su título profesional. Se inscribieron al programa de Maestría incentivados por la búsqueda de alternativas para motivar a sus estudiantes al estudio de las matemáticas y de estrategias para mejorar el rendimiento en las pruebas externas que en Colombia se aplican en los grados 5° (9 - 11 años), 9° (13 - 15 años) y 11° (15 - 17 años).

En la cohorte en la que estudian Luis y Alex, el currículo de la Maestría busca promover, a lo largo de dos años, dos ciclos de reflexión sobre su práctica, encaminados a desarrollar conocimiento profesional en acción. Estos han sido organizados siguiendo la propuesta de Jackson (1975; citado en Llinares, 2000) y el Ciclo reflexivo de Smyth (1991).

El primer ciclo de reflexión inició a partir de las inquietudes que los estudiantes tenían sobre cómo motivar a los estudiantes de grado 9° a aprender geometría y lograr que tuvieran mejor rendimiento. El profesor del espacio académico dirigido a construir el proyecto de trabajo de grado les pidió elaborar una descripción sobre cómo eran sus clases de geometría. Con esta tarea dio inicio a la acción de «describir», propuesta por Smyth (1991) en su modelo. Al narrar su práctica, Luis y Alex mencionaron asuntos como los siguientes:

> Como docentes direccionamos nuestras clases en su mayoría con los métodos tradicionales, sin tener en cuenta procesos de enseñanza matemática, ni la variación de actividades y ejercicios significativos para el aprendizaje matemático. [...] Nuestra concepción hacia la enseñanza de las matemáticas se rige por cómo nosotros aprendimos, por medio de procedimientos y algoritmos para solucionar cierta cantidad de ejercicios.

El trabajo de fundamentación realizado en los cursos del programa, junto con preguntas dirigidas a planear una clase de geometría que se apartara de los «métodos tradicionales» introdujo a Luis y Alex en la Fase preactiva del primer ciclo de reflexión. Esta fase guarda estrecha relación con lo que Parada (2011) denomina Reflexión-para-la-acción si se asume que el grupo de estudiantes inscritos en esta cohorte del programa conforman una comunidad de práctica. Algunas de las preguntas dirigidas a la acción de «informar», realizadas por el profesor se dirigían a identificar los instrumentos conceptuales y técnicos a usar, las previsiones sobre la gestión de la clase, el discurso que se favorecería y cómo se haría la valoración del aprendizaje.

La planeación de una clase de geometría para estudiantes de 12 a 14 años, realizada por Luis y Alex en la Fase preactiva del primer ciclo de reflexión se centró en la enseñanza del cubo. Ellos decidieron, influidos por lecturas sobre el uso de material lúdico, explicar a los estudiantes cómo construir cubos utilizando módulos de origami. Según la planeación, en la clase los estudiantes debían construir dos cubos y luego responder preguntas como: «¿Cuántas aristas convergen en el mismo vértice?, ¿cuántas aristas, vértices y caras se pueden apreciar desde varias perspectivas de vista del cubo?, ¿con cuál de los dos módulos es más fácil hallar el total de aristas, vértices y caras del cubo?

Luis y Alex implementaron su clase intentando seguir la planeación (Fase interactiva). Al terminar esta, consignaron en diarios personales los principales sucesos de la clase y las reflexiones producto de su acción. Esta reflexión fue dirigida por el profesor quien pretendió suscitar una revisión del conocimiento puesto en juego frente a situaciones contingentes, elemento central del conocimiento profesional del profesor en acción, tal como lo sugieren Rowland, Huckstep y Thwaites (2005). Posteriormente, en la Fase postactiva el profesor promovió una discusión colectiva buscando la confrontación, como se sugiere en el modelo de Smyth (1991).

En su diario en el que reportaban sus reflexiones, Luis y Alex comentaron asuntos como los siguientes:

> Observamos que el recurso (origami modular) no favoreció el objetivo de la clase, pues ésta terminó centrándose en explicar los pasos para la construcción de los cubos y dejamos de lado el análisis de propiedades y las conjeturas que queríamos que los estudiantes formularan.

En la Fase Preactiva del segundo ciclo de reflexión Luis y Alex adelantaron un nuevo proceso de fundamentación, dirigido a ahondar en el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje del cubo. Esto con miras a informarse para proponer una segunda planeación. Los estudiantes propusieron dos problemas que, según ellos, podrían favorecer un trabajo más centrado en la actividad geométrica de sus estudiantes, que el promovido a partir de la elaboración de los módulos de origami. El primer problema consistía en descubrir y justificar qué ángulo se forma con dos diagonales de caras del cubo que comparten un vértice y el segundo consistía en determinar y justificar qué corte hacer a un cubo sólido para obtener una sección hexagonal regular. Desde su punto de vista y fundamentados en el estudio de procesos de pensamiento relacionados con el sentido espacial, estos problemas permitirían a los estudiantes desarrollar procesos de visualización, representación, conjeturación y justificación.

Luis y Alex comenzaron a planear su nueva clase con base en los dos problemas. Al estudiar los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, formulados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), vieron que allí se sugería que las situaciones problemas propuestas tuvieran nexos con en el entorno en el que los estudiantes viven. Como la institución educativa en donde trabajan es agroindustrial y localizada en un municipio deprimido económicamente, optaron por concebir otro tipo de enseñanza más conectada con el proyecto educativo del colegio y que ayudará a atender la problemática social del entorno.

En busca de opciones, decidieron proponer, en la clase de geometría del grupo de 9°, la elaboración de un proyecto dirigido a cultivar ahuyamas «cúbicas», como una posibilidad de estimular la economía del municipio[1]. Planearon una clase en la que proponían a los estudiantes analizar qué ventajas tendrían las ahuyamas cúbicas, buscando que ellos aludieran a propiedades del cubo, como el hecho de que se apila y no deja espacios, con lo cual su transporte y almacenamiento se favorecen. Después pedirían a los estudiantes construir estructuras cúbicas para encerrar las ahuyamas pequeñas y condicionar su crecimiento a moldes cúbicos. Al realizar esta tarea, buscaban promover el estudio de propiedades de las caras del cubo, de sus aristas y de sus diagonales. Finalmente, decidieron pedir a los

[1] La idea fue tomada de proyectos japoneses y españoles que consultaron en Internet. Ver por ejemplo:

https://www.google.com.co/search?q=video+patillas+c%C3%BAbicas&oq=video+patillas+c%C3%BAbicas&aqs=chrome..69i57.4630j0j8&sourceid=chrome&ie=UTF-8

estudiantes elaborar un documento, dirigido al alcalde del pueblo, explicándole el proyecto para solicitar recursos. En este, los estudiantes debían hacer representaciones de las estructuras cúbicas, promoviendo con ello el estudio de diversas formas de representación. Adicionalmente, debían explicar al alcalde cómo lograr tajadas hexagonales de ahuyama, para fomentar la compra del producto, junto con la producción de ahuyamas cúbicas.

Actualmente, Luis y Alex se encuentran en la Fase interactiva de esta nueva planeación. Hasta el momento se encuentran satisfechos pues han visto que la clase es más dinámica, los estudiantes están interesados por hacer las estructuras cúbicas y han aprendido lenguaje, elementos constitutivos del cubo y algunas propiedades. El proceso no está exento de preocupaciones y ellos están expectantes por los aprendizajes logrados. El balance realizado en la Fase postactiva les permitirá rediseñar nuevamente su clase sobre el cubo en un nuevo ciclo de reflexión. Por ahora, avanzan en la reflexión crítica sobre su práctica. En sus diarios menciona, por ejemplo:

> No nos cuestionábamos mucho sobre nuestra manera de proceder y en algunas ocasiones en que intentamos hacer cambios, nos faltaban herramientas. Por ejemplo, cuando propusimos la clase sobre construir cubos con origami, tuvimos en cuenta el recurso, pero no profundizamos en para qué lo usábamos y terminamos haciendo una clase tradicional en la que los estudiantes tenían que memorizar algunas definiciones.

PROYECCIÓN

Las perspectivas descritas brevemente en los apartados anteriores muestran la riqueza de marcos que pueden ser empleados en la investigación sobre la práctica del profesor. Desde diferentes ópticas y enfocando la atención en asuntos diversos, constituyen un insumo para el trabajo investigativo y el desarrollo profesoral.

Vemos necesario que el campo investigativo de la práctica del profesor de matemáticas avance de manera más decidida hacia la formulación de proyectos enfocados al desarrollo profesional, de tal forma que la producción se centre menos en la descripción y caracterización del conocimiento práctico del profesor y se dirija a la búsqueda de transformaciones efectivas que impacten la enseñanza y aprendizaje de niños y jóvenes. Probablemente, una ruta que puede dar buenos resultados es la constitución de colectivos de profesores, apoyados por investigadores, que atiendan problemáticas específicas de sus prácticas y lleven a cabo acciones de desarrollo profesional situado.

REFERENCIAS

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J.; Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C., C. Haser y M.A. Mariotti (eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalaya, Turquía: ERME.

Escudero, I. (2003). *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje*. (Tesis doctoral). Sevilla: Universidad de Sevilla.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Flores, P. (2000). Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA, 5*(2), 113-138.

García, M. y Llinares, S. (1999). Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño. *Quadrante, 8,* 61-84.

Godino, J.D. y Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (ed.). *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*. Capítulo 1. (pp. 9-34). Melilla: Universidad de Granada.

Godino, J.D.; Batanero, C.; Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT, 8*(1), 46-74.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII,* 2, 221-252.

Herbst, P. (2018). Teoría y métodos para la investigación de la racionalidad de la práctica en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educación Matemática, 30*(1), 9-46.

Liston, D.P. y Zeichner, K.M. (1997). *Formación del profesorado y condiciones sociales de la escolarización.* Madrid: Morata.

Llinares. S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (coord.) (2000). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp. 109-132). Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación. Lisboa, Portugal.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on thePsychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 18*(36), 93-115.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en educación Matemática*, 2, 53-70.

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50*, 117-133.

Martin, T., Soucy, S., Wallace, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studiesin Mathematics, 60*(1), 95-124.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Libros y Libros S.A.

MEN. (2009). *Estudio de clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas*. Bogotá: Agencia de Cooperación Internacional del Japón, JICA.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood, 33*(1), 31-36.

Parada, S.E. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: un modelo de desarrollo profesional.* [Tesis doctoral]. México, D.F.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Unidad Distrito Federal.

Planas, N., Chico, J, García-Honrado, I, Arnal, A.(2019). Discursos del alumno y del profesor en clase de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 19-41). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Rowland, T.; Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 255-281.

Schön, D. (1993). Teaching and learning as a reflective conversation. En L. Montero y J. M. Vez (Eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado.* (pp. 5-27). Santiago de Compostela, España: Tórculo Ediciones.

Schön, D.A. (1992). *Formación de profesionales reflexivos*. Barcelona: Paidós.

Shulman, L. (1986). Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación,* 294, 275-300.

Vanegas, Y., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Análisis de la práctica profesional de un profesor cuando explica contenidos de medida. En, E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. Gonzánez (ed.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional.* Capítulo 2. (pp. 43-62). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2/3), 133-170.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University.

Yoshida, M. (1999). *Lesson study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development.* (Tesis doctoral). Chicago: Universidad de Chicago.

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

TEACHERS' KNOWLEDGE

Climent, N.
Universidad de Huelva

El conocimiento del profesor en relación con la enseñanza de la matemática ha sido objeto de numerosas investigaciones desde hace más de tres décadas. Además, el interés en esta temática se mantiene vivo, como indica que más de un tercio de los artículos publicados en el *Journal of Mathematics Teacher Education* en los últimos años se han centrado en el conocimiento del profesor de matemáticas, según señalan Lin y Rowland, 2016, en su revisión sobre la investigación centrada en este tema en el seno del PME. Estos mismos autores afirman que este interés no muestra signos de abatimiento en el momento de su revisión. La investigación sobre conocimiento del profesor ha avanzado significativamente tanto en la conceptualización de dicho conocimiento como en el estudio de su medida (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016).

Esta sección presenta cuatro capítulos con aproximaciones diferentes al estudio del conocimiento que poseen estudiantes para profesor, al conocimiento deseable para la enseñanza de la matemática y para el inicio de la formación como futuro profesor, así como al papel de dicho conocimiento en el desarrollo de una competencia profesional. El conocimiento del profesor se aborda tanto desde modelos cognitivos, como desde una perspectiva sociocultural. Se estudia el conocimiento referido a ideas transversales de la matemática, a la práctica matemática de definir

Climent, N. (2019). El conocimiento del profesor. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 107-110). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

y a contenidos matemáticos base. La sección cierra con una visión general de la investigación internacional sobre el conocimiento del profesor, identificando líneas de investigación emergentes.

El primero de los capítulos, de Gorgorió y Albarracín, se sitúa en el momento del acceso de los estudiantes a su formación inicial como maestros y problematiza el conocimiento deseable de las matemáticas elementales como punto de partida en dicha formación (al que denominan conocimiento matemático fundamental). Además de caracterizar este conocimiento, describen aspectos considerados en el diseño de una prueba piloto para evaluarlo y algunos de los resultados de esta prueba. Finalmente se comparan los resultados en la prueba de conocimiento matemático fundamental de un grupo de estudiantes para profesor en el inicio de su formación con su calificación en las pruebas de matemáticas de acceso a la universidad. De este contraste los autores concluyen la necesidad de la realización de pruebas específicas para la selección de candidatos a la formación inicial de maestros.

En el capítulo de Gavilán-Izquierdo, Martín-Molina, González-Regaña, Toscano, y Fernández-León se aborda cómo es el conocimiento matemático de estudiantes para maestro sobre la práctica matemática de definir (referida a cuerpos geométricos), a través del análisis de su discurso. Analizan los datos, obtenidos mediante un cuestionario de preguntas abiertas, considerando el uso de palabras y las narrativas que construyen los estudiantes, desde un enfoque basado en la teoría de la comognición. De los resultados obtenidos, los autores concluyen en la identificación de dificultades en los estudiantes a la hora de definir, tanto en vocabulario como en qué es definir y las características de una definición matemática, confundiendo en algunos casos definición con descripción.

Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado muestran cómo el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK puede servir de base para el diseño de la formación inicial de maestros de Primaria en dos niveles: en la delimitación del contenido de la formación y en el diseño de tareas profesionales. Esto se ejemplifica con el contenido de una materia del grado de Educación Primaria en la Universidad de Huelva y con la generación desde el MTSK de una tarea para dicha formación inicial. El diseño de tareas formativas se basa en el análisis previo por parte de los formadores-investigadores del conocimiento que se moviliza en situaciones de enseñanza reales de matemáticas. Se nos presentan algunos resultados, desde el punto de vista del conocimiento especializado que se moviliza y sobre la implementación de una de estas tareas formativas.

El capítulo de Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald se sitúa en la formación inicial de profesores y se plantea como objetivo caracterizar el papel del conocimiento de matemáticas para la enseñanza en la competencia «mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza». Se describen distintos modos de uso del conocimiento en relación con el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, referidos a los argumentos prácticos dados por los estudiantes para profesor a la hora de interpretar situaciones prácticas. Se aborda también la generación de contextos que permitan aprender a usar ese conocimiento, en los que se utilizan representaciones de situaciones prácticas profesionales apoyadas en registros de la práctica. Los autores muestran dos ejemplos de tales contextos en la formación inicial de profesores de Primaria.

En el capítulo final de esta sección, Figueras y Sáiz presentan una panorámica de la investigación sobre conocimiento del profesor de matemáticas a nivel internacional. Organizando esta revisión en torno a cuatro preguntas, reflejan algunos trabajos que han estudiado las relaciones entre conocimiento del profesor y enseñanza eficiente, el conocimiento práctico del profesor, el conocimiento que se requiere para enseñar de modo competente y el profesor como productor de conocimiento. Las autoras sitúan los capítulos de esta sección en la panorámica que presentan y finalizan con algunas indicaciones sobre futuras líneas de investigación.

La diversidad de los capítulos de esta sección da muestras de la complejidad del propio constructo conocimiento del profesor (en relación con las matemáticas) y de la investigación en este foco. Podemos apreciar variedad en las aproximaciones metodológicas y de constructos teóricos en los que se apoyan las investigaciones. El foco en el conocimiento del profesor permite cuestionarse tanto el acceso a la formación inicial como la propia formación inicial de profesores. Además, determinadas conceptualizaciones del conocimiento del profesor derivan en una perspectiva profesional de la formación inicial de profesores (donde el conocimiento se legitima en relación con la enseñanza de las matemáticas y se construye en contextos de enseñanza y aprendizaje). De este modo, el estudio sobre el conocimiento del profesor deriva en propuestas para promover el crecimiento de dicho conocimiento.

Charalambous, C.Y. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics Education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. In L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp 19-59). UK: Routledge.

Lin, F-L. y Rowland, T. (2016). Pre-Service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. In A. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PREVIO A LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS MAESTROS: NECESIDAD Y CONCRECIÓN DE UNA PRUEBA PARA SU EVALUACIÓN

MATHEMATICAL KNOWLEDGE PRIOR TO THE INITIAL EDUCATION OF TEACHERS: THE NEED FOR AND SPECIFICATION OF A TEST FOR THEIR EVALUATION

Gorgorió, N., Albarracín, L.
Universitat Autònoma de Barcelona

RESUMEN

El conocimiento matemático de los alumnos que acceden a un Grado de Maestro de Educación Primaria (GEP) debe ser lo bastante sólido como para que durante su formación puedan construir un conocimiento de los contenidos matemáticos y de su didáctica suficiente para iniciarse en la profesión docente. En este capítulo presentamos evidencias empíricas de la distancia existente entre el conocimiento que poseen los estudiantes que ingresan al GEP de una universidad catalana y el que sus profesores desearíamos que tuviesen, que describimos como conocimiento matemático fundamental (CMF). Presentamos el desarrollo de una posible concreción del CMF en ámbitos de contenido matemático y, a partir de evidencias empíricas, justificamos la necesidad de implementar una prueba específica que evalúe el conocimiento matemático de los aspirantes a ingresar en un GEP, con carácter complementario a los requisitos de acceso existentes.

Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2019). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 111-132). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca..

Palabras clave: *Formación inicial de maestros, evaluación de los estudiantes para maestro, conocimiento matemático fundamental, educación matemática.*

ABSTRACT

The mathematical knowledge of students who access a Primary Education Teacher's Degree program (GEP) must be solid enough so that during their education as teachers they can build up a knowledge of the mathematical content and its didactics sufficient for them to enter the teaching profession. In this chapter we present empirical evidence of the distance between the knowledge that the first year of the GEP at Catalan universities have and the knowledge that their teachers would like them to have, which we describe as fundamental mathematical knowledge (FMK). We present the development of a possible concretion of the FMK in areas of mathematical content knowledge and, based on empirical evidence, we justify the need to implement a specific test that evaluates the mathematical knowledge of the candidates to enter a GEP program, as a complement to the existing access requirements.

Keywords: Pre-service teacher education, student-teacher evaluation, elementary school mathematics, Mathematics education.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo introducimos los estudios desarrollados por nuestro grupo de investigación dirigidos a establecer una primera concreción de los conocimientos matemáticos necesarios para poder iniciar con garantías el Grado de Maestro en Educación Primaria (GEP). A partir de la necesidad de que los alumnos que acceden al GEP posean un conocimiento amplio y profundo de las matemáticas que van a enseñar, presentamos la noción de *conocimiento matemático fundamental* (a partir de ahora CMF). Partiendo de la idea de CMF, explicamos dos procesos que transcurrieron en paralelo: la concreción del CMF en dominios específicos de contenido y el desarrollo de una prueba de matemáticas específica diseñada para evaluar el conocimiento matemático de los alumnos que acceden al GEP. Seguidamente, mostramos los resultados obtenidos al aplicar la prueba desarrollada en un estudio piloto que evidenció las carencias en el conocimiento matemático en un grupo de alumnos que acababan de iniciar el GEP. Finalmente, exponemos la necesidad de introducir como requisito de acceso a los GEP una prueba específica que evalúe el conocimiento matemático puesto que, por una parte, no todos los alumnos que acceden al GEP se examinan de matemáticas en las PAU y, por otra, los resultados de nuestra investigación pusieron de manifiesto que las pruebas de matemáticas de la selectividad no constituyen un requisito que garantice que los estudiantes que las han superado tengan un dominio suficiente del CMF.

Partimos de la convicción de que una educación matemática que facilite que todos los alumnos alcancen las competencias matemáticas básicas puede contribuir al desarrollo de una sociedad más cohesionada y más justa. En las conclusiones del informe de 2011 del Eurydice Network (P 9 Eurydice Network, 2011) se establece que los docentes tienen un papel central en el desarrollo de las reformas necesarias para la mejora de la educación matemática de los jóvenes. En el informe se señalan distintos retos a superar, entre los que se incluye fortalecer el conocimiento y las habilidades matemáticas de los maestros. Por otra parte, tal como señalan Montalvo y Gorgels (2013), si se considera como referencia el efecto de la calidad de los profesores en los resultados de los estudiantes y el impacto de éstos sobre el crecimiento económico, se constata que incluso una mejora pequeña de la calidad del profesorado tiene un impacto sustancial sobre el crecimiento económico.

El estudio TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) puso de manifiesto diferencias y deficiencias en el conocimiento matemático de los estudiantes de distintos países. España se situó por debajo de la media de los países participantes de la Unión Europea y la OCDE. A partir de los resultados obtenidos en TIMMS, se crea el estudio TEDS-M (*Teacher Education Study in Mathematics*) de la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*, que analiza comparativamente a nivel internacional el conocimiento matemático que han adquirido los estudiantes para maestro al terminar su formación. TEDS-M implicó a 15 países, entre 2006 y 2009, y en él participaron la mayoría de los centros de formación de maestros de nuestro país.

En el estudio TEDS-M las características individuales de los alumnos aparecen como la causa principal de su rendimiento en matemáticas. Sin embargo, el conocimiento del profesor aparece como la causa más clara entre las no relacionadas con el alumno, mucho más que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). El estudio TEDS-M aparece como un hito en tanto que aporta evidencias conclusivas sobre la importancia del conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. En esta misma línea, Lacasa y Rodríguez (2013) señalan que existe una sustantiva correlación entre el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Magisterio en España y su nivel de conocimientos de didáctica de las matemáticas y que la causalidad se mueve desde los conocimientos matemáticos a los conocimientos sobre su didáctica.

En España, los estudios dirigidos a determinar el conocimiento matemático inicial de los alumnos que acceden al GEP siguen evidenciando la necesidad de encontrar estrategias para garantizar su adecuada formación inicial. A pesar de que los estudiantes que llegan a la universidad han superado con éxito las etapas educativas previas –al menos desde el punto de vista del sistema– son varios los estudios que muestran que los estudiantes que acceden al GEP siguen teniendo dificultades con las matemáticas. Así, Arce, Marbán y Palop (2017), utilizando una prueba de competencias básicas de 6º de Primaria, identificaron carencias y dificultades de los alumnos que acceden al GEP relativas a aspectos esenciales como la proporcionalidad directa y los porcentajes, la aplicación de procedimientos de medida o la interpretación de resultados en situaciones que involucran la magnitud tiempo. Sus resultados son coherentes con los mostrados por Nortes y Nortes (2013) que utilizaron una prueba de competencias básicas de 3º de Educación Secundaria. Estos mismos autores (Nortes y Nortes, 2018) utilizaron la prueba de ingreso al Cuerpo de Maestros de la Comunidad de Madrid con alumnos de 2º y 4º del GEP de la Universidad de Murcia, mostrando que solo un 17,8% de los futuros graduados superarían dicha prueba. Estos trabajos, junto con los desarrollados desde nuestro grupo de investigación, son evidencias que apuntan a la necesidad de actuar para dotarnos de herramientas que permitan garantizar que los estudiantes que acceden a un grado de maestro poseen un sólido conocimiento matemático.

CONTEXTO

El 6 de noviembre de 2013 se estableció un convenio de colaboración entre la Generalitat de Catalunya y las universidades catalanas con grados de magisterio, para el desarrollo del Programa de Millora i Innovació en la Formació de Mestres –MIF– (ver http://mif.cat/410-2/). El programa se viene desarrollando desde el curso 2013-14 con el objetivo de contribuir a la mejora de la formación inicial de maestros, abriendo el debate sobre el modelo actual de formación.

Uno de los campos de actuación fue la introducción de instrumentos de registro de la mejora del dominio por parte de los estudiantes de los contenidos relacionados con las competencias básicas de la educación primaria. Por ello, en el contexto del programa MIF, el Govern de la Generalitat y las universidades catalanas, tanto públicas como privadas, acordaron establecer una Prueba de Aptitud Personal (PAP) obligatoria y común para acceder a los grados de Maestro en Educación Infantil y Maestro en Educación Primaria. De esta forma, el Consell Interuniversitari de Catalunya (CIC) aprobó, con fecha 30 de enero de 2014, la incorporación de una PAP para el acceso a los grados de maestro y, posteriormente, todas las facultades aprobaron incluir en las memorias de dichos grados la superación de la PAP como requisito de ingreso. En la actualidad ya existen grados universitarios de marcado carácter profesionalizador con requerimientos para el acceso complementarios a las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) entre ellos los de Ciencias de la actividad Física y el Deporte, Cinematografía o Traducción e Interpretación.

Para el curso 2014-15, se estableció que la PAP se consideraría superada a través de la obtención de una nota igual o superior a 5 como resultado de la media aritmética de los ejercicios de lengua catalana y lengua castellana de la fase general de las PAU, siempre que ambas fueran iguales o superiores a 4. El 15 de diciembre de 2014, el CIC llegó a un acuerdo, promovido desde el Programa MIF, para avanzar hacia una PAP específica. El acuerdo estableció que, a partir del curso 2017-18 incluido, para acceder al grado de Maestro en Educación Infantil, al grado de Maestro en Educación Primaria y al doble grado en Educación Infantil y Primaria impartidos por las universidades públicas y privadas del sistema universitario catalán, los candidatos deben superar una PAP que evalúa, entre otros aspectos, las competencias lógico-matemáticas. En este contexto, la primera autora recibió el encargo del coordinador del programa MIF de preparar una propuesta para la prueba de competencia matemática de la PAP.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL

En las tres últimas décadas se han desarrollado diversos modelos teóricos que describen el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, atendiendo a las necesidades específicas de la enseñanza. A nivel internacional, destacan las aportaciones de Shulman (1986) quien establece la noción de *conocimiento pedagógico del contenido*, la de Ball y sus colaboradores (Ball, Thames and Phelps, 2008) quienes desarrollan la idea de *conocimiento matemático para la enseñanza,* y la de Rowland (2008) con la definición del *cuarteto de conocimiento*. En el ámbito español debemos destacar la noción de *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), las de *conocimientos y competencias didáctico-matemáticas* (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018) y la de *competencia de la mirada profesional* (Llinares, 2012). La diversidad de marcos teóricos es un reflejo de la complejidad de los conocimientos y las competencias requeridos en la práctica del profesor de matemáticas. Sin embargo, los marcos teóricos mencionados centran su atención en el desarrollo profesional durante la formación inicial o en la práctica del ejercicio profesional. La atención que se ha prestado a la investigación centrada en establecer cuál es conocimiento matemático con el que los estudiantes llegan a los programas de formación del profesorado es mucho menor (Linsell y Anakin, 2012).

En Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió (2014) presentábamos una primera definición de CMF como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas de la educación primaria. Sería el conocimiento disciplinar inicial deseable a partir del cual el estudiante, a través de los cursos de matemáticas y su didáctica y de las prácticas, construiría el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido necesarios para iniciar su práctica. El CMF es el conocimiento disciplinar que los profesores en las facultades tomamos como punto de partida en nuestra docencia. El CMF requiere un conocimiento profundo de las matemáticas elementales y constituye los cimientos que sostienen el aprendizaje matemático de los futuros maestros, permitiendo que los distintos elementos de su didáctica generen una estructura robusta.

No existe un acuerdo explícito acerca de cuáles son los aspectos esenciales del CMF, ni existen todavía instrumentos compartidos para determinar hasta qué punto nuestros estudiantes poseen dicho conocimiento. Sin embargo, estaríamos de acuerdo en que al inicio de su formación podemos exigirles que conozcan los aspectos básicos de las matemáticas elementales, aunque no hayan elaborado un tejido completo de relaciones entre conceptos, procedimientos y estructuras. Por otra parte, creemos que podemos exigir a nuestros estudiantes que conozcan la base matemática y el dominio de la terminología, correspondientes a su propio proceso de escolarización. Nuestra interpretación del CMF se aproxima a la que proponen Linsell y Anakin (2012, 2013) del *conocimiento del fundamento del contenido* de los estudiantes que inician su formación como maestros que incluye, enlazados de manera inseparable, conocimientos conceptuales y procedimentales. Según estos autores las características de este conocimiento están relacionadas, entre otros aspectos, con la capacidad para modelizar, razonar y confirmar, usar múltiples representaciones, generalizar, trabajar con números reales y conocer hechos matemáticos básicos. Además, cuestionan que el conocimiento con el que los estudiantes llegan a su formación inicial de maestros sea adecuado y suficiente para construir y desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza.

Nuestro estudio alrededor del CMF tenía una doble intención. Por una parte, a partir de criterio de expertos, intentábamos fijar un acuerdo sobre el contenido que considerábamos imprescindible para el inicio de la formación de maestros y, por otra, trabajábamos para desarrollar un instrumento que permitiese verificar si los candidatos a los grados de maestro tienen un CMF suficiente para iniciarlos. Entendemos que la prueba de competencia matemática de la PAP para el acceso a los grados de maestro debía estar estrechamente relacionada con el concepto de CMF, por lo que intentamos conjugar dos procesos. Por una parte, como grupo de investigación, trabajábamos para avanzar en la concreción y caracterización del CMF, tanto en un contexto local como internacional. Por otra, asumíamos el encargo de diseñar la prueba de competencia matemática de la PAP. Inicialmente el instrumento de evaluación del CMF no estaba destinado a ser parte de una prueba de acceso, sin embargo, el camino avanzado y el estudio piloto para la evaluación del CMF aportaron información que podía ser útil para plantear la PAP.

Entendemos por competencia matemática la capacidad para utilizar conocimientos matemáticos de manera transversal en situaciones y contextos matemáticos y no matemáticos. La competencia matemática va más allá del conocimiento de procedimientos, se manifiesta en el uso de conocimiento conceptual en distintas situaciones prácticas. Crooks y Alibali (2014) organizaron el conocimiento conceptual en conocimiento de los principios generales y conocimiento subyacente a los procedimientos. El primero se refiere al conocimiento de reglas, definiciones y conexiones y de la estructura del dominio. El segundo implica saber por qué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso de un procedimiento, y conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales.

La competencia matemática de una persona se apoya en el dominio de elementos de carácter conceptual y requiere la capacidad de usar conocimiento de carácter formal y explicitable, junto con conocimiento tácito. El conocimiento explicitable puede ser evaluado de distintas formas –cuestionarios escritos, observación, entrevistas, etc.– mientras que el conocimiento tácito, el que entra en juego en las situaciones de la práctica, resulta difícilmente evaluable en una prueba escrita. Por ello, parece claro que una PAP únicamente puede evaluar aquella parte de la competencia matemática correspondiente al conocimiento de carácter formal explicitable. Debíamos restringirnos pues a la evaluación de conocimiento conceptual a través de ejercicios y problemas referidos al conocimiento de principios generales y al conocimiento subyacente a los procedimientos.

El Consell del Programa MIF estableció que la PAP tiene únicamente una función discriminatoria, siendo su calificación APTO/NO APTO. Nos planteábamos pues desarrollar una prueba con una triple finalidad: asegurar que todos los candidatos admitidos tienen un conocimiento matemático mínimo, discriminando posibles limitaciones funcionales; indicar a los estudiantes de Bachillerato y Ciclos Formativos que deben prepararse si quieren acceder a un grado de maestro; y fomentar que los estudiantes trabajen con antelación a la prueba para poder superar posibles limitaciones transitorias. Finalmente, a través de un aumento progresivo del nivel de exigencia de la prueba, se esperaría que el nivel de conocimientos de los alumnos aumentase paulatinamente con el tiempo.

Utilizamos un ejemplo para explicar qué entendemos por limitación funcional y limitación transitoria. La figura 1 muestra la respuesta de un alumno que estaba cursando el primer curso de un GEP en una pregunta de la prueba piloto de nuestro estudio en la que era necesario calcular la superficie de un círculo de radio 6 cm.

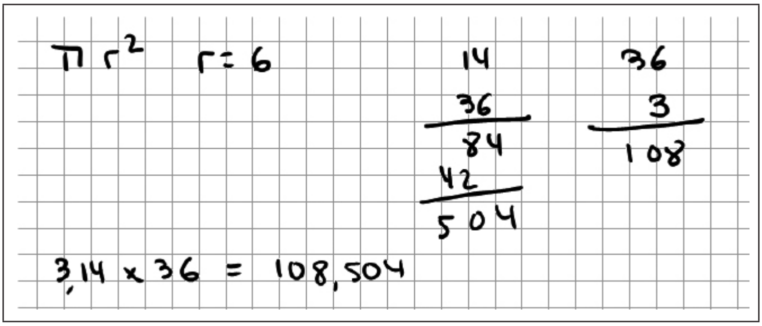


Figura 1. Respuesta de un alumno al calcular el área de un círculo de radio 6 cm

El estudiante recordaba correctamente la fórmula, pero no utilizó unidades ni cuando estableció el área, ni cuando escribió el resultado. Estas omisiones responden a limitaciones transitorias, posiblemente debidas a olvidos, que el estudiante podría superar después de una revisión de los errores. Sin embargo, el alumno trató la coma decimal como si «separara completamente» la parte entera de la parte decimal en el resultado de la multiplicación con decimales, error que refleja una limitación funcional. Posiblemente, este alumno durante su escolarización no había logrado construir un mínimo significado para el sistema de numeración decimal y su notación. Este alumno no es representativo de los alumnos del GEP, pero era uno de ellos. Creemos que este tipo de error no debe admitirse puesto que el conocimiento explicitado constituye una limitación para que pueda aprovechar los esfuerzos que el sistema destina a su formación como maestro.

Además, en la elaboración de la PAP, nos enfrentábamos a la necesidad de establecer una definición de competencia matemática que fuese «operativa y razonable», aunque restringiese el significado atribuido al término *conocimiento* en el concepto CMF. Debía ser «operativa» dado que debía referirse a algo susceptible de ser evaluado en una prueba escrita de carácter masivo. Debía ser «razonable» en tanto que debía poder justificarse frente a los futuros candidatos que se limitaba a conocimiento matemático al que habían tenido acceso durante su escolarización previa.

Por todo ello, en el contexto de la PAP, establecimos el siguiente objetivo para la prueba de CMF:

> A través de la resolución de ejercicios, problemas y situaciones de aplicación en contextos diversos, el examinando deberá demostrar que ha integrado y es capaz de utilizar conocimientos y habilidades relativos a distintos ámbitos de contenido matemático, siendo capaz de analizar los resultados obtenidos desde el punto de vista de su razonabilidad.

DESARROLLO DE UNA PRUEBA PARA EVALUAR EL CMF

En el contexto del grupo de investigación EMiCCoM - *Educació matemàtica i context: competència matemàtica* (2014 SGR 00723) y en el marco del proyecto *Estudi per a l'avaluació diagnòstica de les competències matemàtiques dels estudiants del grau en Educació Primària* (2014ARMIF-00041), en el que participaron junto a la Universitat Autònoma de Barcelona la Universitat de Girona, la Universitat de Vic y la Universitat Ramon Llull, desarrollamos una caracterización del CMF. Gracias a los avances en el marco del proyecto *Caracterizacion del conocimiento disciplinar en matematicas para el grado de educacion primaria: matematicas para maestros* (EDU2013-4683-R), nos planteamos establecer la viabilidad, pertinencia y adecuación de un instrumento de evaluación del CMF.

A continuación, en las secciones que siguen, introducimos los pasos dados para la consecución de dos objetivos estrechamente ligados: a) el establecimiento de los ámbitos de contenido matemático en la caracterización del CMF y b) el diseño de una prueba piloto que nos permitiese identificar las limitaciones, dificultades y retos que presenta la elaboración de una PAP en matemáticas.

La finalidad última de nuestro estudio era la construcción de una prueba definida a partir de criterio de expertos vinculados a la formación de maestros para caracterizar conocimientos específicos e identificar las competencias de cada alumno. Dado que el conocimiento matemático es conocimiento en contexto, los criterios de referencia se organizaron en torno a las distintas competencias y dominios de contenido. Los ítems debían cubrir las distintas concreciones del CMF y debía tomarse en cuenta su dificultad, capacidad de discriminación, formato y forma de presentación, entre otros aspectos. Sería importante establecer cuál era la concreción observable para cada uno de los conocimientos y competencias a evaluar. Además, dada la finalidad de la PAP, para cada ítem un error o una ausencia de respuesta debía reflejar una limitación determinada.

Grupo de discusión

Para la consecución del primer objetivo, el estableciemiento de ámbitos de contenido, se organizó un grupo de discusión que se prolongó durante 10 sesiones en el que participaron 7 profesores de didáctica de las matemáticas con larga trayectoria en la formación de maestros de las universidades que habían suscrito el proyecto 2014ARMIF-00041. Además, a dos de las sesiones se invitó a profesores de las demás universidades catalanas que imparten matemáticas y su didáctica en grados de maestro (Universitat de Barcelona, Universitat de Lleida, Universitat Rovira i Virgili, Universitat Internacional de Catalunya y Universitat Abat Oliva CEU). Se organizaron también dos sesiones en las que participaron maestros de primaria que habían firmado el proyecto.

La finalidad del grupo de discusión era establecer cuál es y cómo se concreta el CMF. Se generó un conjunto de referentes teóricos para disponer de una base común que incluía documentos relacionados con el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento disciplinar y didáctico de los distintos contenidos delimitados por el currículum de Primaria y las competencias de esta etapa. Puesto que estos documentos reflejan el objetivo de la formación inicial de maestros entendimos que podían orientar el estudio del punto de partida de dicha formación. Nos centramos en los contenidos matemáticos de la enseñanza obligatoria puesto que debíamos asegurar que los candidatos a la PAP han tenido oportunidad de acceder a aquello que evaluaremos.

Proceso de concreción

Durante las sesiones del grupo de discusión trabajamos para establecer una concreción del CMF a la vez que fijábamos el contenido de la PAP, tanto desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos a evaluar como de las características de las preguntas a incluir. Después de consensuar los propósitos principales del CMF y la PAP, decidimos organizar el conocimiento matemático en los siguientes ámbitos: Numeración y cálculo; Relaciones y cambio; Espacio y forma; Medida; y Estadística y Azar. Para cada uno de los ámbitos consensuamos una relación de bloques de contenido propios del ámbito. A partir de esta relación de bloques de contenido, cada uno de los participantes en el grupo de discusión se centró en identificar o generar preguntas alineadas con los objetivos del CMF sobre dos de estos bloques. De esta forma aprovechamos el conocimiento experto en ámbitos de contenido concreto de los distintos participantes en el grupo de discusión. Trabajar desde lo concreto, generando preguntas para la PAP, nos permitió avanzar simultáneamente en la definición del CMF y el desarrollo de la PAP.

A partir del desarrollo de un primer banco de preguntas, para cada bloque de contenido definimos los conceptos y procedimientos que los aspirantes al GEP deberían dominar e iniciamos un proceso de priorización para decidir cuáles de ellos serían la base de la prueba. Para ello, cada uno de los siete miembros del proyecto valoró estos bloques de contenido, organizándolos según su criterio en tres niveles: indispensable, necesario, esperable. Entendemos por conocimiento esperable aquel que corresponde a un concepto o procedimiento que el estudiante ha encontrado en su escolaridad previa y, que por tanto, podríamos esperar que dominara, pero que no consideramos requisito indispensable o necesario para su ingreso en el GEP. Estas valoraciones fueron la base sobre las que se construyó la concreción del CMF en cada ámbito de conocimiento matemático. En la siguiente sección se da cuenta de los resultados del grupo de discusión que establecen la concreción del CMF siguiendo este proceso.

Concreción del CMF en la PAP

Los resultados de la concreción del CMF y los ámbitos de contenido matemático en la PAP (Gorgorió, Albarracín y Villarreal, 2017) fueron recogidos directamente en el *Acuerdo del CIC de 5 de junio de 2015, sobre las características generales de la PAP para acceder a los grados en Educación Infantil y Primaria, con todas sus denominaciones, a partir del curso 2017-18,* que establece la siguiente concreción de contenidos a evaluar:

> Numeración y cálculo. Es necesario demostrar la comprensión y la capacidad de representar y utilizar los números naturales, enteros y racionales en situaciones diversas; la comprensión del significado y las propiedades de las operaciones y de las relaciones entre unas y otras; el conocimiento del significado de divisor y el dominio de las habilidades necesarias para resolver situaciones de factorización y divisibilidad de números naturales.
>
> Relaciones y cambio. Es necesario demostrar la capacidad de identificar y generalizar patrones no necesariamente numéricos; de identificar e interpretar relaciones de dependencia entre variables; de interpretar y construir gráficos que expresen relaciones de cambio; es necesario también demostrar la comprensión integrada de los significados de proporcionalidad numérica y razón y la capacidad de usar estos conceptos para resolver situaciones diversas.
>
> Espacio y forma. Es necesario demostrar el conocimiento de las características y las propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y la capacidad de aplicarlas en situaciones diversas; la comprensión y la capacidad de representar y utilizar reflexiones, giros y traslaciones; la comprensión integrada de los significados de proporcionalidad geométrica, semejanza y escala, y la capacidad de utilizar estrategias de visualización para resolver problemas, sean o no geométricos.
>
> Medida. Es necesario demostrar el conocimiento del significado de magnitud medible (ángulo, longitud, área, volumen, capacidad, masa y tiempo) y de los procesos de medida; el conocimiento de las unidades de medida decimales y sexagesimales correspondientes y de los mecanismos para resolver situaciones de cambio de unidades, y el dominio de los conocimientos y las habilidades necesarias para resolver situaciones diversas relacionadas con las ideas de perímetro, área y volumen.
>
> Estadística y azar. Es necesario demostrar la capacidad de interpretar, analizar, obtener conclusiones y hacer predicciones a partir de datos estadísticos; de interpretar y construir gráficas estadísticas; de interpretar y calcular medidas de centralización, y comprender el significado de azar.
>
> La competencia lógico-matemática se evalúa a través de ejercicios, problemas y situaciones de aplicación en las que deberá construirse la respuesta sin calculadora y en las que se considerará tanto el proceso de resolución como la respuesta.

Prueba piloto

Para diseñar una prueba representativa del CMF tomamos como punto de partida el banco de actividades generadas durante el proceso de discusión que refleja el criterio de los expertos. Entre otras, el banco contenía preguntas liberadas de otros estudios –pruebas de competencia matemática, TIMSS, PISA, TEDS-M, SMART o LMT–, ejercicios de libros de texto, ejemplos procedentes de publicaciones relativas al análisis conceptual y de los errores y dificultades en el aprendizaje, y de estudios internacionales sobre la competencia matemática del profesorado. Las actividades de la prueba eran de respuesta abierta para evitar sugerir respuestas a los alumnos y estaban diseñadas con la intención de evaluar el conocimiento matemático a tres niveles, según la complejidad de la competencia matemática requerida o el proceso cognitivo exigido para su resolución. Estos niveles son los que marcan los distintos estudios PISA (OECD, 2012): reproductivo, de aplicación y de relación. La versión final de la prueba piloto contenía 18 actividades, equilibrando los ámbitos de conocimiento que definen la PAP y niveles de conocimiento matemático exigidos.

La prueba se pasó a los 295 estudiantes de primero del grado de Educación Primaria de la UAB en la primera semana del curso 2013-2014. La nota de corte para el acceso a esta titulación en la UAB fue superior a la del resto de los grados en Educación Primaria en Catalunya, situándose en el percentil 81 (77 de 421) del conjunto de los grados ofertados en Catalunya. Por lo tanto, al interpretar los resultados obtenidos, podemos considerar que, al menos desde el punto de vista del sistema, la población estudiada era la que mejor había superado los requisitos de acceso vigentes.

Consideraciones para el diseño de la prueba de matemáticas de la PAP

La finalidad de la PAP requería diseñar una prueba referida a criterios, puesto que no pretende ordenar los estudiantes en función de sus resultados, sino situarlos en relación al dominio de determinados contenidos y habilidades. Por lo tanto, en su elaboración partimos de los bloques considerados indispensables o necesarios por los expertos del grupo de discusión y trabajamos para asegurar la validez de la prueba, buscando que las preguntas fuesen relevantes y representativas de las distintas concreciones establecidas. Además, la especificidad de la evaluación del CMF nos llevó a considerar otras características para la redacción de la prueba –tipos de respuesta, tipos de enunciados, instrumentos permitidos para la respuesta– así como los criterios para la corrección de las preguntas. A continuación, justificamos la toma de decisiones con relación a dichas características, ejemplificándolo a partir de los resultados obtenidos en la prueba piloto.

Contextualización de enunciados verbales

Consideramos necesario introducir preguntas con enunciados verbales contextualizadas en situaciones reales para aproximarnos a la idea de competencia matemática, tal como argumentamos a continuación a partir de un ejemplo.

La pregunta 5 de la prueba piloto plantea: «*Cuando se hace una salida escolar es necesario que los niños vayan acompañados por adultos. Cada adulto puede ser responsable, como máximo, de un grupo de 16 niños. En una salida con 54 niños, ¿cuántos adultos deben acompañarlos?*» La Tabla 1 recoge las respuestas de los alumnos, con sus frecuencias relativa y absoluta.

Tabla 1. Respuestas a la pregunta 5

Respuesta	NC	3	3,375	3,4	3,5	4	4 con errores	5	Otra	Total
Frecuencia	17	41	24	12	7	154	20	6	10	291
Porcentaje	5,8%	14,1%	8,2%	4,1%	2,4%	52,9%	6,9%	2,1%	3,4%	100%

Observamos que un 52,9% de los alumnos respondió dividiendo correctamente y tomando el cociente por exceso, aportando evidencias de que daban sentido a la situación. Un 6,9% dio 4 como respuesta, siendo el resultado de cálculos erróneos o argumentos inválidos. Un 14,8% de los estudiantes dio como respuesta el cociente con decimales obtenido en la división, y 14,1% respondió que deberían ir acompañados por 3 adultos. Vemos que más de una cuarta parte de las respuestas evidenció que no se interpretaba la situación propuesta. De esta forma, la pregunta nos permitió distinguir entre los que eran capaces de resolver el problema con significado de aquellos que aplicaban algoritmos de forma rutinaria.

Preguntas de respuesta abierta

Otra de las decisiones que debíamos tomar era si optábamos por preguntas con respuesta de opción múltiple o de respuesta abierta. La pregunta 2, entre otros cálculos de cambio de unidades de medida, pedía a los estudiantes la equivalencia en minutos de 1,4 horas. Los resultados para esta pregunta nos permitieron reflexionar acerca del formato apropiado para los ítems de la PAP. La Tabla 2 muestra las respuestas obtenidas en la prueba piloto y sus frecuencias.

Tabla 2. Frecuencia absoluta y relativa de las respuestas a la equivalencia en minutos de 1,4 horas

NC	60	64	75	80	84	90	100	120	otra	total
3	1	7	9	3	79	3	154	3	29	291
1,0%	0,3%	2,4%	3,1%	1,0%	27,1%	1,0%	52,9%	1,0%	10,0%	100,0%

Para responder debía combinarse que una hora son 60 minutos y el significado del número decimal. Recogimos un total de 28 errores conceptuales distintos. Asignar valores como 40 o 4 minutos a 0,4 horas evidencia la dificultad para tratar la parte decimal. La respuesta mayoritaria no es la correcta, sino la que establece que 1,4 horas son 100 minutos, poniendo en evidencia que los estudiantes no relacionaban su resultado con el conocimiento de la práctica cotidiana, olvidando que 1,5 horas son 90 minutos. Esta ausencia de conexión es incluso más evidente cuando responden 60, 90 o 120.

La gran variedad de respuestas obtenidas en preguntas como esta, y también en otras de distinta naturaleza, nos sugirió que si queríamos identificar posibles limitaciones de los candidatos debíamos plantear preguntas en las que tuviesen que construir la respuesta, a pesar de que la corrección de una prueba con preguntas de opción múltiple fuera más ágil.

Uso de calculadora

La prueba contenía varias preguntas de tipo aritmético –ordenación de números decimales o cálculos aritméticos en distintos conjuntos numéricos, entre otras– e incluía problemas contextualizados en los que era necesario recurrir a operaciones aritméticas para resolverlos. No permitir el uso de la calculadora nos llevó a detectar errores como los presentados en la figura 1 puesto que las preguntas en que se debe utilizar algoritmos evalúan el conocimiento conceptual subyacente a los procedimientos. Si el alumno ha olvidado las reglas que memorizó, sólo podrá resolver el ejercicio correctamente si es capaz de reconstruir el procedimiento o utilizar vías alternativas dotando la pregunta de significado.

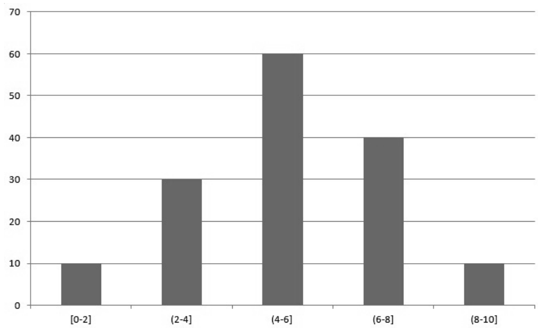
Corrección y puntuación

La prueba tenía como objetivo discriminar entre aquellos estudiantes que han construido un conocimiento suficiente y los que no. Por ello, contrariamente a lo habitual, en la calificación de la prueba asignamos mayor peso a las preguntas relativas a elementos más básicos de conocimiento. Decidimos atribuir más puntos a las preguntas de carácter reproductivo, dado que reflejan los aspectos más básicos del conocimiento presentados de forma aislada. Si el alumno había olvidado los procesos algorítmicos, debería haber podido resolver las preguntas recurriendo al conocimiento conceptual que los fundamenta. Respecto a la corrección, si la respuesta a la pregunta era completa se le asignaba la puntuación máxima, y si existía algún error o era incompleta, no se puntuaba. La calificación máxima era de 57 puntos (a 5 preguntas de aplicación les correspondían 3 puntos). La Tabla 3 recoge el tipo de preguntas y, para cada tipo, el número y la puntuación atribuida.

Tabla 3. Descripción de la puntuación de las preguntas de la prueba

Tipo de pregunta	Número de preguntas en la prueba	Puntuación de la pregunta
Reproductivo	9	4 puntos
Aplicación	7	2 o 3 puntos
Relación	2	1 punto

La pregunta 2 –salida escolar– y la pregunta 5 –horas y minutos– que hemos mostrado en secciones anteriores son ejemplos de preguntas de tipo reproductivo, puesto que van dirigidas a identificar el conocimiento de aspectos fundamentales como el significado de la división y el manejo de su algoritmo, y el cambio de unidades. Un ejemplo de pregunta de aplicación es la pregunta 15 (Figura 2), que proporciona un histograma sobre el número de alumnos que han obtenido unas determinadas calificaciones en una prueba y plantea varias preguntas.



(A) ¿Cuántos alumnos han sido evaluados?
(B) ¿Qué puedes decir sobre el número de aprobados?
(C) ¿Qué porcentaje de alumnos han obtenido una nota entre 0 y 4?
(D) ¿Cuál es la nota más alta obtenida?

Figura 2. Enunciado de la pregunta 15

La pregunta 15 tenía asignada una puntuación máxima de 3 puntos que se repartían a partes iguales entre los cuatro apartados. El apartado más asequible es el apartado (A), que respondieron correctamente un 86,8% de los alumnos. Esto contrasta con el 17,1% de éxito en el apartado (B) que requiere un mayor nivel de interpretación del gráfico en relación a la realidad representada.

Un ejemplo de pregunta de relación es la pregunta 17, que respondieron correctamente un 14,5% de los alumnos participantes en la prueba piloto. Su enunciado es: «*El siguiente pentagrama está formado por las líneas de las notas mi, sol, si, re y fa. Si la figura dibujada continuara con el mismo patrón, ¿en qué línea se encontraría el número 2035?*»

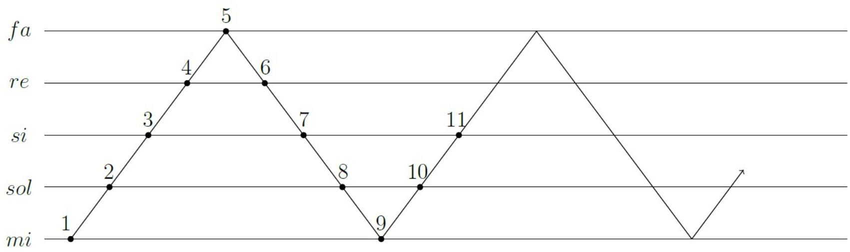


Figura 3. Gráfico del enunciado de la pregunta 17

Además, decidimos que superar la prueba requería responder correctamente todas las preguntas de tipo reproductivo, con lo cual era necesario obtener 36 de los 57 puntos, es decir, un 6,32 sobre 10. Así definimos las siguientes calificaciones (Tabla 5): *A* si se superaban todas las preguntas, *B* si se superaban todas las de tipo reproductivo y de aplicación; y *C* si se superaban todas las preguntas de tipo reproductivo; y tres niveles *D, E* y *F* para cuando no se superaba la prueba. La tabla siguiente muestra los resultados obtenidos por los participantes en la prueba piloto.

Tabla 4. Calificaciones obtenidas en la prueba piloto

Calificación	Frecuencia	Porcentaje
A [9'6, 10]	0	0,00%
B [9, 9'6)	3	1,01%
C [6'3, 9)	26	8,72%
D [5, 6'3)	44	14,77%
E [2'5, 5)	152	51,01%
F [0, 2'5)	73	24,49%
Total	298	100,00%

Estos resultados cuestionan el nivel de conocimiento de los participantes y distan considerablemente de los deseables, siendo menor al 10% el porcentaje de los que superan la prueba. El formato y contenidos de la prueba de competencia lógico-matemática en la PAP debían considerar esta realidad, discriminando a aquellos alumnos que no poseen un mínimo conocimiento matemático que pueda ser modificado y ampliado durante su paso por nuestras facultades.

Por otra parte, la dificultad de la prueba debía ser definida cautelosamente, ya que los resultados de la Tabla 4 evidencian que el conocimiento matemático de una gran parte de los estudiantes que ingresaron en el GEP antes de su implementación distaba de ser suficiente. Introducir en el sistema de acceso una prueba discriminatoria con el nivel de exigencia de la de este estudio podría implicar efectos negativos en la selección de alumnos. Por ello, definir unos criterios de puntuación que respondiesen a esta necesidad era uno de nuestros objetivos a corto plazo. Por otra parte, además de validar la construcción de la PAP, debíamos estudiar diferentes formas de corregir y calificar para que la prueba cumpliese su función sin perjudicar al sistema de formación de maestros.

PERTINENCIA DE LAS PAU COMO REQUISITO DE ACCESO AL GRADO

Los datos obtenidos con la prueba piloto al inicio del curso 2013-14 aportaron dos ideas importantes. Por una parte, constatamos que resultaba necesario replantear la forma de calificar la prueba y, por otra, teníamos evidencia de que aquellos estudiantes que habían permanecido en contacto con las matemáticas durante toda su escolaridad habían obtenido resultados significativamente mejores. Nos preguntamos entonces si la superación de las pruebas de matemáticas de las PAU garantizaría un conocimiento matemático suficiente para iniciar el GEP.

Para obtener evidencias empíricas utilizamos la prueba piloto y ajustamos la forma de calificar. Trabajando con los datos de los estudiantes que iniciaron el GEP el curso 2014-15, analizamos la coherencia entre los resultados que obtuvieron en la prueba de CMF, ajustado el criterio para su calificación, y los que habían obtenido en las pruebas de matemáticas de las PAU, a partir de los registros de calificaciones que la Oficina de Acceso a la Universidad nos facilitó anonimizados.

La Tabla 4, presentada más arriba, muestra que únicamente el 9,73% de los estudiantes del curso 2013-14 superaron la prueba de CMF obteniendo una calificación de A, B o C. Para mantener la validez del estudio, rebajar la exigencia de la prueba de CMF y permitir comparaciones con los exámenes de las PAU, decidimos establecer el aprobado en cinco puntos, también para la prueba de CMF, con lo que para el curso 2014-15 superar la prueba significa obtener una calificación A, B, C o D manteniendo los criterios para asignar la calificación numérica.

En esta ocasión, se enfrentaron a la prueba de CMF 258 alumnos de primer curso. La media en la calificación de la prueba de estos alumnos fue de 3,87 puntos sobre 10, presentando una desviación estándar de 1,75 y con un 24,81% de aprobados. En este caso nos centramos en diferenciar los resultados de las calificaciones en la prueba de CMF de los alumnos que habían hecho las pruebas de *Matemáticas* o *Matemáticas para las Ciencias Sociales* en las PAU de las de los alumnos que no habían pasado ninguna de estas pruebas. Debemos destacar que 16 alumnos pasaron ambas pruebas de Matemáticas de las PAU ya que la estructura de las PAU así lo permite. Las calificaciones de estos 16 alumnos aparecen reflejadas en ambas columnas. La Tabla 5 muestra los descriptores de las calificaciones de los alumnos de la promoción 14-15 en la prueba de CMF.

Tabla 5. Descriptores estadísticos de los resultados en la prueba de CMF según las opciones del examen de matemáticas en las PAU

	Matemáticas Selectividad	Matemáticas CCSS Selectividad	No han hecho prueba de matemáticas
Media	5,81	4,53	3,29
Mediana	5,81	4,33	3,10
Desviación estándar	1,65	1,70	1,53
Mínimo	1,32	0,85	0,35
Máximo	9,30	9,30	8,01
Número de estudiantes	36	84	154
Porcentaje sobre el total	13,95%	32,56%	59,69%

Los resultados ponen de manifiesto que los alumnos que hicieron la prueba *Matemáticas* en las PAU obtuvieron una calificación media en la prueba de CMF de 5,81 puntos superando en 1,94 puntos la media de las calificaciones en la prueba de CMF de todos los alumnos de dicho curso, que fue de 3,87 puntos. Por su parte, los alumnos que en las PAU se examinaron de *Matemáticas para las Ciencias Sociales* obtuvieron en la prueba de CMF una calificación media superior en 0,46 puntos a la del total de la promoción. La calificación media en la prueba de CMF de los alumnos que no hicieron ninguna de las dos pruebas de matemáticas en las PAU, es 3,29 puntos, claramente inferior a la media del grupo.

Para sustentar estas afirmaciones utilizamos un test ANOVA de comparación de medias. Los resultados del test (Tabla 6) muestran que debemos rechazar la hipótesis de que las medias eran iguales, el *p-valor* es 0,0000, menor que 0,05. El estudio de la diferencia de medias dos a dos nos muestra que los tres grupos de estudiantes obtuvieron calificaciones significativamente diferentes.

Tabla 6. Test de comparación de medias de CMF según opciones de matemáticas en las PAU

Matemáticas vs Matemáticas CCSS	Diferencia = 1,2800, 95% CI = (2,0307, 0,5293), p = 0,0002
Matemáticas vs no PAU	Diferencia = 2,5200, 95% CI = (3,2177, 1,8223), p = 0,0000
Matemáticas CCSS vs no PAU	Diferencia = 1,2400, 95% CI = (1,7512, 0,7288), p = 0,0000

Estos resultados prueban que aquellos alumnos que se examinaron de *Matemáticas* en las PAU obtuvieron mejores resultados en la prueba de CMF que los que se examinaron de *Matemáticas para las Ciencias Sociales*, y estos últimos mejores que los que no se examinaron de matemáticas. Sin embargo, esto no es suficiente para afirmar que superar una de las dos pruebas de matemáticas de las PAU sea garantía de un conocimiento matemático inicial suficiente para el GEP.

Las Figuras 4a y 4b muestran, para cada estudiante, la relación entre las calificaciones en la prueba de CMF y la prueba de matemáticas de las PAU en la opción de Ciencias y en la de Ciencias Sociales, respectivamente. En cada tabla, se representa también la recta de regresión correspondiente. En los gráficos se observa una tendencia de correlación débil entre la nube de puntos y las respectivas rectas de regresión, pero el factor determinante para establecer las posibles relaciones entre los resultados en las dos pruebas es el estudio por cuadrantes. Además, observamos que 7 (19,44%) de los estudiantes que hicieron la prueba de *Matemáticas* de las PAU la suspendieron, pero aprobaron la prueba de CMF. Interpretamos que estos alumnos habían conseguido elaborar un conocimiento matemático adecuado para el GEP, pero no habían completado satisfactoriamente su formación para superar la prueba de matemáticas de las PAU. La situación inversa, superar el examen de matemáticas de las PAU y no superar la prueba de CMF se dio en un único caso. El grupo de alumnos que en las PAU hizo la prueba de *Matemáticas para Ciencias Sociales* era mucho más numeroso y vemos también que 25 (29,76%) de estos alumnos superaron la prueba en las PAU, pero no alcanzan la calificación de 5 en la prueba de CMF, mientras que 5 (5,95%) alumnos que superaron la de CMF no superaron la de las PAU.

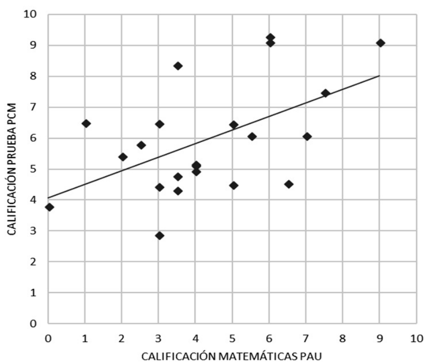


Figura 4a. Relación calificaciones Matemáticas para Ciencias PAU y CMF

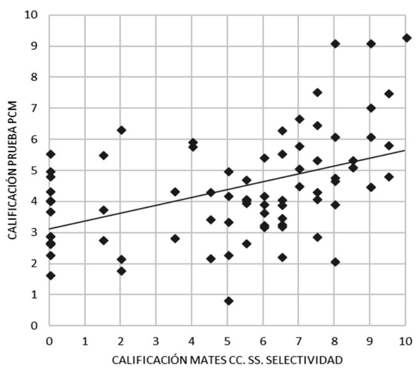


Figura 4b. Relación calificaciones Matemáticas para Ciencias Sociales PAU y PCMF

Estos datos nos muestran que la prueba de CMF y las pruebas de matemáticas de las PAU establecen de forma distinta como apto / no apto a un 37,71% de los alumnos que realizaron las PAU en la modalidad de Ciencias Sociales y a un 22,22% de los alumnos de la modalidad de Ciencias. Esta constatación empírica confirma como no deseable utilizar las pruebas de matemáticas de las PAU como requisito específico para el acceso al GEP.

CONCLUSIONES

La investigación presentada en este capítulo parte de la necesidad de una mejora de la formación matemática inicial de los maestros de Educación Primaria. El primer producto de esta investigación es la concreción del concepto *conocimiento matemático fundamental* (CMF) en distintos ámbitos de contenido matemático. De esta concreción se deriva la evidencia de la necesidad de una prueba de conocimiento matemático y una propuesta concreta que se incorporaría para la admisión a los grados de Maestro como requisito complementario a las Pruebas de Acceso a la Universidad. Entendemos que la idea de *conocimiento matemático fundamental* puede erigirse como uno de los constructos teóricos esenciales para definir la formación inicial de los estudiantes para maestro a la vez que podría convertirse en un soporte sobre el cual armar las asignaturas de matemáticas para maestros o de matemáticas y su didáctica.

Son muchas las investigaciones, desarrolladas desde distintas perspectivas, que establecen el conocimiento para enseñar matemáticas que los aspirantes a maestros deberían desarrollar durante su paso por las facultades de educación. Sin embargo, dichos estudios establecen el objetivo de la formación inicial sin tomar en consideración, o al menos sin explicitarlo, cuál es el punto de partida para el desarrollo del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Por lo tanto, además de una discusión teórica sobre cuáles serían los conocimientos iniciales requeridos, sería necesario establecer conexiones con los marcos teóricos que describen el conocimiento del profesor de matemáticas que están siendo utilizados para situar investigaciones y orientar políticas de ordenación universitaria relativas a la formación de maestros.

La concreción del *conocimiento matemático fundamental* en ámbitos de contenido y la prueba desarrollada en nuestro estudio orientaron la definición del examen de competencia lógico-matemática de la Prueba de Aptitud Personal que desde junio de 2017 es requisito para el acceso a los grados de maestro en las universidades catalanas. Además, nos permitieron desarrollar el modelo de prueba que venimos utilizando desde septiembre de 2013 para elevar el nivel de exigencia en el conocimiento matemático de nuestros estudiantes al iniciar los cursos de matemáticas que son parte de su formación.

Los resultados que hemos presentado en este capítulo corresponden a los alumnos que ingresaron los cursos 2013-14 y 2014-15. Constatamos que sus calificaciones en la prueba distan de ser las que evidenciarían un conocimiento inicial óptimo para desarrollar el conocimiento necesario para iniciarse como docentes de matemáticas. Además, los resultados de nuestro estudio muestran que los criterios de admisión y los requisitos de acceso vigentes hasta el momento de la aplicación de la Prueba de Aptitud Personal no habían logrado garantizar un conocimiento matemático suficiente en los estudiantes que accedieron a la formación inicial de maestros. Todo ello justifica la necesidad de introducir una prueba de conocimiento matemático como requisito para el acceso que permita asegurar que el bagaje de los candidatos se acerca al *conocimiento matemático fundamental.*

No obstante, el desarrollo de una prueba como la que planteamos comporta múltiples retos. De entrada, e incluso aceptando que para desarrollarla debimos restringir la idea de *conocimiento matemático fundamental* a conocimiento explicitable a través de una prueba escrita, uno de los principales retos fue conjugar conceptualmente las ideas de competencia matemática y *conocimiento matemático fundamental*. Intentar hacer compatibles estas dos nociones condicionó el instrumento diseñado. Además, conciliar la idea de *conocimiento matemático fundamental,* como conocimiento deseable, con la realidad manifestada por los resultados obtenidos en el pilotaje nos llevó también a revisar nuestros planteamientos desde el punto de vista de lo exigible, en un intento por ajustar lo que definíamos como fundamental y las evidencias del estudio piloto.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado al amparo del grupo *Educació matemàtica i context: competència matemàtica* (EMiC:CoM), reconocido y financiado por la Direccio General d'Universitats (ref. 2014SGR00723) y con el soporte de los proyectos *Estudi per a l'avaluació diagnòstica de les competències matemàtiques dels estudiants del grau en Educació Primària*, Agencia de Gestio d'Ajuts Universitaris i de Recerca (ref. 2014 ARMIF-00041), *Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: matemáticas para maestros, y Estudio de los requisitos de acceso a los Grados de Maestro de Educación Primaria desde la perspectiva del conocimiento matemático*, I+D, RETOS, Direccion General de Investigacion (refs EDU2013-4683-R y EDU2017-8247-R).

BIBLIOGRAFÍA

Arce, M., Marbán, J.M. y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 119-128). Zaragoza: SEIEM.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013, February). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M.A. (Eds.), *Proceedings of the CERME8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Crooks, N. y Alibali, M.W. (2014). Defining and Measuring Conceptual Knowledge in Mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Eurydice Network –P 9 Eurydice– (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Godino, J.D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13,* 63-83.

Gorgorió, N., Albarracín, L. y Villarreal, A. (2017). Examen de competència logicomatemàtica en la nova prova d'accés als graus de mestre. *Noubiaix, 39*, 58-64.

Lacasa, J.M. y Rodríguez, J.C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En IEA (Ed.), *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 63-108). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Linsell, C. y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 14*(2), 4-27.

Linsell, C. y Anakin, M. (2013). Foundation Content Knowledge: What do pre-service teachers need to know? En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), *Mathematics Eduction: Yesterday, today and tomorrow (36th MERGA)* (pp. 442-449). Melbourne, VIC: MERGA.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Montalvo, J.G. y Gorgels, S. (2013). Calidad del profesorado, calidad de la enseñanza y aprendizaje: Resultados a partir del TEDS-M. En IEA (Ed.), *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 13-40). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Nortes, A. y Nortes, R. (2013). Formación inicial de maestros: un estudio en el dominio de las matemáticas. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, 17*(3), 185-200.

Nortes, R. y Nortes, A. (2018). ¿Tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 397-406). Gijón: SEIEM.

OECD (2012). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación Inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, *363*, 35-59.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (1: 273-298. Rotterdam: Sense).

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Villarreal, A., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2016). First year student teachers dealing with non-routine questions in the context of the entrance examination to a degree in Primary Education. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME10* (pp. 3392-3399). Dublin, Irlanda: DCU Institute of Education and ERME.

CÓMO CONSTRUYEN DEFINICIONES MATEMÁTICAS LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO: UNA APROXIMACIÓN SOCIOCULTURAL

HOW PRE-SERVICE TEACHERS CONSTRUCT MATHEMATICAL DEFINITIONS: A SOCIOCULTURAL APPROACH

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R., Fernández-León, A.
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En este capítulo se presenta un estudio sobre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro de Educación Primaria. Esta investigación parte de la consideración de que los futuros maestros no solo deben aprender conceptos matemáticos, definiciones, teoremas, etc., sino también las prácticas matemáticas a través de las cuales se generan. Por este motivo, abordamos el estudio de la práctica de definir y, en concreto, de cómo futuros maestros construyen definiciones matemáticas. La perspectiva teórica utilizada para llevar a cabo esta investigación es la teoría de la comognición, perspectiva sociocultural propuesta por Sfard (2008) que caracteriza las matemáticas como un discurso con propiedades específicas. Los resultados obtenidos nos han permitido aproximarnos al discurso de los estudiantes para maestro cuando construyen definiciones matemáticas sobre cuerpos geométricos.

Palabras clave: *práctica matemática, definir, teoría de la comognición, estudiantes para maestro.*

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 135-156). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

In this chapter, we present a study about the mathematical knowledge of Primary Education pre-service teachers. This research is based on the assumption that pre-service teachers do not only need to learn mathematical concepts, definitions, theorems, etc., but also the mathematical practices that generate them. For this reason, we study the mathematical practice of defining and, in particular, how pre-service teachers construct mathematical definitions. The theoretical perspective we use in this research is the theory of commognition proposed by Sfard (2008), which characterizes the mathematics as a discourse with some specific properties. The results we have obtained have allowed us to approach the discourse of the pre-service teachers when they construct mathematical definitions about solids.

Keywords: *mathematical practice, defining, theory of commognition, pre-service teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemáticas ha preocupado a los investigadores en educación matemática desde hace décadas y ocupa un lugar especialmente relevante en esta disciplina debido a las importantes repercusiones sociales que tiene. Entre los ámbitos de investigación que recoge Llinares (2008), hay uno que aborda lo relativo a «el estudiante para profesor, el profesor y el formador de profesores: Aprendizaje y desarrollo profesional» (p. 11), y que incluye una agenda de investigación «centrada en el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor» (p. 11). Es en esta agenda donde se sitúa este capítulo. Ahora bien, antes de formar a profesores se debe caracterizar qué conocimiento necesitan dichos profesores.

En la caracterización del conocimiento del profesor, los trabajos de Shulman (1986, 1987) han tenido y siguen teniendo una especial importancia. Este autor identifica diferentes dominios de dicho conocimiento y las relaciones entre estos dominios y su aprendizaje o desarrollo. Entre estos dominios, destacamos el conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, o PCK) y el conocimiento de la materia (Content Knowledge/Subject Matter Knowledge, o CK). El PCK va más allá del conocimiento de la materia en sí, ya que es conocimiento de la materia para enseñar e incluye, por ejemplo, las maneras de representar y formular matemáticas para hacerlas comprensibles a otros. Por otra parte, Shulman (1986) indica que el CK debe incluir aspectos como comprender la estructura de la materia, su organización conceptual, cuáles son las ideas importantes y habilidades en esta materia, así como la manera en la que los expertos producen nuevas ideas o descartan otras. Además, como indican Krauss y Blum (2012), este dominio de conocimiento ha sido menos estudiado a nivel internacional en comparación con el otro dominio (PCK). De hecho, el propio Shulman dejó abierto qué nivel de conocimiento de la materia, las matemáticas en nuestro caso, debe poseer un profesor.

La importancia del conocimiento de las matemáticas ha sido resaltada también por otros autores. Así, Thompson, Carlson, y Silverman (2007) señalan que si las estructuras conceptuales del profesor abarcan una red de ideas matemáticas y formas de pensar compatibles, al menos será posible que estas mismas estructuras conceptuales se desarrollen en sus estudiantes. Para estos autores, la comprensión matemática del profesor es una condición necesaria para poder enseñar a sus estudiantes a desarrollar una comprensión matemática de calidad. Por otro lado, la Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) (2001) resaltó que los futuros profesores de matemáticas necesitan desarrollar un profundo conocimiento de las matemáticas que deberán enseñar. En su segunda edición, la CBMS (2012) añadió que los futuros profesores deben además comprender las matemáticas que se enseñan antes y después de las que ellos enseñarán.

En este mismo sentido, Wasserman (2018) introdujo la noción de «conocimiento matemático más amplio del que enseña un profesor» (nonlocal mathematical neighborhood), que incluye ideas matemáticas que están «detrás de», «junto a» o «más allá» del contenido específico que debe enseñar el profesor. Para este autor, este conocimiento es relevante ya que influye en la comprensión de las matemáticas que el profesor enseña, llegando a ser «pedagógicamente potente» a la hora de influir en la práctica instruccional. Además, el profesor debe conocer los procesos de construcción de conocimiento matemático (prácticas matemáticas) y que estos forman parte de su conocimiento en todos los niveles, aunque no necesariamente con el mismo alcance.

En general, el aprendizaje de las mencionadas prácticas matemáticas es un problema básico de la educación matemática que algunos autores consideran debe ser tenido en cuenta en los programas de formación (Sánchez y García, 2008). En cuanto a la práctica de definir, Freudenthal (1973) considera que construir una definición es tan relevante en matemáticas como construir una demostración para un teorema, y Mariotti y Fischbein (1997) afirman que aprender a definir es clave en educación matemática.

Numerosas investigaciones han mostrado la complejidad que presenta para estudiantes de diferentes niveles educativos entender qué es una definición matemática y cómo se construye. Entre otras, mencionamos los trabajos de Vinner (1991), que diferencia entre la imagen y la definición de un concepto, resalta el papel de las definiciones en la resolución de tareas y estudia cómo se construyen dichas definiciones; de Borasi (1991), que gira en torno a los requisitos mayoritariamente aceptados de una definición matemática; y de Zaslavsky y Shir (2005), que también aportan información acerca de las características (imperativas, opcionales) de las definiciones, y hacen un estudio de los principales roles que les son atribuidos. Otras investigaciones han estudiado el papel de las definiciones y el proceso de definir en relación con la prueba matemática. En particular, Ouvrier-Buffet (2006) considera los procesos de definir vinculados a la formación de conceptos matemáticos y modela los procesos de construcción de definiciones de los estudiantes. Esta autora señala que durante un proceso de investigación científica hay una progresión desde cero-definiciones (zero-definitions) a las definiciones generadas en una prueba (proof-generated definitions). Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) proponen una secuencia didáctica para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes universitarios de los procesos de definir y demostrar. Dicha secuencia didáctica cuenta con dos sesiones cuyo objetivo es que los estudiantes aprendan a definir y manipular definiciones. Para ello, se les pidió, entre otros, que construyeran definiciones de varios conceptos, que dieran ejemplos de ellos y que «definieran un objeto a partir de su construcción guiada» (Alvarado Monroy y González Astudillo, p. 534).

Por otro lado, nos gustaría señalar que en este capítulo asumimos que las matemáticas son una actividad humana (Freudenthal, 1973) y por tanto falible y sujeta a revisión (Lakatos, 1976). Esta consideración de las matemáticas como una actividad humana ha llevado a algunos autores a estudiar el conocimiento matemático desde perspectivas socioculturales (Cooper, 2014; Sfard, 2008).

En las últimas décadas, se ha producido un auge de los investigadores que han asumido en sus estudios estas perspectivas socioculturales (por ejemplo, Lave y Wenger, 1991; Lerman, 2001). Con estas perspectivas, el aprendizaje y cualquier actividad cognitiva dejan de explicarse como procesos puramente biológicos para pasar a verse como procesos sociales. Por ejemplo, Rasmunssen, Zandieh, King, y Teppo (2005) estudian el pensamiento matemático avanzado adoptando un enfoque que considera la progresión en el pensamiento como formas de participar en prácticas matemáticas. Su visión del aprendizaje es esencialmente sociocultural, ya que consideran el aprendizaje como actos de participación en las diferentes prácticas matemáticas dentro de comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991).

Uno de los marcos teóricos socioculturales existentes es la teoría de la comognición de Sfard (2008), que considera las matemáticas como un tipo de discurso. Este marco ha sido el foco de diferentes volúmenes especiales de revistas de prestigio y ha sido usado en investigaciones con estudiantes desde niveles básicos (Sfard, 2007) hasta universidad (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014; Nardi, Ryve, Stadler y Viirman, 2014; Sánchez y García, 2014; Tabach y Nachlieli, 2015). Presmeg (2016), en su revisión de diferentes investigaciones en un número especial sobre perspectivas comunicacionales sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, considera que la propuesta de Sfard (2008) proporciona una lente teórica útil en diferentes contextos (situaciones con diferentes contenidos, diferentes sujetos, diferentes niveles educativos).

En este capítulo nos centramos en el conocimiento de las matemáticas de estudiantes para maestro de Educación Primaria, abordándolo desde la perspectiva sociocultural de la teoría de la comognición. Específicamente, continuamos la investigación comenzada en González-Regaña, Martín-Molina, Fernández-León, Toscano-Barragán y Gavilán-Izquierdo (2018) sobre la práctica matemática de definir, entendida dicha práctica como un proceso en el que se construyen definiciones matemáticas.

MARCO TEÓRICO

En este estudio, consideramos que definir es un proceso que comienza con la descripción de un objeto, sigue con la formulación de definiciones preliminares y termina con su definición formal, elegida entre varias construidas (Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2018). Dado que estamos de acuerdo con Rasmussen et al. (2005) en que las prácticas matemáticas son prácticas sociales o culturales, para estudiar la práctica de definir entre estudiantes para maestro, hemos decidido adoptar una perspectiva sociocultural. Dicha perspectiva es la teoría de la comognición propuesta por Sfard (2007, 2008), que considera las matemáticas un tipo especial de discurso, y estudia su caracterización y aprendizaje. Esta teoría debe su nombre original a la consideración conjunta de los términos «communication» y «cognition», que se fusionan creando el término «commognition». Para Sfard (2008), los discursos son vistos como formas de comunicación, diferenciadas por sus objetos, los tipos de mediadores visuales utilizados, y las reglas/normas que siguen los participantes. Como en nuestra investigación estamos interesados en el conocimiento matemático de los estudiantes, analizamos su discurso utilizando esta perspectiva sociocultural. Describimos a continuación las principales características de la teoría de la comognición sobre las que nos apoyamos.

Sfard (2008) considera que existen cuatro propiedades o elementos de un discurso que lo caracterizan particularmente como «matemático». Estos elementos son el uso de palabras, los mediadores visuales, las narrativas y las rutinas. Por un lado, el uso de palabras hace referencia tanto a palabras propias del vocabulario matemático, como por ejemplo «rectángulo», como a palabras del lenguaje cotidiano que se usan con un significado matemático, como por ejemplo «tumbado» (en el sentido de prisma «oblicuo»). Los mediadores visuales son los objetos visibles que se utilizan como parte de la comunicación, como por ejemplo los diagramas, gráficos, figuras o símbolos. Las narrativas son cualquier conjunto de expresiones habladas o escritas que describen objetos y procesos, así como relaciones entre estos. Las narrativas están sujetas a consenso, modificación o rechazo a tenor de las reglas o normas que tenga definida la comunidad. Aquellas narrativas aceptadas por la comunidad se llaman narrativas asumidas. Ejemplos de estas son las definiciones, las pruebas o los teoremas. Por último, las rutinas son patrones de comportamiento usados con regularidad y de una forma diferenciada por los participantes del discurso. Concretamente, son regularidades que se observan, por ejemplo, en la manera de realizar cálculos, de definir objetos o de justificar afirmaciones. En particular, cuando a los estudiantes se les pide definir un sólido geométrico, que den exclusivamente un listado de propiedades del mismo.

La teoría de la comognición (Sfard, 2008) considera que la comunicación humana es una actividad regulada por reglas y distingue dos tipos de reglas que gobiernan los discursos, las reglas a nivel objeto y las reglas a nivel meta (meta-reglas). Las reglas a nivel objeto son narrativas que informan sobre el comportamiento regular de los objetos del discurso (por ejemplo, «la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados») y las meta-reglas son patrones de comportamiento que se observan en la actividad de los participantes del discurso cuando estos tratan de producir, corroborar o justificar narrativas a nivel objeto (por ejemplo, la forma de demostrar la proposición «la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados»). Así, las rutinas pueden verse como conjuntos de meta-reglas que describen acciones que se repiten en el discurso.

En nuestra investigación, analizamos el discurso de los estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando construyen definiciones de cuerpos geométricos. En particular, aquí presentamos el estudio relativo al uso de palabras y narrativas. Como mencionaba Sfard (2008), el uso de palabras es una característica discursiva de suma importancia porque es la que nos informa sobre lo que el usuario puede decir sobre (y por tanto ver en) el mundo. Por otro lado, también es fundamental analizar en profundidad las narrativas que producen los estudiantes para así ver qué discurso matemático usan y entender cómo desarrollan las prácticas matemáticas propias de esta disciplina.

En resumen, este trabajo utiliza la teoría de la comognición, y en concreto los constructos uso de palabras y narrativas, para estudiar y explicar cómo los estudiantes para maestro desarrollan la práctica matemática de definir.

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

El estudio presentado en este capítulo es parte de otro más amplio que trata de caracterizar el discurso de estudiantes universitarios del Grado en Educación Primaria y del Máster en Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES) cuando construyen y seleccionan definiciones matemáticas.

Los participantes de la parte del estudio presentada en este capítulo fueron estudiantes (en su mayoría de 18-19 años) matriculados en una asignatura del 1º curso del Grado en Educación Primaria. Estos estudiantes trabajaban durante una hora a la semana en grupos de tres a cinco estudiantes para resolver diversas tareas o problemas matemáticos. Concretamente, en este estudio participaron voluntariamente 45 estudiantes distribuidos en 12 de estos grupos (que llamaremos G1, …, G12).

Instrumento de investigación

Para caracterizar el proceso de definir de los estudiantes, elegimos estudiar la construcción de definiciones de conceptos geométricos. Esta elección estuvo motivada por el hecho de que la geometría es un campo matemático en el que las definiciones juegan un papel muy importante. Nosotros escogimos la geometría espacial como contexto de nuestra investigación porque nuestra experiencia como docentes nos indica que los estudiantes no están tan familiarizados con ella como lo están con la geometría plana. Esto puede favorecer que surja un discurso sobre cómo construir definiciones matemáticas, en lugar de un mero recitado memorístico. Además, esperábamos que esto produjese un discurso matemático, que caracterizaríamos mediante las herramientas del marco comognitivo (Sfard, 2008).

Teniendo en cuenta todos estos aspectos, diseñamos un instrumento en el que incluimos preguntas abiertas que promovieran la aparición de las mencionadas herramientas (Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Gavilán-Izquierdo, 2018). Este instrumento fue una adaptación de trabajos anteriores en geometría plana (Gavilán-Izquierdo, Sánchez-Matamoros y Escudero, 2014; Sánchez y García, 2014), que a su vez estaban basados en Gavilán, Ariza, Barroso y Sánchez (2002). Dicho instrumento tiene dos partes, la primera que tiene como objetivo estudiar cómo los estudiantes universitarios construyen definiciones de cuerpos geométricos y la segunda que tiene como objetivo indagar cómo los estudiantes seleccionan una definición matemática entre varias disponibles.

En este capítulo nos centramos en la primera parte del instrumento. Teniendo en cuenta cómo hemos considerado el proceso de definir, esta primera parte incluye algunas preguntas relacionadas con la identificación y descripción de las propiedades de cuerpos geométricos y otras relacionadas con la propia definición. En el instrumento aparecen imágenes de tres poliedros diseñadas con el software dinámico GeoGebra: un cubo; un prisma cuadrangular, oblicuo y convexo; y un prisma cuadrangular, oblicuo y cóncavo (ver Figura 1). Elegimos estos tres cuerpos geométricos porque los tres tienen algunas propiedades en común (son prismas cuadrangulares) y otras que los diferencian (el primero es el único poliedro regular y también es el único poliedro recto; el segundo es el único poliedro convexo y oblicuo a la vez; y el tercero es el único cóncavo).

A continuación de las imágenes, aparecen en el instrumento nueve preguntas relacionadas con la práctica de definir cuerpos geométricos. En ellas, usamos los términos «propiedades» y «características» como sinónimos, debido a que no sabemos con cuál de ellos los estudiantes están familiarizados. Algunas de esas preguntas son:

- Pregunta 1. En los 3 cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- Pregunta 2. De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Pregunta 5. Definid cada uno de los cuerpos.
- Pregunta 8. ¿Podríais dar una definición que sirva para dos de los cuerpos dados? ¿Y para 3?

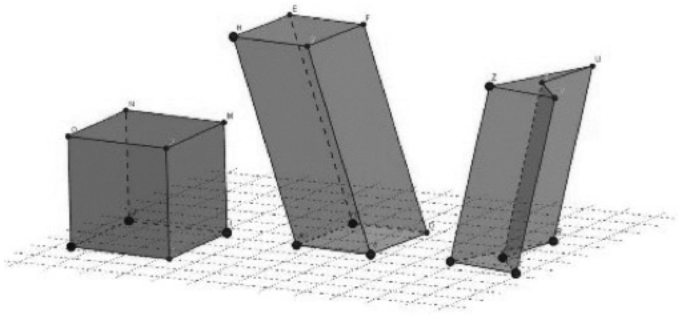


Figura 1. Representación de los cuerpos geométricos que aparecían en el instrumento

Recogida de datos

A cada uno de los 12 grupos de estudiantes se les dio una copia en papel del instrumento de investigación y se les pidió que verbalizasen sus respuestas lo máximo posible. Cuando se produjo la recogida de datos, los estudiantes ya habían recibido instrucción sobre geometría plana pero no sobre geometría espacial.

Los datos de este estudio son: las grabaciones en audio de los 12 grupos mientras responden a las preguntas planteadas en el instrumento; las transcripciones de dichas grabaciones, las cuales nos permiten acceder a la discusión y negociación entre los estudiantes; y las respuestas escritas, que son importantes porque recogen el consenso del grupo.

Análisis

Una vez transcritas las grabaciones en audio de los doce grupos, realizamos el análisis en dos fases. En la primera fase identificamos el uso de palabras y las narrativas que aparecían en las transcripciones y en las respuestas escritas de los estudiantes, que nos aportaron información sobre el proceso de definir. Para ello, cada investigador realizó individualmente dicha identificación, que posteriormente se contrastó con un segundo investigador y finalmente fue validada por el equipo investigador al completo. Las propiedades del discurso (uso de palabras y narrativas) identificadas por todos fueron aceptadas, y aquellas en las que inicialmente había desacuerdo fueron discutidas por el grupo de investigadores con el fin de ser aceptadas o rechazadas.

En la segunda fase del análisis, siguiendo un método inductivo, clasificamos todas las narrativas y las palabras matemáticas identificadas y aceptadas por el grupo. Esto se hizo con el objetivo de caracterizar el proceso de definir.

A continuación, mostramos cómo llevamos a cabo el proceso de análisis. Para ello presentamos un extracto de las respuestas de la pregunta 5 del grupo G7 (de estudiantes A1, A2, A3, A4). En la primera fase del análisis, se señaló el uso de palabras en negrita y las narrativas en cursiva:

207. A2: si hablamos de **prismas**, *es un* ***prisma hexagonal***, pero...
208. A4: ya la hemos definido antes, en… [en referencia a la pregunta 1].
209. A3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.
210. A4: Eah, las características. Claro, que *es un* ***cubo*** *con estas características…*
211. A1: Profesora, ¿en el 5 qué hay que poner? [en referencia a la pregunta 5]
212. Profesora (P): mi pregunta a vosotros es: ¿qué consideráis que es una definición? ¿Decir cuáles son las características? ¿Decir el nombre? ¿Qué?
213. A1: *el nombre y… las características… es la definición*.
214. P: eso es lo que yo os pregunto a vosotros.
215. A2: yo creo que sí…
216. P: Entonces, habladlo entre vosotros y, lo que decidáis, es lo que debéis escribir.
217. A3: *tiene que ser una definición que sea solamente para ese*.
218. A1: primero, vamos a ver: *es un* ***cuerpo geométrico***. […]
219. A4: *primero el nombre*.
220. A3: *un* ***cubo***, ¿no?
221. A1: sí.

222. A3: *un* ***cubo*** *es… un* ***cuerpo geométrico****…*
223. A2: que *son todos* ***prismas****, porque están formados de varios* ***polígonos****.*
224. A4: ***polígonos*** *de 6* ***caras****.*
225. A3: *de 6* ***caras****…* ***iguales****.*
226. A2: *de* ***base cuadrangular****.*

En la segunda fase, se clasificaron las palabras (señaladas en negrita) encontradas en el extracto anterior según para qué fuesen usadas: para etiquetar (prisma, prisma hexagonal, cubo, cuerpo geométrico), o para describir cuerpos geométricos o sus elementos (formados de varios polígonos, de 6 caras, caras iguales, base cuadrangular). También se distinguió cómo los estudiantes usaron las palabras en su discurso matemático: de forma correcta (todas las palabras señaladas en negrita excepto prisma hexagonal), y de forma incorrecta (prisma hexagonal).

Asimismo, las narrativas fueron clasificadas en categorías según las similitudes y diferencias que presentaban. En la sección de resultados presentamos todas las categorías que han emergido (Tabla 1). En el extracto anterior aparecen las categorías N2 (líneas 207, 210, 218, 220, 222, 223), N3 (líneas 223-226), N4a (líneas 213, 219), N4c (línea 217) y N5a (líneas 222-226).

RESULTADOS

Mostramos a continuación los resultados del análisis del uso de palabras y las narrativas identificadas en el discurso matemático de los estudiantes de los doce grupos considerados.

Uso de palabras

Identificamos primero qué palabras aparecían y después las clasificamos según su uso. Concretamente, hacemos referencia a «para qué» se usan y «cómo» se usan.

Con respecto a «para qué» se usan, hemos identificado dos usos diferentes: para etiquetar un cuerpo o sus elementos, y para describir un cuerpo o sus elementos. En el primer caso, algunos ejemplos de etiquetas encontradas en el discurso de los estudiantes son: cubo, prisma, cuadrilátero, lados, diagonales, vértices, ángulos, caras, bases, convexo, cóncavo. En el segundo caso, hemos encontrado, entre otras, las siguientes palabras para describir un cuerpo o sus elementos: no consecutivos (referida a vértices); recto, poliédrico, agudo, obtuso, diedros (referidas a ángulos); iguales, simétricas o semejantes (referidas a caras); cuadrangulares (referida a bases); regular o irregular, oblicuo, tumbado, ladeado, recto, rectangular, cuadrado, cóncavo y convexo, planos, tridimensionales (referidas a cuerpos).

Con respecto a «cómo» los estudiantes usan palabras en su discurso matemático, hemos distinguido tres categorías diferentes: los estudiantes usan palabras matemáticas de forma correcta, los estudiantes usan palabras matemáticas de forma errónea y, por último, usan palabras coloquiales con significado matemático. A continuación, mostramos un ejemplo representativo de cada una de ellas:

- Usan palabras matemáticas de forma correcta. Un ejemplo de esta categoría son las palabras cubo y prisma encontradas en el discurso del grupo G8:
  2. A1: el primero es un cubo ¿no?, y el otro ¿cómo se llamaba? Prisma, ¿cómo se llamaba?
  3. A3: prismas, son todos prismas.
- Usan palabras matemáticas de forma errónea. Un ejemplo de esta categoría son las palabras cóncavo y convexo identificadas en el discurso del grupo G7:
  138. A1: [...] cóncavo era cuando tienen todos los lados y los ángulos iguales, convexos cuando no son iguales.
- Usan palabras coloquiales con significado matemático. Como ejemplo mostramos una narrativa encontrada en el discurso del grupo G2 en la que aparece la palabra «daleado» (vulgarismo andaluz para ladeado):
  71. A3: Yo creo que el cuerpo 2 es un prisma que tiene su base cuadrada, aunque esté así un poquillo daleado sigue siendo un prisma [...].

En relación con el uso de palabras matemáticas, consideramos que los estudiantes las usan con dos objetivos diferentes (para etiquetar y describir) y que las usan de tres formas distintas (de forma correcta, errónea y coloquial). Las categorías de esta clasificación no son excluyentes, es decir, puede haber palabras que en ocasiones se usen de forma correcta y en otras de forma errónea. Asimismo, una palabra que se haya usado para etiquetar puede ser correcta, errónea o ser una palabra coloquial usada con significado matemático.

Además, hemos identificado diferencias en cómo los estudiantes etiquetan o describen cuerpos dependiendo del grado de familiaridad que tengan con ellos (habitualmente los estudiantes están más familiarizados con los prototípicos). Por un lado, los estudiantes presentan un vocabulario más amplio, que usan de forma correcta, cuando están familiarizados con los cuerpos. Por otro lado, los estudiantes presentan deficiencias en su conocimiento de palabras matemáticas asociadas a los cuerpos que les son menos familiares, como se manifiesta con el uso erróneo de palabras (confundir cóncavo con regular) y en el recurrir a palabras coloquiales (tumbado o daleado con el significado matemático de oblicuo).

Narrativas

Una vez identificadas todas las narrativas del discurso matemático de los estudiantes, fueron clasificadas en seis categorías (N1, N2, N3, N4, N5 y N6), con la cuarta y la quinta divididas en tres subcategorías cada una (N4a, N4b y N4c; N5a, N5b y N5c). Presentamos a continuación cada una de ellas, junto con ejemplos representativos.

N1. Narrativas que recogen una definición de un elemento del cuerpo geométrico. En este tipo de narrativas, los estudiantes definen explícitamente un elemento o propiedad matemáticos. Por ejemplo, en el grupo G12 se definen aristas:

66. A1: ¿Aristas?… ¿Qué es?
67. A4: Aristas son lo que unen un vértice, las líneas…1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

N2. Narrativas en las que se etiquetan cuerpos geométricos o sus elementos. Se usan para asignarle un nombre a un cuerpo geométrico o un elemento del mismo. Por ejemplo, en el grupo G5 los estudiantes etiquetan los cuerpos geométricos:

167. A2: un prisma rectangular.

167. A4: y el otro es un cuerpo irregular.

N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos. Estas propiedades pueden ser *numéricas* (los estudiantes cuantifican el número de caras, vértices, etc.) o *cualitativas* (el ángulo es recto, las caras son iguales dos a dos, las caras son simétricas, etc.). Mostramos a continuación un ejemplo representativo del G1 en el que aparecen propiedades de los dos tipos:

9. A1: Que tiene 6 caras…
10. A2: Sí.
11. A1: Son iguales…
12. A4: La forma de sus caras son cuadriláteros regulares, cuadrados. Sus vértices son todos iguales, sus lados y sus ángulos también son todos iguales.
13. A1: Tiene 8 vértices…

N4. Narrativas sobre qué significa definir. En esta categoría se recogen aquellas narrativas en las que aparece explícitamente qué entienden los estudiantes por definir. Distinguimos tres subcategorías dependiendo de qué estructura pensaban que debía tener la definición.

N4a. Definir es decir el nombre y las características. Un protocolo representativo de esta subcategoría podemos encontrarlo en el extracto incluido en la subsección de análisis. En particular, en la línea 213, cuando el grupo G7 responde a la pregunta «Definid cada uno de los cuerpos».

N4b. Definir es explicitar solo las características. A diferencia de la subcategoría anterior, en esta los estudiantes no consideran necesario incluir un nombre cuando definen un cuerpo. A continuación, mostramos un ejemplo representativo identificado en el grupo G2:

98. A2: Pues yo lo definiría con las características que tenía en la primera pregunta. La primera pregunta te pide las características de eso, eah, pues las mismas características es lo que define la figura […].

N4c. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden dar lugar a clasificaciones inclusivas o exclusivas. Este tipo de narrativas surge principalmente en dos momentos: cuando los estudiantes cuestionan el alcance de las definiciones que han construido para los otros cuerpos o cuando se les pide que construyan definiciones válidas para más de un cuerpo. A continuación, se muestra un ejemplo representativo del grupo G2 donde se pueden apreciar este tipo de narrativas:

134. A3: Es que lo que pasa es como con los triángulos y los rombos y todo eso, que dentro del rombo están también los cuadrados. Pues a lo mejor dentro de la definición de este cabe este, pero no tiene por qué.

N5. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico. En esta categoría se recogen aquellas narrativas en las que los estudiantes definen un cuerpo geométrico. Distinguimos tres subcategorías dependiendo de qué estructura presenta dicha definición.

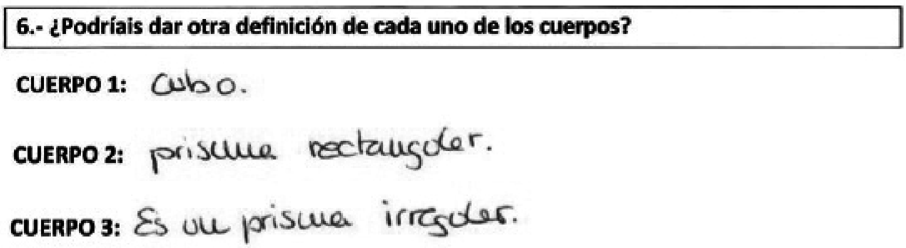
N5a. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante una etiqueta y características. En estas narrativas, los estudiantes construyen definiciones mediante el uso de etiquetas (cubo, prisma, etc.) y características (tiene 6 caras, es recto, está tumbado, etc.). Incluimos a continuación un protocolo representativo del grupo G1:

156. A3: Bueno es un prisma irregular cuyas dos bases son figuras irregulares.
157. A1: Claro, y las caras laterales son también rectángulos.

N5b. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo una etiqueta. En estas narrativas las definiciones de los cuerpos geométricos están formadas por una etiqueta, sin una descripción de las características del cuerpo, como se puede ver en el siguiente protocolo del grupo G4:

44. A4: […] En la pregunta 6, al cuerpo 1 le podríamos dar la definición de cubo, el cuerpo 2 prisma rectangular y el cuerpo 3 es un prisma irregular.

Esta categoría de narrativas se vuelve a identificar en la respuesta escrita del grupo G4 a la pregunta 6:


6.- ¿Podríais dar otra definición de cada uno de los cuerpos?

CUERPO 1: Cubo.

CUERPO 2: prisma rectangular.

CUERPO 3: Es un prisma irregular.

Figura 2. Respuesta escrita a la pregunta 6 del grupo G4

N5c. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo características. En estas narrativas, las definiciones están formadas, en contraposición con las anteriores, solo por una descripción de las características del cuerpo. Presentamos a continuación dos protocolos representativos, el primero del grupo G4:

44. A4: la definición para el cuerpo 1 es que todas las caras son iguales, cuadrados, el cuerpo 2 tiene 4 caras rectangulares y las dos bases son rectángulos y el cuerpo 3 tiene cuatro caras rectangulares y dos bases que son polígonos irregulares. Todos los cuerpos tienen 6 caras, 12 aristas y 8 vértices. […]

Y el segundo protocolo correspondiente al grupo G5:

415. A1: ¿cuál es la segunda definición?

416. A4: la de las aristas, los vértices, las caras…el cuerpo 1 tiene hemos dicho 8 vértices, 12 aristas.

417. A1: por 6 caras iguales.

N6. Narrativas en las que se describen relaciones entre propiedades. En algunas ocasiones los estudiantes enuncian sencillas proposiciones en las que unas propiedades de los cuerpos se deducen de otras. Un ejemplo representativo lo encontramos en la línea 107 del grupo G9:

107. A4: Si tiene 6 lados, tiene 12 aristas.

A continuación, resumimos en una tabla las categorías de narrativas identificadas y los grupos en las que aparecen:

Tabla 1. Categorías de narrativas identificadas en el discurso de los grupos de estudiantes

<table>
<tr><th colspan="2">NARRATIVAS</th><th>GRUPOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">N1. Narrativas que recogen una definición de un elemento del cuerpo geométrico</td><td>G1, G6, G7, G9, G11, G12</td></tr>
<tr><td colspan="2">N2. Narrativas en las que se etiquetan cuerpos geométricos o sus elementos</td><td>G1-G12 (todos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos</td><td>G1-G12 (todos)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">N4. Narrativas sobre qué significa definir</td><td>N4a. Definir es decir el nombre y las características</td><td>G7</td></tr>
<tr><td>N4b. Definir es explicitar solo las características</td><td>G2, G3, G5, G6, G11</td></tr>
<tr><td>N4c. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden dar lugar a clasificaciones inclusivas o exclusivas</td><td>G2, G5, G7</td></tr>
</table>

NARRATIVAS		GRUPOS
N5. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico	N5a. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante una etiqueta y características	G1, G2, G3, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12
	N5b. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo una etiqueta	G3, G4, G5, G8, G9, G12
	N5c. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo características	G2, G4, G5, G6, G8, G9, G10
N6. Narrativas en las que se describen relaciones entre propiedades		G8, G9

En base a estos primeros resultados, hemos identificado la existencia de seis categorías de narrativas, cinco a nivel objeto (que informan sobre el comportamiento regular de los objetos) y una a nivel meta (que informa sobre cómo producir las narrativas de nivel objeto). Concretamente, las tres primeras categorías de narrativas (N1, N2 y N3) son de nivel objeto porque recogen la definición de un elemento de los cuerpos, etiquetan cuerpos o sus elementos y describen las propiedades o características de los cuerpos. La cuarta categoría de narrativas (N4) es de nivel meta porque incluye las narrativas en las que los estudiantes dialogan sobre qué significa definir en matemáticas. La categoría de narrativas N5 también es de nivel objeto porque recoge las narrativas en las que se define un cuerpo geométrico. Finalmente, la categoría de narrativas N6, que incluye narrativas en las que se relacionan unas propiedades de los cuerpos con otras, se considera de nivel objeto (aunque sea ligeramente distinta de las tres primeras) porque recoge información sobre los objetos en sí, no sobre cómo los estudiantes producen y justifican dicha producción de narrativas.

Estas seis categorías de narrativas no están presentes de igual forma en los doce grupos analizados. Las tres primeras categorías de narrativas, que están relacionadas entre sí, surgen por las primeras preguntas del instrumento de investigación, en las que se pide a los estudiantes que describan los cuerpos. En particular, las categorías de narrativas N2 y N3, en las que los estudiantes etiquetan o describen los cuerpos geométricos o sus elementos, están presentes en todos los grupos. Este resultado era esperado porque, como ya hemos mencionado, el instrumento de investigación recogía varias preguntas sobre la descripción de los cuerpos y sus elementos. Lo inesperado fue que muchos estudiantes decidieron etiquetar los cuerpos geométricos o sus elementos (categoría de narrativas N2) en preguntas relativas a la descripción de los elementos de los cuerpos geométricos. La categoría de narrativas N1 aparece en menos de la mitad de los grupos y su aparición está motivada por la necesidad de los estudiantes de definir algún elemento (como arista o vértice) antes de describir sus propiedades.

La única de las seis categorías con narrativas a nivel meta (N4) está presente en el discurso de menos de la mitad de los grupos de estudiantes, a pesar de que había en el instrumento varias preguntas en las que los estudiantes tenían que construir una definición de un cuerpo geométrico. Como esperábamos por el diseño del instrumento, la categoría de narrativas N5 aparece en todos los grupos. Lo que resulta relevante aquí es qué subcategorías aparecen (N5a, N5b o N5c) en el discurso de cada grupo y el contraste con las subcategorías de narrativas N4 (N4a, N4b, N4c). Por ejemplo, es llamativo que solo un grupo (G7) usó narrativas explícitas en las que se recogía que una definición debe incluir un nombre y unas características, pero esta fue la estructura de la definición más utilizada por todos los grupos (todos menos G4 construyeron sus definiciones de esta forma). También es de destacar que solo tres de los grupos (G1, G7 y G11) usaron siempre narrativas de la subcategoría N5a (y no de N5b, o N5c), en las que una definición incluye nombre y características. Los otros nueve grupos usaron más de una estructura diferente en sus definiciones. De hecho, tres de esos nueve grupos (G5, G8 y G9) enunciaron definiciones de los cuerpos geométricos de las tres maneras distintas identificadas, es decir, usando narrativas del tipo N5a, N5b y N5c.

Los resultados obtenidos nos permiten señalar una falta de homogeneidad en la forma en la que definen los distintos grupos de estudiantes. Igualmente se puede observar que todos los grupos, en algún momento, dan una definición en la que aparece una etiqueta del cuerpo a definir.

La categoría de narrativas N6 únicamente ha sido identificada en dos grupos (G8 y G9), que la usaron para deducir unas propiedades de otras (por ejemplo, que «caras iguales implica que las aristas son iguales»). Es interesante el hecho de que estos dos grupos en ningún momento discutieron sobre qué significa definir.

CONCLUSIONES

En este capítulo hemos presentado los resultados de nuestro análisis del discurso de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando construyen definiciones matemáticas de cuerpos geométricos. Hemos utilizado la teoría de la comognición de Sfard (2008) para caracterizar dicho discurso mediante la identificación del uso que hacen los estudiantes de las palabras (tanto matemáticas como coloquiales con significado matemático) y de qué tipos de narrativas utilizan.

Los resultados encontrados nos proporcionan indicadores sobre el discurso matemático de los estudiantes del grupo y las dificultades que tienen. Por una parte, el uso de palabras erróneas o de palabras coloquiales usadas con significado matemático nos indica carencias en el vocabulario matemático de todos los grupos. Por otra parte, la identificación de categorías de narrativas a nivel objeto y a nivel meta nos ha ayudado a caracterizar cómo definen los estudiantes. Por ejemplo, los estudiantes de algunos grupos manifiestan la necesidad de definir los elementos de los cuerpos antes de usarlos para describir los cuerpos, lo que deducimos de la presencia de la categoría de narrativas N1. Otros grupos parecían no tener claro qué significaba definir, lo que se pone de manifiesto en la aparición de la categoría de narrativas N4. Estas narrativas también muestran que los estudiantes no conocen algunos de los requisitos mayoritariamente aceptados de una definición, que según Borasi (1991) son «precisión en terminología», «aislamiento del concepto», «esencialidad», «no contradicción» y «no circularidad» y según Zaslavsky y Shir (2005) son «jerarquía», «no ambigüedad», «no contradicción», «no circularidad», «invariancia» y «minimalidad».

También se puede apreciar una falta de homogeneidad en la manera de definir de los distintos grupos (existencia de diferentes subcategorías de N5). Asimismo, los resultados ponen de manifiesto que todos los grupos de estudiantes formulan una definición en la que aparece una etiqueta del cuerpo a la hora de definirlo. Estos indicadores nos llevan a concluir que no parece que los grupos de estudiantes compartan un patrón claro a la hora de definir, lo que puede estar causado por una falta de formación en esta práctica matemática. De hecho, Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) achacan a la falta de una formación adecuada el hecho de que los estudiantes manejen «conceptos de manera elemental» (p. 539) y manipulen «definiciones formales aun cuando no han desarrollado la habilidad para construirlas» (p. 539). Estos autores pudieron comprobar que, como consecuencia, los estudiantes solo construyeron unas pocas definiciones que eran formalmente correctas.

Los resultados de este capítulo también muestran que algunos grupos parecen confundir la descripción de un cuerpo con su definición matemática, lo que puede mostrar la falta de un discurso adecuado. Este hecho se relaciona directamente con el requisito de esencialidad de una definición, que según Borasi (1991) implica que las definiciones deben incluir solo los términos o propiedades que son estrictamente necesarios para distinguir el concepto en cuestión de otros. Sería interesante profundizar en si esta confusión entre describir y definir puede ser una manifestación de la existencia de dos discursos diferenciados dentro del discurso matemático. La adopción por parte de los estudiantes de un discurso adecuado es algo muy importante porque, desde nuestra perspectiva sociocultural, su aprendizaje es un cambio hacia el discurso matemático propio de la comunidad de matemáticos. Una posible manera de ayudar a los estudiantes a transitar desde el discurso de describir al de definir podría ser gracias a la interacción producida durante el trabajo en grupo, que Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) afirman tiene varias fortalezas.

Por otra parte, como se pone de relieve en el trabajo de Ouvrier-Buffet (2006), las «proof-generated definitions» se originan mediante el proceso de prueba a partir del potencial de desarrollo de las «zero-definitions». En este sentido, durante el desarrollo de la prueba, las «zero-definitions» podrían evolucionar o no hasta convertirse en «proof-generated definitions». En nuestro estudio, tratamos de ampliar esta visión y aportar otras perspectivas al proceso de evolución de las «zero-definitions». Para nosotros, el proceso de descripción de los cuerpos (con el que da inicio el instrumento) es el que hará que emerjan ciertas «zero-definitions», que luego deberán ser sometidas a un proceso de refinamiento a través de la comparación y la selección. De este modo, la evolución de una definición en principio más primitiva («zero-definition») podría desarrollarse a partir no solo de un proceso de prueba, sino también de otros relacionados con la descripción de los cuerpos geométricos o la comparación y selección de definiciones.

Nuestros resultados muestran algunas diferencias con respecto a los obtenidos en geometría 2D por Gavilán-Izquierdo et al. (2014). En particular, en el discurso de los estudiantes sobre los cuerpos geométricos, han aparecido narrativas en las cuales se recogen propiedades cuantitativas y otras en las que se definen los elementos de dichos cuerpos. Ambos tipos de narrativas estaban ausentes del discurso de los estudiantes cuando definían cuadriláteros, quizás porque los estudiantes están más familiarizados con la geometría 2D y, por tanto, no parecen sentir la necesidad de explicitar el número de lados, vértices y otros elementos que componen cada figura, o de definir dichos elementos.

Una posible línea futura de trabajo sería considerar el papel de los mediadores visuales (Sfard, 2008) en la construcción de las definiciones por parte de los estudiantes. Para ello sería conveniente tener en cuenta los trabajos de Vinner (1991) sobre la imagen y definición de un concepto, así como las relaciones que se establecen entre ellas.

Finalmente, nos gustaría señalar que la investigación presentada en este capítulo se complementa con el estudio de las rutinas que describen el patrón de comportamiento de los estudiantes cuando construyen definiciones (Martín-Molina, Toscano et al., 2018). De hecho, los resultados de este capítulo fueron fundamentales para la identificación de rutinas porque las narrativas permiten inferir rutinas. La integración de ambos trabajos da una visión global del discurso de los estudiantes cuando construyen definiciones matemáticas y podría ayudarnos a identificar y caracterizar las distintas etapas del proceso de definir desarrollado por estudiantes universitarios.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con la Ayuda IV.4 del VI Plan Propio de Investigación y Transferencia de la Universidad de Sevilla.

REFERENCIAS

Alvarado Monroy, A. y González Astudillo, M. T. (2016). Construcción social de los procesos de definir y demostrar. *Educaçao matemática pesquisa, 18*(2), 527-549.

Borasi, R. (1991). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books, Ins.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2012). *The mathematical education of teachers II*. Providence, RI & Washington, DC: American Mathematical Society & Mathematical Association of America.

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 337-344). Vancouver: PME.

Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 7-32.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Gavilán, J. M., Ariza, A., Barroso, R. y Sánchez, A. (2002). Laboratorio virtual de matemáticas II. En J. M. Mesa, R. J. Castañeda y L. M. Villar (Eds.), *La Universidad de Sevilla y la innovación docente, curso 2001-2002* (Vol. 1, pp. 77-85). Sevilla: Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en matemáticas: Estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 32*(3), 529-550.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano-Barragán, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Aspectos del discurso de estudiantes universitarios cuando construyen definiciones matemáticas. En *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)* (Vol. 8, pp. 77-85). Jaén: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Krauss, S. y Blum, W. (2012). The conceptualisation and measurement of pedagogical content knowledge and content knowledge in the COACTIV study and their impact on student learning. *Journal of Education*, *56*, 45-66.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 87-113.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: Una aproximación desde «ISI-web of knowledge» y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248.

Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). The design and implementation of a research instrument about students' discourse on the mathematical practice of defining. Enviado para su publicación.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A. J., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 355-362). Umeå: PME.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. y Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: The case of discursive shifts in the study of calculus. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 182-198.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 259-282.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 423-430.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Sánchez, V. y García, M. (2008). What to teach and how to teach it: Dilemmas in primary mathematics teacher education. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 4: The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 281-297). Rotterdam: Sense Publishers.

Sánchez, V. y García, M. (2014). Socio-mathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 305-320.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: The case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 163-187.

Thompson, P. W., Carlson, M. P. y Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 415-432.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Wasserman, N. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *Journal of Mathematical Behavior, 49*(1), 116-128.

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-347.

ESTRUCTURANDO LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UNA PROPUESTA DESDE EL MODELO MTSK

STRUCTURING MATHEMATICS TEACHER EDUCATION: A PROPOSAL FRAMED BY THE MTSK MODEL

Montes, M.[1], Carrillo, J.[1], Contreras, L. C.[1], Liñán-García, M. M.[2, 3], y Barrera-Castarnado, V. J.[2, 3]

[1]*Universidad de Huelva;* [2]*Universidad de Sevilla;*
[3]*Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU*

RESUMEN

En este capítulo abordamos cómo el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas constituye una herramienta útil para organizar la formación inicial de los maestros, en lo relativo al contenido matemático, desde una doble perspectiva: la estructuración de las asignaturas, y el diseño de tareas. Mostraremos para esto dos ejemplos propios de la Universidad de Huelva: una asignatura orientada hacia la construcción de conocimiento geométrico, tanto matemático como didáctico, y una tarea centrada en la reflexión sobre las características de los polígonos.

Palabras clave: *formación inicial de maestros, tareas, profesor de matemáticas, conocimiento especializado, MTSK.*

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

In this chapter we focus on how the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge is a powerful tool to frame prospective mathematics teachers' training from a double perspective: the structuring of the subjects, and the design of tasks. Aiming a better understanding of our perspective, we will show two examples from the University of Huelva: a subject oriented towards the construction of geometrical knowledge, both mathematical and didactical knowledge, and a task focused on the reflection about some features of polygons.

Keywords: *teacher education, tasks, mathematics teacher, specialized knowledge, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial de profesores de matemáticas en España es diferente en el caso de profesores de Educación Secundaria (donde realmente tiene sentido hablar de profesores de matemáticas) y de Educación Primaria (donde tendríamos que hablar de maestros que enseñan matemáticas). En la actualidad, la primera es una formación dividida entre Grado (no necesariamente de Matemáticas, pero en general sin una orientación específica a la profesión docente) y Máster (Máster en Profesorado de Secundaria y Bachillerato); mientras que la segunda es de Grado y con orientación hacia la profesión docente.

Aunque sería interesante abordar la carrera docente como un continuo coherente y discutir en ese ámbito la orientación específica a seguir, nos centraremos en este capítulo solo en la formación de maestros de Educación Primaria. No obstante, no evitaremos así la complejidad que supone que, bajo directrices de Planes de Estudio comunes en todo el Estado, se desarrollen programas formativos donde conviven modelos diferentes de organizar el contenido matemático y el didáctico del contenido, bajo el epígrafe genérico de «Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas».

Para salvar la distancia existente entre la formación inicial y la práctica profesional (Goos, 2014), la formación de profesores de matemáticas debería inspirarse en las tareas y competencias profesionales. Por eso, cuando pensamos en el diseño de programas y actividades para la formación inicial, debemos tener la mirada puesta en lo que un profesor tendrá que hacer cuando se encuentre en su aula.

Una sesión de aula de matemáticas siempre tiene un detonante; ese detonante puede ser, por ejemplo, una pregunta de un estudiante o del profesor, o un problema o una actividad con un recurso o extraída de un libro de texto. En los casos en los que es el profesor quien lo provoca, estamos o bien ante una tarea planificada, o un momento de improvisación; cuando proviene del estudiante, ante una situación de contingencia (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009). En ambos casos, el itinerario que sigue al detonante no está unívocamente determinado, aunque puede caracterizarse por momentos de interacción del profesor con los estudiantes (intentando comprender sus intervenciones, respondiendo o canalizando las respuestas a sus preguntas, reconduciendo los errores o lanzando nuevos retos), o del profesor y los estudiantes con el contenido matemático (Jaworski, 1994), desarrollando investigaciones o resolviendo problemas en cuyos procesos la argumentación y la demostración serán constantes; y para ello, se apoyará en diversos recursos (el libro de texto, material manipulativo o recursos tecnológicos). Estos momentos descritos han de acompañarse necesariamente de otros de institucionalización de los aprendizajes (Brousseau, 2007). En las situaciones de contingencia, además, el profesor necesitará hacer uso de su espacio de ejemplos en el ámbito del contenido matemático que está abordando (Sinclair, Watson, Zazkis y Mason, 2011).

La clase termina, pero no así el trabajo del profesor, que necesita reflexionar sobre la sesión desarrollada y planificar la siguiente. Para que esta reflexión sea efectiva es útil que disponga de un marco organizativo que le ayude a realizarla de forma disciplinada y estructurada, para identificar los elementos esenciales de la práctica, reflexionar sobre esos elementos de forma integrada y ofrecer planteamientos alternativos de enseñanza (Santagata y Guarino, 2011), así como para aprender a mirar con sentido la práctica profesional, propia o de otros (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018).

El proceso de aprender a enseñar matemáticas requiere que estas tareas profesionales formen parte de la rutina de actividades de la formación inicial de forma que tanto la reestructuración (y a veces reconstrucción), como la comprensión profunda del contenido matemático (Ma, 1999), se desarrollen en escenarios centrados en las tareas de enseñanza, generando oportunidades de aprendizaje situado en el contexto de la práctica (Ball y Cohen, 1999). Ello no significa que la formación tenga que desarrollarse en la propia aula de Primaria o Secundaria; podría tener lugar mediante el uso de material, como casos o videocasos, que permita compartir experiencias para explorar aspectos centrales de la práctica (Borko, Koellner y Jacobs, 2011), potenciando así también la construcción de conocimiento didáctico del contenido matemático. Las actividades a desarrollar en la formación inicial así diseñadas ofrecerán a los futuros profesores múltiples oportunidades de aprendizaje: oportunidades para desempaquetar los contenidos matemáticos implicados (Ma, 1999), para organizarlos dentro de una estructura coherente, mejorar su capacidad de argumentar, discutir sobre formas de abordar esos contenidos, comprender el pensamiento de los estudiantes, anticipar sus respuestas, generar ejemplos para reconducirlas o reflexionar sobre la oportunidad de que determinada actividad se desarrolle en un nivel determinado.

En los apartados que siguen describiremos el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), desarrollado en la Universidad de Huelva. Una parte importante de su construcción se ha realizado en el contexto de actividades de desarrollo profesional en entornos colaborativos. En la actualidad, como sugieren Kilpatrick y Spangler (2016), el MTSK ha servido como una conceptualización que orienta el tipo de conocimiento que un formador de profesores debe pretender que construyan los futuros docentes. MTSK desgrana los diferentes tipos de conocimiento que un profesor pone en juego cuando enseña matemáticas, por ello, lo hemos empezado a utilizar para el diseño de programas de formación inicial de profesores. Tras la presentación del modelo, mostraremos cómo MTSK puede servir para organizar la formación inicial en dos niveles, el curricular y el del diseño de tareas. Ejemplificaremos ese diseño poniendo de relieve el proceso de génesis de una tarea formativa elaborada desde MTSK.

UN MODELO DE CONOCIMIENTO PROFESIONAL ESPECIALIZADO PARA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: MTSK

Todo modelo, esquema o marco teórico es una representación de un concepto que supone un posicionamiento, una perspectiva respecto del objeto de estudio, y una acotación; interesarán unas características o unas dimensiones de ese objeto y no otras. Un modelo, por tanto, propone una representación (mental y gráfica) de la realidad que se proyecta en el objeto, sin ánimo de exhaustividad. Siguiendo a Chacín (2008, p. 57),

> Un modelo es un espacio conceptual que facilita la comprensión de la realidad compleja, ya que selecciona el conjunto de elementos más representativos, descubriendo la relación entre ellos y profundizando en la implicación que la práctica aporta para investigar y derivar nuevos conocimientos.

Efectivamente, la creación de un modelo pretende servir de herramienta epistemológica, mejorando la comprensión del objeto de estudio.

El modelo MTSK no tiene como propósito prioritario contrastar y evaluar el conocimiento poseído por el profesorado y determinar el contenido de la formación inicial, sino reflexionar sobre los elementos que conforman el conocimiento existente y orientar el contenido de la formación inicial. En su uso en la investigación asume la noción de conocimiento de Schoenfeld (2010, p. 25):

> Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!

Schoenfeld apunta, de este modo, tres aspectos importantes en relación con esta caracterización que es también un posicionamiento: es una información disponible, está destinado a su uso, y no es necesariamente correcto. Es evidente que el uso del modelo MTSK en formación inicial es diferente, pues las condiciones de las instituciones encargadas de dicha formación incluyen la obligación de realizar una evaluación que mida el nivel de competencia y conocimiento de los futuros profesores.

Como herramienta analítica, sirve para realizar análisis con cierto nivel de profundidad y minuciosidad, al tiempo que debe enfrentar el riesgo de atomizar un objeto de estudio que es sumamente complejo. Para ello, el MTSK (figura 1) contempla tres dominios: conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido matemático y creencias y concepciones. A su vez, el dominio del conocimiento matemático se subdivide en tres subdominios: conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de la matemática y conocimiento de la práctica matemática. Por su parte, el conocimiento didáctico del contenido matemático se subdivide en otros tres subdominios: conocimiento de la enseñanza de la matemática, conocimiento de las características del aprendizaje matemático y conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática. Cada uno de estos subdominios posee un conjunto de categorías e indicadores que ayudan a describir dicho subdominio y a operativizar el análisis. En cuanto al dominio de las creencias y concepciones, diferenciamos tres concepciones sobre la matemática (instrumentalista, platónica y de resolución de problemas) y cuatro tendencias didácticas (tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa) articuladas en un sistema compuesto por las categorías propuestas por Carrillo y Contreras (1994).

En el desarrollo del modelo MTSK nos basamos, fundamentalmente, en Shulman (1986) y Ball, Thames y Phelps (2008). Conservamos los dominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido matemático (aunque con una estructuración diferente), añadiendo el dominio de las creencias y concepciones del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, ya que estas nos ayudan a comprender mejor la práctica del profesor, en particular las relaciones entre subdominios. Asimismo, la noción de especialización está ligada a la necesidad en la enseñanza, no a la diferenciación con respecto a otros profesores o profesionales de la matemática. Esta noción de especialización se expone con más detalle en Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan (2019), donde, además, se discute en relación con otros modelos, como el de Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009). El modelo MTSK es también deudor de las ideas de Ma (1999) en tanto en cuanto se concibe la posibilidad de que el profesor conozca en profundidad los distintos elementos de conocimiento que integran cada uno de los subdominios y que conozca las relaciones entre estos elementos. A continuación, se presenta brevemente el modelo MTSK, con la descripción de los subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido.

De Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017, pp. 191-193) se extrae una síntesis de la descripción de los subdominios (consultar Carrillo et al., 2018 para una descripción más extensa, incluyendo explicación del proceso de obtención del modelo; consultar Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro, 2017 y Carrillo, Montes et al., 2017, para ver ejemplos de aplicación del modelo). El primero de los subdominios del conocimiento matemático es el *conocimiento de los temas* (KoT), conocimiento disciplinar que incluye la fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, y los diferentes registros de representación. El conocimiento de conexiones es la esencia del *conocimiento de la estructura matemática* (KSM), que permite disponer de una visión de conjunto del conocimiento matemático, con sus conexiones de simplificación o complejización (que posibilitan ver tanto un contenido elemental desde una perspectiva avanzada, como un conocimiento avanzado desde una perspectiva elemental), las conexiones auxiliares (que permiten hacer un uso instrumental de un concepto o procedimiento en el trabajo con otro contenido), y las conexiones transversales (que se refieren a ideas matemáticas que enlazan varios núcleos de contenidos). Por otro lado, la estructura sintáctica de Shulman forma parte del *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que consiste en el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático, incluyendo aspectos de la comunicación, la argumentación y la demostración matemáticas, así como el conocimiento sobre qué es definir y qué características debe tener un enunciado matemático (definiciones, proposiciones…), el conocimiento de procesos asociados a la resolución de problemas (heurísticos) y el de otras prácticas del quehacer matemático (como la modelización).

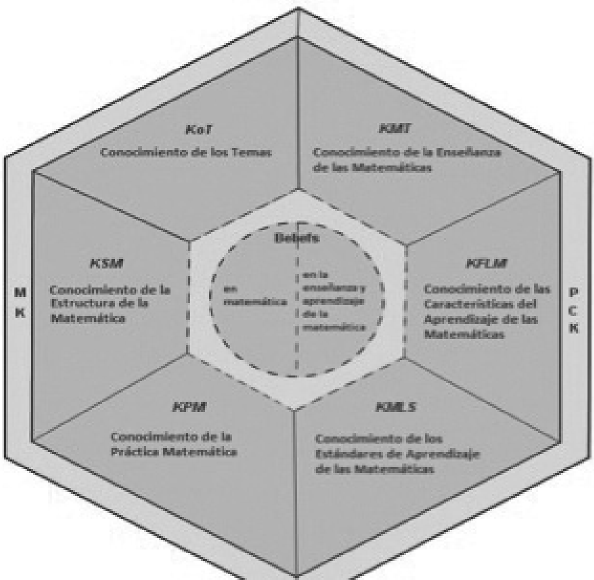


Figura 1: Modelo MTSK

Los subdominios del conocimiento didáctico del contenido matemático están ligados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. La idea de amalgama de Shulman es potente en la medida en que nos hace ver que no supone una mera yuxtaposición de saberes. Forman parte de este dominio, el conocimiento de recursos materiales o virtuales, incluidos los diseñados por el propio profesor, en cuanto a su potencialidad y las actividades matemáticas que posibilitan, el conocimiento de estrategias de enseñanza, técnicas, tareas y ejemplos; ambos son parte de lo que hemos denominado *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT), que se completa con el conocimiento de teorías personales o formales de enseñanza. Otro aspecto que se muestra de utilidad es el conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, que incluye el conocimiento del profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Para un profesor es también útil el conocimiento sobre fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje, que aúna conocimientos sobre errores, obstáculos, dificultades y capacidades potenciales de los alumnos vinculados a la matemática en su conjunto o a temas específicos. Es asimismo relevante el conocimiento de teorías personales o formales sobre el aprendizaje tanto de la matemática en general como de contenidos particulares, y el conocimiento sobre las expectativas e intereses que suelen tener los estudiantes en relación con los contenidos matemáticos. Todos estos elementos configuran el subdominio del *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM).

Como se ha indicado antes, el profesor necesita conocer lo que está establecido que debe aprenderse del contenido matemático en cada nivel educativo. A este conocimiento normativo añadimos la relevancia del conocimiento acerca de las aportaciones que desde la educación matemática se han producido en este sentido, y que permiten al profesor la toma de decisiones sobre cómo organizar y secuenciar el contenido matemático en los diferentes niveles de escolaridad. En este subdominio, que hemos denominado *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), hemos diferenciado entre el conocimiento acerca de lo que se espera aprendan los alumnos y el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, ambos para un contenido y un nivel concretos, así como el conocimiento de secuenciaciones del contenido.

Debido a la complejidad del conocimiento antes mencionada, al MTSK le interesa, al objeto de comprender mejor el conocimiento del profesor y su práctica, además de extraer elementos (categorías o indicadores) de conocimiento pertenecientes a dominios y subdominios, estudiar relaciones entre esos elementos, dominios y subdominios; dicho en otros términos, interesa mostrar la densidad de relaciones intrínseca al objeto conocimiento del profesor (e.g. Zakaryan, Estrella, et al., 2018; Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2019).

MTSK COMO ORGANIZADOR DE LA FORMACIÓN INICIAL: DOS NIVELES DE CONCRECIÓN

Mostraremos en esta sección cómo se puede organizar el contenido de la formación inicial teniendo como referente el contenido matemático de la Educación Primaria como objeto de enseñanza y aprendizaje, estructurando dos niveles de concreción, las asignaturas y tareas específicas, usando el modelo MTSK.

La Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de Maestro en educación Primaria, determina que, en el ámbito de las matemáticas, se deben

> Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.). Conocer el currículo escolar de matemáticas. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes (p. 53750).

Esta materia obligatoria, que hay que articular en un mínimo de 18 ECTS[1], ha sido desarrollada en cada universidad en asignaturas diferentes. En el caso de la Universidad de Huelva, se añadieron 3 ECTS y la materia se desarrolla en cuatro asignaturas: Introducción a la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en Educación Primaria (3 ECTS, segundo semestre), Didáctica de la Matemática en Educación Primaria I: números y operaciones (6 ECTS, cuarto semestre), Didáctica de la Matemática en Educación Primaria II: la construcción del lenguaje matemático, magnitudes y medida, tratamiento de la información, azar y probabilidad (6 ECTS, quinto semestre) y Didáctica de la Matemática en Educación Primaria III: las formas, las figuras y sus propiedades (6 ECTS, séptimo semestre). La primera de ellas, que tiene un carácter transversal, aborda la resolución de problemas e inicia el desarrollo de la capacidad de analizar, razonar y comunicar, entre otras competencias de alfabetización matemática. Supone también una primera mirada a la estructura y organización del currículo, que será una constante a lo largo del resto de las asignaturas, en las que la adquisición de las competencias matemáticas básicas se desarrolla desde la perspectiva de conocimiento profundo del contenido matemático elemental (Ma, 1999) para su transformación como objeto de enseñanza y aprendizaje. Las otras tres asignaturas se centran en

[1] Un crédito ECTS equivale a 25 horas de trabajo del estudiante (de 8 a 10 en un aula y el resto de tutorías y trabajo autónomo).

la construcción de elementos de conocimiento relativos a los diferentes temas matemáticos escolares que conforman la totalidad de temas propios del currículo de Educación Primaria.

En los dos apartados que siguen, centraremos nuestra atención en los dos siguientes niveles de concreción necesarios: el programa de una de las asignaturas, y el diseño de tareas para alcanzar los objetivos de dicho programa.

Organización de asignaturas en la formación inicial usando el Modelo MTSK

Aquí nos centraremos en la asignatura del séptimo semestre, que aborda los contenidos propios del bloque de Geometría. Siguiendo la estructura general de la Orden 3587/2007, se adaptaron las competencias, objetivos, y contenidos de la asignatura a los elementos propios del conocimiento especializado cuya construcción se necesita, por parte de los futuros maestros, para poder gestionar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de forma adecuada. La asignatura se dividió así en los distintos temas que cubren los diferentes aspectos de la geometría escolar, asumiendo que el conocimiento tiene un carácter holístico e integrado, y abordando la construcción de elementos de conocimiento de la totalidad de subdominios de MTSK, siendo conscientes (y haciendo uso) de las relaciones entre ellos.

Por ejemplo, en el bloque de figuras planas, se asumió como elemento inicial el trabajo sobre aspectos conceptuales, como el concepto de polígono, sus características críticas, y los elementos que los definen (KoT, Definiciones). Estas definiciones llevan a poder trabajar la clasificación de formas planas (KoT, Procedimientos) desde la perspectiva de los elementos de los polígonos que permiten generar cada clasificación (KoT, Propiedades). A raíz de la noción de clasificación, se incide en aspectos del conocimiento de la práctica matemática, como la construcción de definiciones matemáticas, y el papel de los ejemplos y contraejemplos en dicho proceso. Asimismo, se caracterizan el razonamiento inductivo y el deductivo, y se aborda la formulación de hipótesis, su comprobación, y los procesos de demostración formales e informales (KPM), pretendiendo con ello que los futuros maestros desarrollen conocimiento de las características del aprendizaje del contenido ligadas a las formas de interacción de los alumnos con los procesos de validación. Desde este punto, donde la noción de polígono ya ha sido abordada en profundidad, y analizada para desgranar los conceptos que permiten definirla, se abordan las representaciones de las formas planas, la notación matemática, y el vocabulario matemático apropiado para la geometría (KoT, Representaciones), y en cómo este vocabulario puede ser un indicador del aprendizaje (KFLM, Formas de interacción con el contenido). Posteriormente se trabajan las clasificaciones esperables en distintos niveles de Educación Primaria (KMLS, Niveles de desarrollo conceptual y procedimental esperado), ligando estas reflexiones al bloque introductorio de familiarización con el currículo escolar.

En este momento, se retoman las clasificaciones de polígonos, la equiangularidad, equilateralidad y sus relaciones, buscando ejemplos con solo una de las características (KoT, KPM). Esto lleva a la geometría del triángulo, como caso particular del polígono, con propiedades específicas (Teorema de Pitágoras, Desigualdad Triangular). Posteriormente se incide sobre la circunferencia, discutiendo su relación con los polígonos (KSM, Conexiones de complejización), y abordando diferentes propiedades y características de la misma (KoT, Propiedades). Tras esto, se abordan nociones teóricas relativas al aprendizaje de las matemáticas, como la imagen y la definición de un concepto (Tall y Vinner, 1981), o los niveles de Van Hiele para describir el aprendizaje geométrico (Van Hiele, 1986), que permiten construir conocimiento sobre teorías de aprendizaje (KFLM), que estructura la mirada de los estudiantes para maestro sobre los procesos de aprendizaje (Fernández, et al., 2018).

Una vez centrado el tema en el aprendizaje, se abordan los errores habituales en el aprendizaje de la geometría, o los diferentes obstáculos para una buena comprensión de la geometría escolar, como el generado por el uso de figuras prototípicas o en posición 'estándar' (KFLM, Fortalezas y dificultades). Posteriormente, y retomándose este aspecto en el bloque final, se abordan los recursos para la enseñanza de la geometría, como la trama de puntos o GeoGebra, para posteriormente reflexionar sobre el tratamiento de la geometría en los libros de texto (KMT, Recursos).

También se involucra a los estudiantes para maestro (EPM) en el análisis y diseño de tareas escolares ligadas a la geometría, donde se tienen que usar todos los elementos construidos anteriormente, para reflexionar sobre la naturaleza de las formas planas en entornos y situaciones cotidianas (KoT, Fenomenología y aplicaciones), como un buen punto de partida para trabajar la geometría en el aula. Para acabar el tema, se vuelve a incidir en el conocimiento matemático, reflexionando sobre posibles geometrías no euclidianas, como la geometría proyectiva, la afín o la topológica (KSM, Conexiones de complejización).

Se pretende que todos los aspectos anteriormente indicados sean tomados en cuenta por los estudiantes en el último bloque, relativo al diseño y análisis de propuestas de enseñanza de la geometría, en el que han de diseñar tareas, fundamentadas en dichos aspectos, para discutirlas en pequeños grupos con sus compañeros y el formador, y para reformularlas.

Tabla 1: Estructuración de un bloque de una asignatura con MTSK

SUBDOMINIO DE MTSK	CONTENIDO DE LA MATERIA
Conocimiento de los Temas	Concepto de polígono Características críticas de los polígonos Clasificación de formas planas Elementos de los polígonos que permiten clasificarlos Representaciones, notación y vocabulario ligado a la noción de polígono (y forma plana) Ejemplos representativos de formas planas Propiedades y resultados geométricos (Teorema de Pitágoras, Desigualdad Triangular) Fenomenología de los polígonos
Conocimiento de la Estructura Matemática	Circunferencia como no-ejemplo extremo Diferentes geometrías
Conocimiento de la Práctica Matemática	Construcción de definiciones matemáticas Función del ejemplo y el contraejemplo Razonamiento deductivo e inductivo Formulación y comprobación de hipótesis Demostraciones formales e informales
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Recursos para la enseñanza de la geometría Actividades y propuestas para la enseñanza de polígonos
Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático	Indicadores de aprendizaje del contenido Imagen y definición de concepto (Tall y Vinner, 1981) Niveles de Van Hiele (1986) Errores y obstáculos habituales al tratar los polígonos
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático	Currículo escolar de geometría (concreción en polígonos y formas planas)

Como vemos en la tabla 1, MTSK permite dar sistematicidad a la planificación de los contenidos a abordar en el programa de formación, llevando a la potencial construcción, por parte de los futuros maestros, de un conocimiento profesional integrado abarcando todos los subdominios de conocimiento modelizados por MTSK. Esto es significativo, y acorde a la organización hecha en la Universidad de Huelva de las asignaturas, donde no se trabaja matemáticas y didáctica de las matemáticas en asignaturas separadas, sino que se acerca a la realidad de la integración del conocimiento disciplinar y el conocimiento de la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, y además se hace con una mirada permanente a la realidad del aula, usando por ejemplo narrativas (Ivars y Fernández, 2018), o casos (Markovits y Smith, 2008).

Diseño de tareas formativas usando el Modelo MTSK

Desde la perspectiva que aquí se presenta, el análisis del conocimiento que se moviliza en un aula de primaria tiene el potencial de aportar al investigador-formador oportunidades para construir tareas de formación que contribuyan a desarrollar el conocimiento del EPM (De Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015). Dichas tareas estarán, pues, basadas en contextos reales de enseñanza y aprendizaje, sirviendo como detonantes para fomentar la construcción de conocimiento en los EPM, articulado desde la perspectiva del MTSK.

Mostramos a continuación un ejemplo de tarea formativa sobre los polígonos. Este ejemplo está compuesto por un caso (Markovits, et al., 2008) y un conjunto de cuestiones, estando las segundas orientadas hacia la comprensión profunda del primero. El caso de la tarea procede de la reconstrucción[2] de un episodio de una clase de Geometría de 5º de Educación Primaria, en el que la maestra ejemplifica con no polígonos y polígonos convexos. En ella, la maestra comienza definiendo polígonos y sus elementos (vértices, lados, diagonales, ángulos), continúa con la clasificación de polígonos según el número de lados, definición de polígono regular y cálculo del perímetro, si bien solo se hace con ejemplos de polígonos convexos (aunque la maestra no haga explícito este detalle). La maestra dibuja dos polígonos en la pizarra (un pentágono regular y un trapecio isósceles) y plantea varias actividades, entre las que destacan las relacionadas con las diagonales de los polígonos propuestos, poniendo de relieve en dichas actividades tanto el número de diagonales como su definición y propiedades.

En el análisis con MTSK del episodio que conduce al caso de nuestro ejemplo, el formador-investigador detecta evidencias de la movilización de KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos), KMT (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y KPM (Formas de validación y demostración). Al estar presente en el episodio solo la representación de dos polígonos convexos, el investigador-formador, en su reconstrucción, decide incluir la problematización sobre las consecuencias que puede tener la convexidad y concavidad sobre las propiedades del polígono y sobre la cantidad y las propiedades de las diagonales (KoT, Propiedades y sus fundamentos), introduciendo así una nueva situación que sirva como detonante para relacionar los conocimientos que la maestra ha planteado en la clase. También incluye, en las cuestiones, la identificación de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele (KFLM, Teorías de aprendizaje) y el planteamiento de si el nivel de desarrollo conceptual es el esperado para el nivel en el que están los

[2] El caso se construye desde el episodio, añadiendo elementos de conocimiento especializado evocado al investigador-formador por las situaciones presentes en el aula (Liñán-García, 2017). La sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y la propia experiencia como formador fundamentan la suma de estos elementos adicionales para generar un caso rico en MTSK.

escolares (KMLS)[3]. De esta forma, se proponen a los EPM las siguientes cuestiones intercaladas con la lectura de la reconstrucción del episodio que se proporciona por escrito a los EPM:

1. ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego en el desarrollo del episodio descrito?
2. ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática? ¿Qué ejemplos utiliza la maestra y con qué fin? ¿Qué relación hay entre la imagen que muestran del concepto de diagonal y la definición que se da?
3. ¿Qué dificultades de los alumnos observas en el desarrollo del episodio? ¿En qué nivel de Van Hiele consideras que está cada uno? Justifica tu respuesta.
4. ¿Qué recursos para la enseñanza de los contenidos matemáticos utiliza la maestra? Identifica potencialidades y limitaciones de estos. ¿Qué otros recursos se podrían haber utilizado?
5. Justifica si la actividad que se desarrolla en el episodio es o no adecuada para quinto curso de Primaria.

Con la primera cuestión se pretende que los EPM movilicen conocimiento sobre las definiciones asociables a los polígonos y sus elementos, y sus diferentes registros de representación (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación), sobre la forma de definir en matemáticas, incluyendo el lenguaje, y esquemas de prueba inductivos (KPM, Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones; Prácticas particulares del quehacer matemático; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Formas de validación y demostración).

Los ejemplos (KMT, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) serían el punto de partida para la reflexión sobre las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (KPM) a que les lleva la segunda cuestión. El investigador-formador podría problematizar las definiciones de polígono teniendo en cuenta los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos, para distinguir definición e imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981).

Desde la comprensión mostrada sobre el conocimiento de la maestra de las fortalezas y dificultades de sus alumnos (KFLM), la tercera cuestión pretende movilizar conocimiento relativo a teorías de aprendizaje de la geometría, en este caso la de Van Hiele (1986) (KFLM, Teorías sobre el aprendizaje).

[3] Ambas cuestiones surgen desde las oportunidades de construcción de conocimiento que el investigador-formador identifica, en este caso al observar ejemplificaciones parciales (limitadas a polígonos convexos), y teniendo en cuenta la relevancia de la teoría de aprendizaje de Van Hiele, que permite discutir el aprendizaje de los alumnos involucrados en la situación.

Tras identificar el potencial de los recursos presentes en el caso para abordar los contenidos matemáticos involucrados en el episodio (KMT, Recursos materiales y virtuales), la cuarta cuestión vuelve a poner el foco en las imágenes del concepto que privilegian los recursos anteriores, de cara a provocar su reflexión, tanto desde el conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM, Fortalezas y dificultades, Teorías sobre el aprendizaje), como de la propia definición de los elementos y la forma de definir (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; KPM Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), teniendo en cuenta lo ya trabajado en la cuestión 1). A diferencia de la segunda cuestión, centrada en los ejemplos mostrados en el caso, pretendemos aquí que los EPM se hagan conscientes de la necesidad de considerar qué características debe tener el elenco de ejemplos que utilicen en el proceso de enseñanza-aprendizaje: cualquier ejemplo de un concepto puede cumplir un determinado conjunto de características irrelevantes, pero debe cumplir todas las características críticas del mismo. Finalmente, con la quinta cuestión pretendemos movilizar en los estudiantes la reflexión sobre el currículum, complementado con propuestas curriculares diversas como la de NCTM (2000) (KMLS, Expectativas de aprendizaje; Nivel de desarrollo conceptual; Secuenciación con temas anteriores y posteriores).

Vemos una síntesis de la integración de los diferentes aspectos trabajados en la tarea formativa en la Tabla 2:

Tabla 2: Contenidos de la tarea

SUBDOMINIO DE MTSK	CONTENIDO
Conocimiento de los Temas	Distintas definiciones de polígono Propiedades de los polígonos y sus fundamentos Elementos de los polígonos Registros de representación
Conocimiento de la Práctica Matemática	Esquema de prueba inductivo Condiciones necesarias y suficientes Definiciones matemáticas
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Ejemplos para introducir polígonos Exploración de recursos para la enseñanza de polígono, limitaciones y potencialidades
Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático	Definiciones e imágenes de polígono Dificultades en relación con el concepto de polígono Niveles de Van Hiele
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático	Reflexión sobre el currículo nacional, y presentación de propuestas curriculares alternativas

Mostraremos ahora un extracto de la implementación de la tarea, centrándonos en la cuestión 2. En particular, mostramos intervenciones de estudiantes para maestro tras haber abordado dicha actividad. Lo que exponemos a continuación es un análisis con MTSK de algunos fragmentos de las respuestas dadas a la citada cuestión.

> M: Yo creo que la profesora plantea esta tarea para crear discusión, analizando aquellas características de cada figura que determinan las que son polígono o las que no.
>
> C: Al poner ejemplos de polígonos y de no polígonos les hace llegar al concepto. La otra forma sería diciéndoles un polígono es bla, bla, bla… y que se lo aprendan. […]
>
> T: En el caso de las diagonales, por ejemplo, la maestra ha puesto primero polígonos convexos para que tracen las diagonales, y ahí todos las han identificado rápidamente. Le ha servido para que sepan lo que es, relacionen la definición con el dibujo.

Los tres EPM que intervienen identifican la tarea planteada por la profesora como una estrategia de enseñanza (KMT, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Se apoyan en su propio conocimiento sobre las diagonales de un polígono (KoT, Definiciones propiedades y sus fundamentos) para considerar el dibujo desde la definición (KoT, Registros de representación) como apoyo para una mejor comprensión (KMT, Recursos materiales y virtuales).

Una EPM llama la atención sobre la dificultad que ha observado (y que ella misma declara tener) en los polígonos cóncavos, lo que evidencia un conocimiento sobre fortalezas y dificultades (KFLM).

> C: Sí, pero cuando ha puesto los cóncavos los alumnos estaban liados, porque no todos han visto las diagonales de fuera. Vamos, yo tampoco las había dibujado.

El debate sobre las dificultades en polígonos cóncavos se evidencia de nuevo en el siguiente fragmento:

> M: Si cada vez que te hablan de la diagonal de un polígono te ponen polígonos convexos, la imagen que tienes de diagonal es por dentro, aunque sabes la definición y no dice que sea así. Yo creo que pone esos ejemplos porque sabe eso.[…]

Vemos que muestran su conocimiento de que, en general, en las aulas solo se muestran ejemplos prototípicos. En este sentido, indican que esto genera dificultades en los alumnos de Primaria (KFLM, Fortalezas y dificultades) y hace que estos interaccionen de una forma determinada ante las diferentes casuísticas (KFLM, Formas de interacción con un contenido matemático).

Los EPM consideran la diferencia entre la imagen del concepto y la definición del mismo como forma en la que los alumnos aprenden (KFLM, Teorías de aprendizaje; Formas de interacción con un contenido matemático):

T: Pues los ejemplos y contraejemplos sirven para generar una buena imagen del concepto, jeje. Por lo de las características críticas y eso, y la definición entonces…

Y parecen conocer que las condiciones necesarias (características críticas) han de estar presentes en una definición (KPM, Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Como se ha puesto de relieve, los elementos de MTSK movilizados se alinean con las expectativas puestas en el diseño de la actividad. Se han movilizado conocimientos sobre las definiciones de polígonos involucradas, y la consideración del dibujo desde las mismas (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación), sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), sobre las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (KPM) y sobre los atributos relevantes, que permiten distinguir definición e imagen del concepto. También se aprecia la movilización de conocimiento sobre características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, Fortalezas y dificultades; Formas de interacción con un contenido matemático).

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES FINALES

Una de las tareas pendientes de la investigación en educación matemática es la transferencia de los resultados de investigación (García, Maas y Wake, 2010). En particular, entendemos que la investigación en torno al profesor de matemáticas debe tener implicaciones en la formación inicial. En este capítulo mostramos cómo un modelo analítico de conocimiento profesional, como es el caso de MTSK, puede constituir una herramienta útil en dos niveles.

En el primer nivel, las investigaciones realizadas usando MTSK pueden orientar qué elementos de conocimiento especializado deben ser construidos en los procesos de formación inicial. Así, se puede conseguir una estructura curricular de la formación inicial que asegura que un maestro disponga de una base de conocimiento especializado, como docente que enseñará matemáticas, que le permita gestionar con cierta soltura, las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Asumimos que el ejemplo aquí mostrado tiene características idiosincráticas, como el hecho de conjugar elementos matemáticos y de educación matemática en la misma asignatura, que no lo hacen directamente replicable en otros contextos. Aun así, independientemente de la carga asignada a esta disciplina en la formación inicial, hay que asumir la imposibilidad de abordar la construcción de la totalidad de elementos de conocimiento necesarios. En este sentido, se debe brindar a los futuros maestros no solo oportunidades para construir conocimiento, sino también herramientas que les permitan aprender a construirlo lo más autónomamente posible. En un segundo nivel de concreción, las tareas formativas desarrolladas usando el modelo MTSK como guía para su diseño permiten que los EPM construyan aspectos concretos de conocimiento, para lo que se conjugan elementos de teoría y análisis de la práctica, que implican la construcción de nuevo conocimiento, y la percepción del mismo como útil para la práctica docente. Así, aprenden a problematizar la práctica de aula, planteándose preguntas que implican movilizar elementos de conocimiento para comprender las situaciones, y, potencialmente, identificar la necesidad de construir nuevo conocimiento que les permita comprenderlas. Esta cuestión debería ser abordada en los programas de formación permanente de profesorado.

El diseño de los programas de formación inicial a nivel nacional es diverso. En este sentido, respetando las idiosincrasias de cada programa, de sus alumnos, y del contexto en el que están inmersos, se puede avanzar en la complementariedad de los diferentes enfoques, que podrían nutrirse mutuamente. Desde diferentes enfoques, apoyados en una actitud inclusiva, crítica, autocrítica y flexible, podemos considerar aspectos de otros enfoques que puedan ayudarnos a mejorar la formación de nuestros EPM. El diseño de tareas adaptadas a cada programa, usando organizadores comunes, más allá del propio contenido matemático, podría suponer un punto de partida interesante. El modelo MTSK brinda, como hemos mostrado, la posibilidad de orientar y estructurar la formación inicial de maestros en lo relativo a su conocimiento. Desde nuestro reconocimiento y valoración de la diversidad de enfoques en la investigación en conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, entendemos que los programas de formación han de caminar hacia la búsqueda de relaciones entre ellos.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación está financiada por el Centro de Investigación COIDESO, y por el proyecto RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidad.

REFERENCIAS

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2019). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2), 1-15.

Ball, D. L. y Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En L. Darling-Hammond y G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Borko, H., Koellner, K. y Jacobs, J. (2011). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *ZDM Mathematics Education, 43*, 175-187.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aireas: Zorzal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. *RIPEM - International Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 88-107.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán· M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education: 20*(3), 236-253.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. En J. P. Ponte y J. P. Matos (Eds.), *Actas del 18º Congreso del PME* (Vol 2, pp. 152-159). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Chacín, B. (2008). Modelo teórico-metodológico para generar conocimiento desde la extensión universitaria. *Laurus, Revista de Educación*, *14*(26), 56-88.

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

García, F. J., Maas, K., y Wake, G. (2010). Theory meets practice: Working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Londres: Springer.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*, 189-200.

Ivars, P. y Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers* (pp. 245-259). Londres: Springer.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. Londres: Falmer Press.

Kilpatrick, J. y Spangler, D. A. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (Third Edition)* (pp. 297-309). Londres: Rouletdge.

Liñán-García, M. M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. Tesis doctoral no publicada. Huelva: Universidad de Huelva.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Markovits, Z. y Smith, M. (2008). Cases as Tools in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.),*The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Volume 2, pp. 39-64). Rotterdam: Sense Publisher.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Orden ECI/3857/2007.* Madrid: España. Recuperado de: https://www.boe.es/boe/dias/2007/12/29/pdfs/A53747-53750.pdf.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Londres: SAGE.

Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*, 133-145.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(*2*), 4-14.

Sinclair, N., Watson, A., Zazkis, R y Mason, J. (2011). The structuring of personal example spaces. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*, 291-303.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36(*2), 105-123.

«MIRAR PROFESIONALMENTE» LAS SITUACIONES DE ENSEÑANZA: UNA COMPETENCIA BASADA EN EL CONOCIMIENTO

PROFESSIONAL NOTICING TEACHING SITUATIONS AS A KNOWLEDGE-BASED PROCESS

Llinares, S.[1], Ivars, P.[1], Buforn, À.[1], y Groenwald, C.[2]

[1]*Universidad de Alicante,* [2]*Universidade Luterana do Brasil-ULBRA*

RESUMEN

«Mirar Profesionalmente» las situaciones de enseñanza de las matemáticas es una competencia relevante del profesor de matemáticas que puede desarrollarse en los programas de formación de profesores. «Mirar Profesionalmente» se caracteriza por el uso del conocimiento de Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas para reconocer elementos relevantes en las situaciones de enseñanza de las matemáticas, interpretarlos y apoyar las decisiones de acción. Esta competencia ayuda a los estudiantes para profesor a describir y explicar, y también a anticipar aspectos que pueden condicionar el desarrollo de la enseñanza. El objetivo de este capítulo es mostrar una caracterización del papel que desempeña el conocimiento de matemáticas para la enseñanza en la manera de entender la competencia «Mirar Profesionalmente» las situaciones de enseñanza.

Palabras clave: *Formación de profesores, mirar profesionalmente, conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, registro de la práctica.*

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À., y Groenwald, C. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

Professional noticing of mathematics teaching situations is a relevant competence of the mathematics teachers and can be developed in teacher training programs. Professional noticing is characterized by the use of mathematics knowledge and knowledge of Didactics of Mathematics to attend to relevant elements in the mathematics teaching situations, to interpret them and to support teaching decisions. This competence helps mathematics teachers to describe, explain, and anticipate aspects that may influence the development of teaching. The goal of this chapter is to characterize the role played by the mathematical knowledge for teaching in professional noticing.

Keywords: *Teacher education, professional noticing, Mathematics Knowledge for Teaching, register of practice.*

INTRODUCCIÓN

Los formadores de profesores nos enfrentamos con el desafío de ayudar a los estudiantes para profesor[1] a ir más allá de una visión superficial de la enseñanza y el aprendizaje. Este desafío evidencia la compleja y difícil relación entre la teoría y la práctica (Oonk, Verloop y Gravemeijer, 2015). Una manera de responder a este desafío es usando *registros de la práctica y guías* para potenciar la relación entre la teoría y la práctica. Estas aproximaciones a la formación de profesores pretenden crear oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan implicarse en prácticas profesionales similares a la profesión de ser profesor aprendiendo a usar un conocimiento relevante para comprender y actuar en las situaciones de enseñanza. Desde este punto de vista, aprender a ser profesor de matemáticas es aprender a usar un conocimiento específico sobre la enseñanza de las matemáticas. Esta aproximación asume que aprender un conocimiento no se puede separar de su uso, ya que usar el conocimiento en situaciones prácticas transforma dicho conocimiento (Eraut, 1994). La hipótesis que subyace a esta aproximación es que las actividades propuestas dan forma al conocimiento que debe ser usado. Eraut (1994) indica que los procesos de interpretar una situación evidencian un modo de usar el conocimiento. Por ejemplo, usar el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas para interpretar las respuestas de los alumnos conlleva tener que adaptarlo a las particularidades de sus respuestas.

Aprender a usar el conocimiento está vinculado a realizar actividades que definen la práctica de enseñar matemáticas. Por ejemplo, preparar una secuencia de problemas, identificar en una situación de enseñanza lo que puede ser relevante para el aprendizaje de las matemáticas, reconocer características del discurso

[1] En este capítulo denominamos genéricamente a los estudiantes para maestro de Educación Infantil y Primaria y a los estudiantes para profesores de matemáticas de Educación Secundaria como estudiantes para profesor.

matemático, interpretar la comprensión de los estudiantes, etc. Aprender a usar el conocimiento en estas situaciones implica desarrollar nuevas formas de pensar sobre la enseñanza y por tanto a desarrollar la competencia docente. Un aspecto de esta competencia docente es lo que se denomina «mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Podemos pensar que las actividades que se desarrollan en los programas de formación en la Universidad están lejos de las situaciones prácticas en las que los profesores van a tener que desempeñar su profesión, lo que genera que algunas veces los egresados no consideren relevante para su profesión el conocimiento proporcionado en la universidad. Para intentar resolver esta situación y superar el distanciamiento entre la universidad y la escuela, se han desarrollado aproximaciones a la formación de profesores de matemáticas que subrayan que la «práctica» también puede ser enseñada en la universidad (Llinares, 2012). Así, aprender sobre la enseñanza no se sitúa solo en la «acción de enseñar» sino también aprendiendo a usar el conocimiento para analizar las situaciones de enseñanza. Por ejemplo, identificar las características relevantes en las respuestas de un estudiante para interpretar su comprensión puede ser desafiante para un estudiante para profesor en una situación real de clase, pero menos exigente si se realiza el análisis sin la presión de la clase real en la que tendría que gestionar la interacción entre los alumnos.

Nuestro objetivo como formadores de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a aprender a discernir los detalles relevantes en una situación de enseñanza generando una explicación de los hechos observados relacionándolos con principios teóricos. Este proceso de razonamiento tiene que ver con la manera de pensar sobre una situación de enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, anticipándose a lo que puede suceder o analizando / reflexionando sobre lo que ya ha sucedido relacionando las ideas y principios teóricos con la acción. Es decir, desarrollando formas de razonar sobre la enseñanza de las matemáticas, explicando las acciones que la constituyen para definir acciones futuras. Este proceso de dar razones de por qué las cosas están sucediendo de la manera en que lo están haciendo, es el que puede evidenciar el uso del conocimiento.

En este capítulo usamos la competencia «mirar profesionalmente» como un eje alrededor del cual describimos diferentes maneras en las que se pueden generar contextos para aprender a usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Para ello, en primer lugar, ejemplificaremos diferentes oportunidades prácticas para aprender el conocimiento (Llinares, 2012). Estas oportunidades utilizan *registros de la práctica* para representar aspectos de la enseñanza para ayudar a los estudiantes para profesor a comprenderla desde perspectivas diferentes.

En segundo lugar, describiremos modos de uso del conocimiento para entender el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» (Schack, Fisher y Wilhelm, 2017) usando la noción de *argumento práctico* del estudiante para profesor (Fenstermacher y Richardson, 1993). Un argumento práctico muestra la manera en la que los estudiantes para profesor relacionan las evidencias de la situación práctica con las inferencias realizadas apoyando estas relaciones mediante el uso de elementos teóricos. Finalmente, caracterizaremos el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» en la paulatina mejora en el uso del conocimiento para interpretar los aspectos de la enseñanza.

REPRESENTACIONES DE LA PRÁCTICA EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN

La hipótesis de que la construcción de conocimiento no puede separarse de su uso implica tener en cuenta algunas características de las actividades para aprender a usarlo. De este modo, se define un continuo entre lo que podrían ser las aulas de la universidad, los contextos en los que se realizan las prácticas de enseñanza, y los encuentros entre tutores y estudiantes para profesor cuando analizan situaciones de aula. El objetivo aquí es doble. En primer lugar, presentar registros de la práctica como oportunidades para aprender conocimiento que permita dotarlos de significado. En segundo lugar, ayudar a los estudiantes para profesor a ir más allá del número limitado de casos que es posible presentar en el contexto universitario para *construir formas de pensar y hablar* sobre los aspectos de la enseñanza.

Representaciones de aspectos de la práctica que podemos considerar son, por ejemplo, la gestión de un profesor de una situación de resolución de problemas en gran grupo, la gestión de las interacciones en un pequeño grupo de estudiantes cuando están intentando resolver de manera colaborativa un problema, el análisis de las respuestas de un grupo de estudiantes a una serie de problemas, la planificación de una secuencia de actividades para ayudar a los estudiantes a mejorar en su comprensión de un contenido particular (Figura 1). El uso de estas representaciones de la práctica en el programa de formación determina lo que los estudiantes para profesor pueden llegar a aprender, como paso previo a la realización de las prácticas de enseñanza.

Los soportes usados para mostrar estas diferentes representaciones de la práctica pueden variar: desde registros de lecciones enteras, a registros de momentos específicos de la enseñanza; desde entrevistas clínicas a estudiantes resolviendo problemas; desde registros de respuestas de alumnos a un grupo de problemas, a respuestas seleccionadas de alumnos a determinados problemas. Estas diferentes representaciones de la práctica se apoyan en el uso de videos, casos/narrativas o conjunto de resoluciones escritas de alumnos, que denominamos «registros de la práctica». En este capítulo usaremos dos ejemplos de este tipo de registros: la gestión de la interacción y del discurso matemático en la clase de matemáticas, y la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes (otro ejemplo, relativo a la planificación de una lección, es descrito en Llinares, 2013, y Moreno y Llinares, 2018).

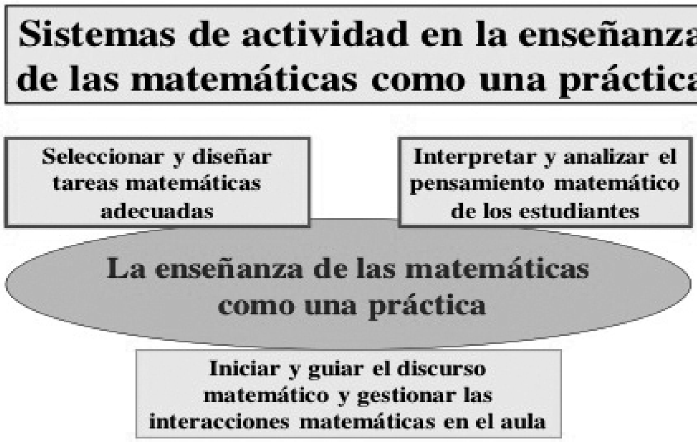


Figura 1. Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica a ser aprendida (Valls, Callejo y Llinares, 2008)

Los ejemplos que vamos a describir son diferentes oportunidades para aprender a usar el conocimiento para interpretar la situación práctica (aprender a «mirar profesionalmente») como paso previo a decidir cómo actuar. En primer lugar, consideramos video-clips de segmentos de lecciones de matemáticas (Llinares y Valls, 2009, 2010; Roig, Llinares y Penalva, 2011; Siebert, Groenwald y Llinares, 2013). En segundo lugar, usando respuestas de estudiantes a problemas para mostrar características del aprendizaje matemático (Fernández, Llinares y Valls, 2012, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015).

Esta aproximación al aprendizaje del estudiante para profesor adopta una perspectiva sociocultural sobre el aprendizaje que subraya que las características de los contextos de aprendizaje dan forma a lo que los estudiantes para profesor pueden llegar a aprender (Fernández, Sánchez-Matamoros y Llinares, 2014). Aquí resultan claves para el aprendizaje tanto las oportunidades para aprender «*haciendo*» en contextos con menos exigencia que las situaciones reales, cómo el papel del formador para ayudar a revisar los argumentos prácticos.

Ejemplo 1. Análisis de situaciones prácticas por estudiantes para maestro de Educación Primaria

Un registro de la práctica puede venir dado por segmentos de lecciones grabadas en video para mostrar algún aspecto de la enseñanza de las matemáticas que se considera relevante. Dichas grabaciones han sido ampliamente usadas en la formación inicial como una manera de colocar a los estudiantes para profesor en situación de reconocer elementos de la enseñanza que pueden ayudar a explicar lo que está sucediendo (Brophy, 2003). El videoclip de un segmento de clase es un registro de la práctica que proporciona el contexto para comprender la práctica de enseñar matemáticas (Lampert y Ball, 1998). La interpretación de la situación mostrada en el videoclip se apoya en el uso de información teórica. Por ejemplo, Llinares y Valls (2009, 2010) usaron una plataforma on-line en la que se integraban registros de la práctica en forma de videoclips de segmentos de lecciones de matemáticas para ayudar, en este caso específico, a los estudiantes para maestro a identificar características de la enseñanza de la resolución de problemas (Figura 2).

Para complementar los registros de la práctica es necesario hacer visibles las razones del profesor (en este caso mediante una entrevista a la maestra). En particular, este contexto de aprendizaje tenía como objetivo que los estudiantes para maestro identificaran aspectos de la enseñanza que podían influir en el aprendizaje de los niños/as y tenerlos en cuenta para proponer nuevas actividades. Los video-clips mostraban una situación en la que una maestra intenta que sus alumnos formulen problemas desde una situación real. Uno de los videoclips muestra la fase de presentación de la actividad, la forma en la que los niños/as se organizan en grupos para formular problemas, y cómo los resuelven. El segundo video-clip muestra la fase de discusión grupal en la que la maestra gestiona la presentación de las diferentes resoluciones y cómo ésta intenta hacer visible la manera de pensar de los diferentes estudiantes.

En esta situación, los estudiantes para maestro pueden visionar los videoclips las veces que lo necesiten participando en debates entre ellos cuando están intentando relacionar las características de la enseñanza presentadas en los documentos teóricos con diferentes momentos de las lecciones mostradas en los videos. En este contexto, la información teórica sobre características de una clase que promueve el desarrollo de la competencia matemática ayuda a focalizar la mirada de los estudiantes para maestro. Esta información teórica desempeña el papel de guía para la identificación e interpretación de los elementos que se pueden considerar relevantes en la situación mostrada.

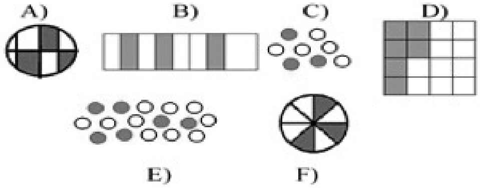
Tres aspectos resultaron claves para explicar el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» en este contexto. En primer lugar, la manera en la que los estudiantes para maestro usaban la información teórica para identificar los elementos relevantes de la situación e interpretarlos; en segundo lugar, las interacciones entre los participantes en el entorno de aprendizaje permitiéndoles mejorar sus argumentos prácticos; y finalmente sus concepciones previas sobre la enseñanza-aprendizaje.

Figura 2. Contexto que integra espacios de interacción social, registros de la práctica en forma de videoclips, y elementos de información teórica sobre la enseñanza de las matemáticas (Llinares y Valls, 2009, 2010)

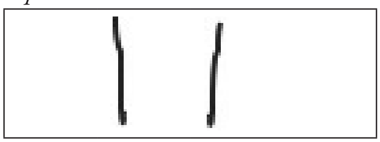
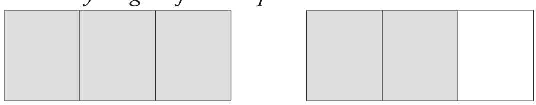
Ejemplo 2. Análisis de las respuestas de los estudiantes por estudiantes para maestro de Educación Primaria

Otra representación de la enseñanza de las matemáticas es la actividad de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Para esta representación se pueden usar como registro respuestas de alumnos a diferentes actividades reflejando características de la comprensión de un concepto matemático (Figura 3). Este registro de la práctica consta de dos actividades con diferente exigencia cognitiva para los niños de educación primaria y varias respuestas. Una actividad se centra en identificar representaciones de una fracción usando representaciones continuas y discretas en las que se pone de manifiesto que las partes deben ser equivalentes en tamaño (aunque no necesariamente en forma) y que una parte puede estar dividida en otras partes. La segunda actividad se centra en reconstruir la unidad a partir de la representación de una fracción impropia en contexto continuo. Esta segunda actividad implica considerar la fracción formada como una unidad múltiple de fracciones unitarias (que se apoya en la comprensión de la fracción unitaria como una unidad iterable).

Júlia (una maestra de Educación Primaria) ha puesto como ejercicio de evaluación de la fracción los siguientes problemas.

1. ¿Qué figuras representan 3/8? 	2. Esta figura representa 5/3 del todo. Representa la unidad 

Algunas respuestas de su alumnado fueron

	Problema 1	Problema 2
Estudiante 1	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*Esto son 3 partes* 
Estudiante 2	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*Divido lo que me han dado en 3 partes del mismo tamaño y luego cojo cinco partes como esas.* 
Estudiante 3	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*	*Si la figura que nos muestra son 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

- **C1**. Identifica las *características de la comprensión* de los niños, justificándolas mediante fragmentos de sus respuestas e indica *los elementos matemáticos* que están implícitos.
- **C2**. Según las características de la comprensión identificadas en la cuestión 1, ¿en qué *nivel de comprensión* situarías a cada niño? Justifica tu respuesta.
- **C3**. Suponiendo que tú eres uno/a de los maestros/as de estos niños, define *un objetivo de aprendizaje y* propón *alguna tarea* para cada niño que les permita seguir avanzando en su comprensión de las fracciones.

Figura 3. Estructura del registro de la práctica formado por respuestas de alumnos a diferentes actividades mostrando características de la comprensión del concepto de fracción

Las respuestas de tres parejas de niños de educación primaria a estas dos actividades reflejan diferentes formas en las que se comprenden los elementos matemáticos relevantes en el aprendizaje de las fracciones que deben ser interpretadas por los estudiantes para maestro. El proceso de identificación e interpretación para justificar qué hacer a continuación viene guiado por una serie de cuestiones y por información teórica sobre la comprensión de los niños del concepto de fracción como parte-todo. En particular, este tipo de registro permite usar conocimiento específico sobre el aprendizaje para interpretar las respuestas de los estudiantes. Así, usar respuestas de alumnos a actividades con diferente exigencia cognitiva permite hacer visibles los niveles de desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos; y por tanto crea la oportunidad para que los estudiantes para maestro puedan usar el conocimiento sobre el aprendizaje matemático, y sobre el diseño de actividades para interpretar la situación. De esta manera, los contextos de aprendizaje en el programa de formación construidos sobre estos registros de la práctica crean oportunidades para iniciar la investigación de la práctica.

Estos contextos permiten que los formadores de maestros podamos analizar cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento (Llinares, 2012). Por ejemplo, Buforn (2017), en un estudio sobre cómo los estudiantes para maestro reconocían características del razonamiento proporcional en los niños, indicó que este reconocimiento dependía de la manera en la que los estudiantes para maestro comprendían los elementos matemáticos sobre los que se apoya el razonamiento proporcional. En particular, Buforn señala que, aunque los estudiantes para maestro reconocían algunas características de la comprensión del esquema fraccionario como parte del esquema multiplicativo en el que se inserta el razonamiento proporcional, tenían dificultades para discriminar las situaciones proporcionales de las no proporcionales y para comprender la idea de razón en situaciones de comparación (pensamiento relacional, covarianza cualitativa y razón como índice comparativo). Además, se puso de manifiesto cierta relación entre características específicas de cómo los estudiantes para maestro comprendían el concepto matemático, con perspectivas más generales sobre el continuo entre el carácter procedimental o conceptual de la comprensión de los elementos matemáticos considerados. Estos resultados subrayan la relación que puede existir entre la especificidad del conocimiento que debe ser aprendido por los estudiantes para maestro y dominios más generales del conocimiento para analizar registros de la práctica. En este sentido, el conocimiento que el estudiante para maestro debe usar para interpretar estas respuestas adquiere mayor relevancia al estar vinculado a situaciones prácticas que reflejan diferencias entre la exigencia del problema planteado a los niños/as y las características de las respuestas dadas.

USO DEL CONOCIMIENTO PARA APOYAR LA PRÁCTICA. LA NOCIÓN DE ARGUMENTO PRÁCTICO

Caracterizar cómo los estudiantes para profesor usan el conocimiento de matemáticas y el de didáctica de la matemática cuando están intentando reconocer los elementos claves de una situación para comprenderlos y decidir cómo actuar, implica dar cuenta de sus procesos de razonamiento. Un antecedente en el estudio de cómo los profesores y estudiantes para profesor aprenden a razonar sobre una situación de enseñanza es el constructo *argumento práctico* (Fenstermacher y Richardson, 1993). El término *argumento* se refiere al contenido y a la estructura de la explicación generada por un estudiante para profesor sobre una situación de enseñanza en la que las evidencias se conectan de alguna manera con principios más generales. La manera en la que el conocimiento teórico es integrado con las evidencias en el proceso de dar razones por parte de los estudiantes para profesor al construir un argumento práctico refleja el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» (Ivars, Fernández, Llinares y Choy, 2018). Por ejemplo, una estudiante para maestro al responder a la actividad de la Figura 3 (análisis de un registro de la práctica) indicaba:

C1. La primera actividad consiste en un reconocimiento de una fracción propia (3/8) en dos formas de representación distintas (contexto discreto y continuo). Los elementos matemáticos implicados son:

1. *Comprender que las partes deben ser congruentes* [con el significado de mismo tamaño, aunque forma distinta] *para ver que las figuras A y B no representan 3/8.*
2. *Comprender que puede estar formada por otras / considerar un grupo de partes como una parte para ver que la figura E en contexto discreto y la figura D en contexto continuo también representan 3/8.*

La segunda actividad consiste en reconstruir (en contexto continuo) el todo a partir de una fracción impropia (5/3). Los elementos matemáticos implicados son:

1. *Saber emplear una parte de una fracción como una unidad iterativa para construir otras fracciones (1=3/3 = 3 veces 1/3).*
2. *Comprender que las partes deben ser congruentes* [con el significado de mismo tamaño, aunque forma distinta], *para dividir la figura en 5 partes y coger una como unidad iterativa concreta.*

C2+C3

El estudiante 1 en la primera actividad solo se centra en aquellas figuras donde el todo está dividido en 8 partes y hay sombreadas 3, independientemente del tamaño, mostrando la dificultad en la compresión de la necesidad de que las partes deben ser congruentes [con el significado de mismo tamaño, aunque forma distinta].

En la segunda actividad, confunde el nombre de la parte con relación a la fracción total con el número de partes en que divide la figura. Con su representación demuestra que no comprende ninguno de los elementos matemáticos: ni que las partes deben ser congruentes, ni sabe usar una parte de una fracción como una unidad iterativa.

Como las características del nivel 1 **[de comprensión del concepto de fracción]** ***son que tienen dificultades para comprender que las partes en que se divide un todo deben ser congruentes, no sabe emplear una parte de la fracción como una unidad iterativa y que una parte puede estar dividida en otras partes, considerar un grupo de partes como una parte*** [entonces] ***este alumno se encuentra claramente en el nivel 1*** (énfasis añadido).[…]

La descripción que hace esta estudiante para maestro del registro de la práctica (actividad y respuestas de los estudiantes) y su interpretación del nivel de comprensión de los niños ejemplifica un argumento práctico. En este argumento práctico es posible identificar las evidencias procedentes de la situación, las inferencias realizadas sobre la comprensión de los niños y las razones dadas desde el conocimiento teórico (niveles de comprensión de la idea de fracción) que apoyan la inferencia realizada.

La manera en la que está diseñada la actividad en el programa de formación para que los estudiantes para maestro aprendan a usar el conocimiento sobre las matemáticas y la didáctica de las matemáticas para analizar el nivel de comprensión de los estudiantes define focos particulares de atención. Las cuestiones guías (cuestiones C1, C2 y C3 de la Figura 3) centran la atención sobre las características de la actividad presentada a los niños desde el punto de vista de los elementos matemáticos que deben ser comprendidos, y sobre las respuestas de niños que evidencian diferentes niveles de comprensión. Centrar la atención sobre estos aspectos particulares crea la oportunidad para que los estudiantes para maestro aprendan a usar el conocimiento como una manifestación del desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente». En este caso particular, la información sobre los elementos matemáticos que deben ser comprendidos para avanzar en la comprensión del concepto de fracción como parte-todo permite organizar y estructurar el argumento práctico de la estudiante para maestro. Así, ya que los estudiantes para maestro pueden generar diferentes respuestas a este tipo de actividad, la estructura y el contenido de los argumentos prácticos generados ayudan a determinar niveles de desarrollo de la competencia docente.

En este caso, el discurso generado por los estudiantes para maestro hace visible tanto el contenido como la estructura de su razonamiento. Sin embargo, el uso del conocimiento para analizar diferentes representaciones de la práctica es diferente a implicarse en la práctica mediante propuestas de acción vinculadas a la interpretación de la situación. Por lo tanto, una cuestión que se genera aquí es considerar los posibles vínculos entre el lenguaje profesional sobre la práctica y la habilidad de implicarse en prácticas reales. Sin embargo, podemos considerar que estas actividades del programa de formación son una *aproximación* a la práctica (Grossman et al., 2009) ya que permiten centrar la atención del estudiante para profesor en aspectos claves de la práctica; cuestión que puede ser difícil para un novel, pero ser casi transparente para un experto. Por ejemplo, el análisis pormenorizado sobre las respuestas de los niños que exige la práctica descrita en la Figura 3, puede no ser considerada real por un profesor experto. Sin embargo, puede resultar útil para centrar de manera consciente la atención del estudiante para maestro en algunos aspectos sobre los que pivota la enseñanza de las matemáticas (Mason, 1998). En este sentido, la *aproximación a la práctica* generada con este tipo de actividades en el programa de formación difiere de la práctica real, pero representa una aproximación relativa que puede completarse, por ejemplo, en el periodo de prácticas de enseñanza en la escuela. Esta aproximación a la práctica permite crear contextos para maximizar el aprendizaje del conocimiento que puede llegar a ser útil para comprender la enseñanza.

LA COMPETENCIA DOCENTE «MIRAR PROFESIONALMENTE» COMO UN PROCESO BASADO EN EL USO DEL CONOCIMIENTO

Para desarrollar la competencia «mirar profesionalmente» la enseñanza de las matemáticas es necesario tener en cuenta representaciones de esta práctica y ayudar a los estudiantes para profesor a centrar su atención sobre ellas. Dos de estas representaciones de la práctica de enseñar matemáticas que han sido descritas en las secciones anteriores son la gestión de la interacción y el discurso matemático en la clase, y la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes. Desde esta perspectiva, la descomposición de la práctica de esta manera apoya el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» ya que permite que los estudiantes para profesor aprendan a «ver» aspectos relevantes y a usar un vocabulario específico para nombrar partes de la práctica. En el primer ejemplo descrito, se trata de descomponer la gestión de la situación de enseñanza en el tipo de actividad, el papel del maestro en las fases de la resolución de un problema, o en la manera en la que se articula la discusión matemática (Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008). El segundo ejemplo centra la atención en la demanda cognitiva de la actividad y las semejanzas y diferencias en las respuestas de los niños considerando los niveles de comprensión dados por el modelo de progresión en el aprendizaje de las fracciones (Battista, 2012). El conocimiento que los estudiantes para profesor deben usar para comprender estas representaciones de la práctica de enseñar matemáticas permite apoyar la idea de que la competencia docente «mirar profesionalmente» *es un proceso basado en el conocimiento*.

Por otra parte, los diferentes registros de la práctica usados permiten mostrar ciertos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, pero no otros. En este sentido, somos conscientes de que existen limitaciones y diferencias en cómo las representaciones de la práctica son ejemplificadas en los programas de formación usando unos registros en vez de otros (por ejemplo, usando videos o narrativas para mostrar características de la interacción entre el profesor y los estudiantes). Esto es debido a que es posible movilizar diferentes conocimientos al analizar los registros de la práctica (Thomas, Jong, Fisher y Schack, 2017). Es decir, el desarrollo de las destrezas alrededor de las que se articula esta competencia docente (identificar los elementos relevantes, interpretarlos y tomar decisiones de cómo seguir la enseñanza) se apoya en el conocimiento de matemáticas para enseñar (Ivars, et al., 2018) y en la existencia de un vocabulario específico y una forma de organizar el discurso profesional. La existencia de un vocabulario específico permite nombrar aspectos de la práctica ayudando a focalizar la atención, y a empezar a generar argumentos de la práctica cada vez mejor estructurados. Así, el conocimiento que el programa de formación proporciona y que debe ser movilizado para analizar un registro de la práctica (por ejemplo, video-clips de una lección, o respuestas de alumnos a problemas) debe llegar a ser considerado relevante por los estudiantes para profesor. Es decir, el conocimiento que se articula en la competencia docente «mirar profesionalmente» tiene una vinculación estrecha con el registro de la práctica proporcionado.

Los argumentos prácticos generados por los estudiantes para profesor al analizar los diferentes registros de la práctica considerados como evidencias del desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente», pueden estar determinados por la concreción de la información teórica proporcionada como guía (Ivars, Buforn y Llinares, 2016). Desde este punto de vista, una cuestión clave para comprender en su justa medida el papel de los registros de la práctica lo determina lo que el binomio conocimiento teórico-registro de la práctica permite hacer visible.

Es decir, en qué medida dicho binomio permite generar oportunidades para aprender, determinando qué mirar y cómo interpretar lo que se mira. En este sentido, Grossman et al. (2009) indican que hacer visible a los estudiantes para profesores aspectos relevantes de la práctica puede ayudarles a desarrollar la competencia docente «mirar profesionalmente» (en el sentido de una percepción disciplinada de la práctica, Mason, 1998).

El análisis de registros de la práctica guiados por algún tipo de información teórica subraya la idea de que la competencia docente «mirar profesionalmente» es un proceso a través del cual se aprende a usar el conocimiento pertinente para enseñar matemáticas. Este aprendizaje se evidencia por la generación de un discurso profesional rico en detalles (contenido del discurso) (Ivars et al., 2018) y a través de la mejora de una estructura argumental que hace cada vez más explícita la manera en la que se articula la relación entre las evidencias, las inferencias realizadas, y los apoyos teóricos usados para justificar dichas inferencias (Roig et al., 2011). La reconstrucción de los argumentos prácticos de los estudiantes para profesor (Fenstermacher y Richardson, 1993) a través de los diferentes entornos de aprendizaje en los que se analizan registros de la práctica puede aportar evidencias de este aprendizaje. Por ejemplo, el aprendizaje de determinados elementos de matemáticas para la enseñanza enriqueciendo su discurso profesional, permite a los estudiantes para profesor ser más conscientes de los detalles que pueden ser relevantes en una situación e interpretarlos para apoyar sus decisiones de acción. En este sentido, la relación entre el desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente» y el aprendizaje del conocimiento de matemáticas necesario para enseñar se retroalimenta (Ivars et al., 2018).

Así, los programas de formación pueden apoyar la relación entre las diferentes destrezas de la competencia docente «mirar profesionalmente» y el conocimiento de matemáticas para enseñar (Blömeke, Busse, Kaiser, Köning y Suhl, 2016). Sin embargo, la fuerte relación mutua entre competencia y conocimiento cuando analizamos la relación entre desarrollo y aprendizaje está vinculada a la concreción con la que se presenta el conocimiento que deben usar los estudiantes para profesor para analizar los registros de la práctica.

RECONOCIMIENTOS

La participación de À. Buforn, P. Ivars y S. Llinares ha sido apoyada por los proyectos EDU2017-87411-R del MINECO, España, y Prometeo 2017/135, Generalitat Valenciana.

REFERENCIAS

Battista, M.T. (2012). *Cognition-based assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

Blömeke, S., Busse, A., Kaiser, G., Köning, J. y Suhl, U. (2016). The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. *Teacher and Teacher Education, 56,* 35-46.

Brophy, J. (2003). *Using video in teacher education (Advances in Research on Teaching, volume 10)*. London: Emerald Group Publishing Limited.

Buforn, À. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional*. Tesis doctoral. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante.

Eraut, M. (1994). *Developing professional knowledge and competence.* London: The Falmer Press.

Fenstermacher, G. y Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies, 25*(2), 101-114.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44,* 747-759.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1&2), 441-468.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G. y Llinares, S. (2014). Prospective mathematics teachers' learning of students' mathematical thinking. En L. Gómez-Chova, A. López Martínez e I. Candel Torres (Eds.), *ICERI2014 Proceedings: 7th International Conference of Education, Research and Innovation* (pp. 4816-4823). Sevilla: IATED Academy.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. (2009). Teaching practice: A Cross –professional perspective. *Teachers College Records, 111*(9), 2055-20100.

Ivars, P., Buforn, A. y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente». *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourses. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(11), em1599.

Lampert, M. y Ball, D. (1998). *Teaching, multimedia, and Mathematics: Investigations of real practice*. New York: Teachers College Press.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53-70.

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente» la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50,* 117-133.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of preservice primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online case studies. *Instructional Studies, 37*, 247-271.

Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 177-196.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary level of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 243-267.

Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Prospective mathematics teachers' perspectives on technology. En M. Strutchens, R. Huang, D. Potari y L. Losano (Eds.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers. ICME-13 Monographs* (pp. 125-142). London: Springer.

Oonk, W., Verloop, N. y Gravemeijer, K. (2015). Enriching practical knowledge: Exploring student teachers' competence in integrating theory and practice of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 559-598.

Roig, A.I., Llinares, S. y Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática, 23(*3), 39-65.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing preservice teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 1305-1329.

Schack, E., Fisher, M. y Wilhelm, J. (Eds.), (2017). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspective contexts, and frameworks.* London: Springer.

Siebert, L.G., Groenwald, C. y Llinares, S. (2013). Observar com sentido: uma competencia importante na vida professional do professor de Matemática. *Acta Scientiae, 15*(1), 133-152.

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S. y Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10(*4), 313-340.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. y Schack, E. (2017). Noticing and knowledge: Exploring theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Education, 26*(2), 3-25.

Valls, J., Callejo, M.L. y Llinares, S. (2008). Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la Matemática. *Publicaciones, 38,* 89-103.

UNA MIRADA A LAS INVESTIGACIONES INTERNACIONALES SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y PROBLEMAS EMERGENTES

A VIEW AT INTERNATIONAL RESEARCH ON TEACHERS' KNOWLEDGE AND EMERGING PROBLEMS

Olimpia Figueras[1] y Mariana Sáiz[2]

[1]*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,*
[2]*Universidad Pedagógica Nacional*

RESUMEN

El conocimiento del profesor es actualmente uno de los objetos de estudio importantes de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática. Desde finales de los años noventa se ha incrementado el interés por comprender mejor las características de ese conocimiento y su papel en el aprendizaje de los estudiantes. En este capítulo se delinean direcciones de investigación para acceder a un entendimiento profundo de la compleja tarea de los profesores de matemáticas y de cómo su conocimiento les permite estructurar actividades en el salón de clase. La exposición se hace a través de cuatro preguntas sobre quién determina la efectividad de la práctica, qué sabe el profesor y cómo usa su conocimiento, cuál es el conocimiento esencial para enseñar matemáticas y si el profesor es usuario o productor de conocimiento.

Palabras clave: *conocimiento matemático, conocimiento para enseñar matemáticas, conocimiento práctico, enriquecimiento del conocimiento práctico.*

Figueras, O. y Sáiz, M. (2019). Una mirada a las investigaciones internacionales sobre el conocimiento del profesor y problemas emergentes. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 193-214). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

Teacher's knowledge is currently one important study object of the international community of researchers in mathematics education. Since the end of the nineties the interest in better understanding the structure of that knowledge and its role in students' learning has been growing. In this chapter, research directions to gain an understanding of the complex task of mathematics teachers and how their knowledge enables them to structure activities in the classroom are outlined. Presentation is made through four questions about who determines the effectiveness of the practice, what the teacher knows and how this knowledge is used, what is the substantial knowledge for teaching mathematics and whether the teacher is a user or a producer of knowledge.

Keywords: *teachers' mathematical knowledge, knowledge for mathematics teaching, practical knowledge, enrichment of practical knowledge.*

INTRODUCCIÓN

En 2004, en la lista de los dominios de investigación para clasificar las propuestas que se enviaban a consideración del comité organizador del 28avo congreso anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (IGPME, por sus siglas en inglés) apareció por primera vez el 'conocimiento del profesor'. Este hecho, como mencionan Lin y Rowland (2016), es uno entre muchos indicadores de que la comunidad internacional de investigadores en educación matemática consideró esa temática como un 'campo legítimo de investigación'. Esto sólo quiere decir que 'el conocimiento del profesor' como objeto de estudio se reconoció tardíamente, porque desde 1976 (año de creación del IGPME) al 2003 se publicaron en las memorias anuales de los congresos de ese grupo una gran cantidad de informes de estudios sobre el profesor, su conocimiento, sus creencias y su práctica. da Ponte y Chapman (2006) dan cuenta del incremento en el interés de los miembros del IGPME por dicha temática desde mediados de la década de los noventa.

En contraste, en el campo de la educación, el estudio de los profesores y de la enseñanza desde diferentes perspectivas tenía ya una larga tradición. Como con muchos otros asuntos, investigadores de educación matemática adoptaron, adaptaron y construyeron sus conceptualizaciones sobre el conocimiento matemático del profesor a partir de marcos teóricos de referencia estructurados para el conocimiento del profesor en el ámbito de la educación en general. Entre esos, los que más influencia han tenido en la caracterización del conocimiento matemático del profesor son los marcos de:

- Shulman (1986), cuyo constructo 'conocimiento pedagógico del contenido' ha sido un elemento clave para modelos en la investigación en educación matemática (en esta parte del libro, tres de los cuatro capítulos citan a este investigador, se puede vislumbrar una influencia de su marco teórico en la investigación sobre esta temática en España).

- Elbaz (1981, p. 43) hizo un esfuerzo por conceptualizar el papel del profesor de manera más adecuada que sólo mirarlo como un ente pasivo, o bien, como un operador del currículo y propuso considerar al profesor como poseedor y usuario de un 'conocimiento práctico'.
- Schön (1983) distinguió entre la racionalidad técnica y la 'práctica reflexiva'; afirmó que el conocer está en nuestra acción y en ese contexto se refiere a constructos como conocer-en-la-acción, reflexionar-en-la-acción, reflexionar-en-la-práctica y enmarcar y re-enmarcar.

Fenstermacher (1994) hace una revisión de concepciones de conocimiento usados en cuerpos de investigación sobre la enseñanza para identificar cuáles son las nociones de conocimiento empleadas y analizadas en programas de investigación que estudian a profesores y a su enseñanza. En esa revisión considera al conocedor y lo conocido y organiza la literatura a través de cuatro preguntas: ¿Qué se sabe acerca de la enseñanza efectiva?, ¿qué saben los profesores?, ¿cuál es el conocimiento esencial para enseñar?, y ¿quién produce conocimiento acerca de la enseñanza?

Menciona Fenstermacher (1994, pág. 4) que la pregunta: ¿qué se sabe acerca de la enseñanza efectiva? permite aproximarse al concepto conocimiento tal y como aparece en la investigación estándar o convencional de la ciencia del comportamiento. Los estudios proceso-producto sobre la enseñanza son quizás el ejemplo más conocido de esta noción.

La segunda pregunta, ¿qué saben los profesores?, apunta a la investigación con la cual se pretende comprender lo que los profesores saben como resultado de su experiencia como maestros. El filósofo lo llama conocimiento práctico y afirma que en las respuestas a esta pregunta aparecieron varias modalidades de este tipo de conocimiento, a saber: práctico, personal práctico, situado, local, relacional y tácito.

¿Cuál es el conocimiento esencial para enseñar? es una pregunta que se dirige al programa de investigación de Lee Shulman y sus colegas. Fenstermacher afirma que en el trabajo de este investigador no se introducen tipos de conocimiento diferentes de los que aparecen en las respuestas a las dos preguntas anteriores, sino que se intenta mostrar qué formas y tipos de conocimiento se requieren para enseñar de manera competente.

Para considerar la diferencia entre conocimiento generado por la investigación basada en universidades y el generado por profesores practicantes, Fenstermacher formula la cuarta pregunta, ¿quién produce conocimiento acerca de la enseñanza? El investigador cita el trabajo de Cochran-Smith y Lytle (ver por ejemplo, 1993) como prominente de esta categoría, el cual se relaciona con el profesor como productor de conocimiento. En educación matemática un ejemplo preponderante es el conocido como 'Estudios sobre Lecciones' (*Lesson Study*) del programa de investigación japonés estructurado por profesores de matemáticas (ver Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013).

Curiosamente, la organización de Fenstermacher a través de las cuatro preguntas permite estructurar una revisión de líneas de investigación de la comunidad internacional sobre el conocimiento matemático del profesor, por ello se decidió usarlas para estructurar la exposición.

Antes de iniciar, un comentario. Hay una gran cantidad de documentos relacionados con este tema. En la revisión de da Ponte y Chapman (2006) de las memorias del PME de 1976 a 2006, ellos identificaron 230 y Lin y Rowland (2016), en la década de 2006 a 2016, encontraron, en una primera clasificación, 975 documentos que aludían a algún aspecto sobre el conocimiento matemático del profesor y su práctica. En este capítulo se describen a grandes rasgos líneas de investigación y se usan ejemplos de programas de investigación que se consideraron cumplen con las características de esas orientaciones de indagación. Imposible ser exhaustivo.

¿QUÉ SE SABE ACERCA DE LA ENSEÑANZA EFICIENTE?

De acuerdo con Murillo (2008), Scheerens, el investigador holandés de la enseñanza eficiente, es quien propone un primer modelo teórico global de eficiencia escolar, él consideró cuatro niveles: alumno individual, aula, centro educativo y contexto. Para Murillo (2008), la propuesta más concreta es la de Creemers, quien diseñó un modelo de eficiencia docente (ver Scheerens y Creemers, 1996), debido a que ya desde entonces se había encontrado que el nivel de aula es el que tiene más impacto en los logros de los estudiantes.

Miao (2015) comenta que entre los pocos estudios donde convergen las investigaciones de la educación matemática y de la enseñanza eficiente se encuentra el proyecto inglés, de 1997, Profesores Eficientes en Aritmética (*Effective Teachers of Numeracy*) que se enfocó en las creencias de los maestros acerca de las matemáticas y su enseñanza, y sus conocimientos de contenido pedagógico (en el sentido de Shulman, 1986) en relación con su enseñanza efectiva de dicha materia en las aulas. Entre los resultados de este proyecto está la distinción de tres estilos para enseñar matemáticas: orientados a la conexión, a la transformación o al descubrimiento, y el reconocimiento de que los maestros eficientes tendían a ser 'conexionistas', es decir, capaces de conectar diferentes ideas matemáticas y diferentes representaciones de cada idea por medio de una variedad de palabras, símbolos y diagramas (McDonough y Clarke, 2003). Otro hallazgo es que los maestros eficientes tenían conocimientos más profundos de las matemáticas, del conocimiento pedagógico del contenido y de los alumnos; aunque es necesario aclarar que, en dicho estudio, los maestros no eran típicos, provenían de escuelas consideradas de enseñanza eficiente.

Los estudios comparativos internacionales también muestran el interés por encontrar características que relacionen a las escuelas, los ambientes escolares o los maestros con los logros académicos de sus estudiantes. Respecto a matemáticas, los video estudios hechos en el contexto del Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (*Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS)), de 1995 y 1999, son ejemplos de ese tipo de indagación. Otro estudio más reciente es el Estudio de Educación y Desarrollo de Profesores de Matemáticas (*Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M)) implementado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA)), que lo define como «el primer estudio comparativo internacional enfocado exclusivamente en la formación de profesores». El TEDS-M se llevó a cabo en 2008; participaron Alemania, Botsuana, Canadá, Chile, España, Estados Unidos, Federación Rusa, Filipinas, Georgia, Malasia, Noruega, Omán, Polonia, Singapur, Suiza, Tailandia y Taipéi, con el objetivo de encontrar diferencias en la formación de los maestros en los distintos países, obtener datos sobre los conocimientos de los profesores e indagar relaciones entre algunas características de los programas formativos y los resultados de los estudiantes en matemáticas. Aunque el estudio es comparativo y no se hacen recomendaciones para lograr una enseñanza eficiente, sí se establecen hipótesis que pueden guiar investigaciones posteriores relacionadas con la eficiencia.

> Una de tales hipótesis es que tres de las variables (máximo grado de preparación de los maestros, duración del programa y alcance de la especialización en la materia) podrían ser especialmente poderosas para aprender y obtener resultados. Y, en lo que respecta a los resultados de la pedagogía matemática, puede ser que una experiencia de campo más prolongada y una amplitud en el grado (en el que se va a trabajar) se asocien con puntuaciones de conocimiento más altas. Pero todo esto está sujeto a confirmación en posteriores análisis de TEDS-M diseñados para explorar qué tan bien los datos empíricos encajan con estas hipótesis (Tatto, 2013, p. 27).

Otro organismo que desde la década de los 90's ha coordinado estudios internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el Centro para la Innovación en la Enseñanza de las Matemáticas (CIMT, por sus siglas en inglés) de la Universidad de Exeter. Entre 2007 y 2009 se llevó a cabo un estudio comparativo, centrado en la formación del profesor, denominado Estudio Internacional Comparativo sobre la Formación de Maestros de Matemáticas (ICSM por algunas de sus siglas en inglés), en el cual participaron China, Finlandia, Hungría, Inglaterra, Irlanda, Japón, República Checa, Rusia, Singapur y Ucrania. Burghes (2011, pág. 8) afirma que:

> El objetivo de este estudio fue buscar un entendimiento de la buena práctica en la formación de profesores de matemáticas (de primaria y secundaria). Está basado en evidencia de una variedad de países con alto desempeño y usa un estudio parcialmente longitudinal para proveer recomendaciones para la formación efectiva. Se usa el término «buena práctica» para reconocer que la formación de maestros está sujeta a gran variación dentro de y entre los países y reconoce que los procesos de formación varían de país en país por lo que se ha procurado ser agudos para identificar lo que todos estuvieran de acuerdo en considerar buena práctica, sin importar el contexto y la cultura.

Del análisis de la información recabada, los responsables de la investigación de cada país obtienen recomendaciones para la formación inicial de los maestros de primaria y de matemáticas de secundaria. Por ejemplo, para la selección de los futuros profesores sugieren elegir candidatos que tengan confianza en sus conocimientos y sean competentes en matemáticas en un nivel significativamente mayor a aquel en el cual se van a desempeñar y que hayan llevado cursos de esa materia sin interrumpir hasta ingresar a la carrera. A las instituciones formadoras les recomiendan un equilibrio entre teoría y práctica y usar la tecnología de 'estudio de lecciones' (*lesson study)* como el concepto más importante en el trabajo en las aulas formadoras. Otra recomendación es darle al formador tiempo suficiente para preparar sus lecciones, investigar y trabajar con expertos.

Los estudios comparativos han incluido una sección dedicada a observar las clases en diferentes países (por ejemplo, los estudios de video del TIMSS). El resultado es que la metodología de investigación se ha aplicado también, con buenos resultados, en la formación de maestros; en parte por el ejemplo de Japón donde surge el 'estudio de lecciones' como metodología de trabajo de los maestros. El recurso de observación en el aula también ha sido relacionado con la efectividad.

> Quizás la razón más obvia para estudiar aulas de diferentes culturas es que la eficiencia de la escolarización, medida por el logro académico, difiere a través de las culturas … Si las diferencias de logros transnacionales están vinculadas a variaciones culturales en la enseñanza, podemos descubrir formas de enseñar que funcionan mejor que las que nuestra sociedad emplea habitualmente. Esto nos permitiría aprovechar la experiencia de otros que comparten objetivos similares en todo el mundo (Stigler, Gallimore, y Hiebert, 2000, p. 87, citados por Clarke, 2003, pág. 11).

Otro ejemplo de estudio sobre la eficiencia, aunque a menor escala que los ya mencionados, es el Proyecto de Investigación sobre Conocimientos Tempranos de Matemáticas (*Early Numeracy Research Project* (ENRP)) de McDonough y Clarke (2003). Ellos estudian a maestros y alumnos de los tres primeros grados de primaria, observan el progreso de los alumnos de un año a otro y, basados en esa información y algunas otras variables, eligen a seis maestros a quienes catalogan como maestros eficientes. De cada uno hacen un estudio de caso: observando su instrucción en el aula, haciéndoles entrevistas y entrevistando a otros miembros de las escuelas, entre muchas otras acciones. Del análisis de esta información obtienen un perfil de lo que es ser un maestro eficiente; entre otras características mencionan las siguientes: el profesor se enfoca en ideas matemáticas importantes y hace claro el enfoque a los niños, propone tareas significativas que los mantengan interesados y que se puedan resolver por distintos métodos, usa materiales variados, conecta con ideas de otras lecciones o temas, evita decir todo lo que hay que hacer a los niños, anima a que ellos expresen sus ideas, los invita a escuchar a sus compañeros con atención, tiene expectativas altas pero realistas de sus alumnos, reflexiona y finaliza sus lecciones con las ideas clave, usa muchos métodos para evaluar a los niños, se siente seguro de sus conocimientos y desempeño profesional.

Miao (2015) como resultado de su investigación comparativa entre escuelas primarias de Inglaterra y China obtiene una serie de recomendaciones para cada país. Para Inglaterra sugiere no usar clases tipo conferencia; incrementar interacciones del grupo completo entre sí y con su profesor; mejorar los conocimientos de contenido y de contenido pedagógico de los maestros y especializar a los maestros de primaria. Mientras que para China, el investigador considera que el problema no está en las aulas (excepto el de atender mejor a niños con necesidades educativas especiales), sino en los cambios en la sociedad y la política de un país que tiende a americanizarse; por lo que recomienda preservar los acercamientos educativos actuales y evitar cambios radicales en las aulas.

Un panorama general de lo que se ha hecho y lo que falta por hacer en la investigación sobre formación de maestros y su relación con los logros de los estudiantes es el siguiente:

> Los temas que se han estudiado ampliamente y para los cuales existen numerosas publicaciones internacionales son: la efectividad de programas particulares de formación docente; el (re) aprendizaje de los docentes en los procesos de reforma y en comunidades profesionales y otros entornos institucionales. […] Los problemas que no se han examinado son: el aprendizaje de los docentes en contextos donde la reforma no es el problema dominante; la naturaleza del aprendizaje de los maestros a partir de la experiencia; profesores que aprenden a tratar cuestiones de género, idioma y estatus socioeconómico; comparaciones de la efectividad de diferentes entornos de formación docente; y los efectos de extender los programas a entornos de aprendizaje diferentes (Gellert, Becerra Hernández y Chapman, 2013, pág. 330).

Además de los temas mencionados en la cita anterior y las cuestiones pendientes que provienen del TEDS-M, una futura dirección para continuar en esta línea de investigaciones es el estudio de programas de formación eficientes que integren innovaciones basadas en resultados de investigación. Entre la problemática general de los programas de formación se encuentra la de la admisión de los aspirantes, cuáles deberían ser las características de los conocimientos y las aptitudes de una persona que aspira a ser profesor de matemáticas, esto sin duda tiene repercusiones en su formación docente y a la larga en su enseñanza. Un acercamiento a esta problemática es el estudio de Gorgorió y Albarracín (ver capítulo en este libro) quienes indagan sobre el conocimiento matemático de alumnos que acceden a un programa de formación para educación primaria.

¿QUÉ SABEN LOS PROFESORES?

Como reacción a la forma de conceptualizar el papel de los profesores como transmisores pasivos de conocimiento, o bien agentes que implementan el currículum adaptando y cambiando los materiales producidos por otros, como se mencionó al inicio de este capítulo, Elbaz (1981) propone otra manera de concebir su actuar sosteniendo que el profesor tiene y usa 'conocimiento práctico'.

Elbaz afirma que al iniciar su investigación quiso mirar primero la percepción que se tenía del desarrollo curricular, proceso en el cual el profesor tiene una participación importante. Si este proceso es visto como una progresión lineal, cuyos fines se separan de los medios, ella asevera que una consecuencia de esa apreciación es la distinción radical de la teoría y la práctica, con la consecuente problemática de cómo aplicar la primera en la segunda; es evidente que en última instancia es el profesor quien traduce las nociones teóricas a la práctica y que los eventos en el aula son la «concreción del currículo» (Westburry, 1977, citado en Elbaz, 1981, pág. 43).

En esta descripción se pone de manifiesto una problemática que ha perdurado, la brecha entre la práctica y la teoría. Black y Halliwell (2000) dicen «es preocupante que a los maestros les resulte difícil aplicar los conocimientos adquiridos mediante el estudio formal a las complejidades de la enseñanza» (pág. 103). Afirmación que subraya lo que piensan los profesores sobre lo que aprenden, en particular acerca de la teoría, en los programas de formación. Oonk (2009) afirma que:

> … la 'vieja brecha' entre la práctica y la teoría existe en diferentes formas y a diferentes niveles. Aun cuando Freudenthal, ya en 1987 sostenía que 'la brecha no es necesaria' (p. 14), investigadores recientes y educadores de profesores todavía se refieren –directa o indirectamente– a la existencia de este fenómeno (ver, Ball y Cohen, 1999; Jaworski, 2006; Van Zaten y Van Gool, 2007) (pág. 10).

Estudiar cómo estrechar esa brecha constituye una de las direcciones de la investigación en educación matemática. Y en este rumbo el conocimiento práctico[1] es un concepto que permite estudiar esa problemática y diseñar estrategias para acercar la teoría a la práctica a través de los programas de formación de profesores.

Oonk (2009) afirma que la investigación hecha por Elbaz (1981) y su conceptualización del conocimiento del profesor fue un factor que provocó un cambio de giro: de enfocarse en el estudio sobre el pensamiento del profesor a centrarse en la investigación acerca del conocimiento práctico del profesor. Para ella este conocimiento es personal y 'situacional'.

Fenstermacher (1994, pág. 11) tras hacer una revisión de las diferentes nociones que se usaron para estudiar al profesor y su enseñanza describe al conocimiento práctico como:

> … aquel conocimiento o comprensión desarrollada de la participación en y la reflexión sobre la acción y la experiencia. Está limitado por la situación o el contexto en el cual surge, puede o no ser capaz de expresión inmediata a través de la palabra o la escritura. El conocimiento práctico del profesor está generalmente relacionado con cómo se hacen las cosas, o el mejor lugar y tiempo en el cual se hacen, o acerca de cómo ver e interpretar eventos relacionados con sus propias acciones.

Con la intención de incluir un ejemplo de un programa de investigación estructurado con el objeto de relacionar la práctica con la teoría y centrando la atención sobre el conocimiento práctico del profesor de matemáticas, se eligió un programa holandés que se vincula con el proyecto MILE (Goffree y Oonk, 2001) y con la investigación relacionada con el 'enriquecimiento-con-teoría del conocimiento practico' (*theory-enriched practical knowlede*) (Oonk, 2009).

MILE es un entorno multimedia de aprendizaje interactivo para la formación de profesores de primaria sustentado, a decir de Goffree y Oonk (2001), por medio de 7 orientaciones teóricas. La primera es que se considera una continuación de la investigación de desarrollo que se lleva a cabo en el Instituto Freduenthal. La segunda corresponde al concepto de conocimiento práctico de Elbaz y la tercera vinculado con una modalidad de ese tipo de conocimiento caracterizado por Fenstermacher (1994), a saber, con el concepto de 'practica reflexiva' de Schön. Como afirman los investigadores holandeses, «esas dos ideas han sacudido al mundo de los formadores de profesores» (Goffree y Oonk, 2001, pág. 112). El uso de narrativas en enseñanza, en aprendizaje y en aprendiendo a enseñar, constituye la cuarta

[1] El conocimiento práctico aparece en la literatura con diferentes nombres, entre otros: 'conocimiento personal práctico' (Clandinin, 1985), 'sabiduría de la práctica', 'conocimiento artesanal' (Grimmett y MacKinnon, 1992, citado en Oonk, 2009, pág. 22).

orientación[2]. La quinta orientación teórica «tiene que ver con la construcción del conocimiento relacionada con el acercamiento socio-constructivista de Paul Cobb, quien obtuvo su inspiración de Kilpatrick (1987) y Schoenfeld (1987)» (pág. 112). La sexta orientación se vincula con la idea de Lampert y Ball (1998, citado en Goffree y Oonk, 2001) «investigar la práctica real para aprender de la práctica», la cual, afirman los investigadores holandeses, ha sido un punto clave por el impacto de su trabajo en MILE. Por último, los investigadores holandeses citan «el trabajo de Alan Tough (1971) sobre educación de adultos».

En ese entorno digital de aprendizaje se introducen situaciones de la realidad de los salones de clase como una fuente para analizar y coadyuvar a la construcción del conocimiento práctico de los estudiantes para profesor. Se puede considerar, afirma Oonk (2009), como una «'representación completa de la práctica' que proporciona ejemplos de 'buenas prácticas' para el uso en la formación docente» (pág. 66). Esta representación se incluye en el entorno de aprendizaje de diferentes maneras – historias de maestros, estudios de caso, incidentes críticos, videos, trabajo de campo de los estudiantes y representaciones multimedia– (Goffree y Oonk, 2001).

MILE constituye el escenario en el cual Oonk (2009) pone a prueba su programa de formación y analiza cómo y a qué nivel los estudiantes para maestros de primaria pueden integrar la teoría y la práctica y cómo la organización de su entorno de aprendizaje, centrándose especialmente en las matemáticas y la pedagogía, pueden contribuir a eso.

Para lograr los objetivos Oonk (2009) hace 4 estudios diferentes. Dos exploratorios, el primero con 2 estudiantes para profesor y la intención de saber cuáles son las características de los procesos de investigación en MILE y cuál es el resultado de su aprendizaje en términos de construcción de conocimiento. El segundo con 25 estudiantes estuvo centrado en las evidencias del uso de la teoría inmersas en sus reflexiones sobre situaciones de práctica estudiadas en MILE. El tercer estudio, de pequeña escala con 14 participantes de 2 centros de formación, tenía el objetivo de responder las preguntas de qué manera y en qué grado los estudiantes usan el conocimiento teórico al describir situaciones prácticas después de estudiar en un entorno de enseñanza que invita al uso de la teoría, y obtener información sobre el grado de la relación entre el uso de la teoría y el nivel de dominio de la aritmética. El estudio a gran escala con 269 estudiantes de 11 centros tiene por objeto saber

[2] Connelly y Clandinin (1990, citado en Fenstermacher, 1994) al concebir al profesor como poseedor de conocimiento práctico personal vieron la necesidad de encontrar nuevas formas de aprender lo que sabe sin emplear métodos que distorsionen, destruyan o reconstruyan ese conocimiento. Ellos han contribuido al desarrollo de la indagación narrativa, metodología que no sólo se ha utilizado en la investigación, sino que algunos de sus elementos han servido también como recurso en la formación de los profesores.

en qué grado los futuros profesores son capaces de hacer conexiones entre la teoría y la práctica.

Entre los resultados del proyecto de investigación dirigido por Oonk (2009), además de enriquecer el entorno de aprendizaje MILE, se encuentra la construcción de un instrumento que permite la descripción del uso de la teoría por parte de los estudiantes. Las variables, la naturaleza del uso de la teoría –descripción de hechos, interpretación, expresión y respondiendo a– y nivel de uso –no hay un uso visible, uso mecánico o reproductor, integración y síntesis– se emplean para el diseño de un instrumento que puede utilizarse tanto para fines de sondeo, como de evaluación.

Oonk (2009) describe en el resumen de su tesis los resultados que encontró:

> Casi todos los estudiantes pudieron integrar la teoría y la práctica de una manera natural a través de la obtención del llamado 'conocimiento práctico enriquecido-con-teoría'. [...] En tal situación, los estudiantes utilizan principalmente la teoría para analizar la práctica o para responder a situaciones prácticas. Sin embargo, hay diferencias significativas, que se expresan, entre otras cosas, en la relación entre la naturaleza y el nivel de uso de la teoría y las variables relacionadas con los estudiantes, como el grado de estudio, la educación previa y el dominio de la aritmética. El aumento en el nivel de uso de la teoría por parte de los estudiantes se produce principalmente durante la interacción dirigida por el formador de maestros. [...] Entre otras cosas, los resultados del estudio apuntan hacia la necesidad de medidas pedagógicas adicionales para aquellos estudiantes con una educación vocacional secundaria superior sin matemáticas, así como para estudiantes con una educación preuniversitaria con matemáticas.

Otros programas de investigación se han llevado a cabo con marcos de referencia y recursos metodológicos y tecnológicos semejantes, tales como: Un Marco Basado en la Práctica del Conocimiento Matemático de los Profesores para Enseñar (*A practice-based framework for teachers' knowledge for teaching*) del equipo de la Universidad Estatal de Michigan, en Estados Unidos (ver por ejemplo, Petrou y Goulding, 2011) y el implementado en España en la Universidad de Alicante (ver por ejemplo el capítulo de Llinares, Ivars, Bufon y Groenwald en este libro).

¿CUÁL ES EL CONOCIMIENTO ESENCIAL PARA ENSEÑAR?

La discusión sobre cuál es el conocimiento esencial para enseñar matemáticas tiene una larga historia. Fennema y Franke (1992) mencionan que pese a las creencias sobre la importancia del conocimiento de las matemáticas y la evidencia de que algunos maestros no tienen el conocimiento de matemáticas adecuado para enseñar, la investigación antes de la década de los ochenta había aportado pocas evidencias para sostener la existencia de una relación directa entre el conocimiento de matemáticas del profesor y el aprendizaje de sus estudiantes. Ellas comentan que los estudios que se hicieron para intentar establecer esa relación no arrojaron los resultados esperados debido a cómo se caracterizaba el conocimiento matemático del profesor, por ejemplo por medio del número de cursos universitarios de matemáticas que se habían acreditado, sin considerar lo que se había aprendido en ellos.

El marco de referencia de Shulman (1986) fue un factor, entre otros, que contribuyeron a centrar la atención en el conocimiento del profesor y el uso que hace de ese en su enseñanza, lo que posibilitó la búsqueda por caracterizar el conocimiento matemático del profesor. Shulman propuso tres dimensiones del conocimiento del profesor acerca del contenido, la categoría que ha tenido más influencia es la llamada 'conocimiento pedagógico del contenido' (PCK, por sus siglas en inglés), un conocimiento complementario al del contenido de la materia a enseñar, que en el caso de las matemáticas se abrevió como MCK (por sus siglas en inglés).

Desde entonces se ha generado una amplia discusión sobre esta temática y se han propuesto varios modelos teóricos del conocimiento matemático del profesor (ver por ejemplo Fennema y Franke 1992, y Petrou y Goulding, 2011) usados por los investigadores en educación matemática para estudiar la enseñanza y mejorar los programas de formación. En esta sección se describen a grandes rasgos las características de dos modelos y sus alcances; la exposición se inicia con el modelo que a decir de Lin y Rowland (2016) es «el marco teórico dominante en la investigación actual en el campo» (pág. 487), este es el de Ball y colaboradores, sustentado en la práctica.

Ball, Thames y Phelps (2008) con miras a definir las categorías de Shulman para el caso de la enseñanza de las matemáticas, han desarrollado un gran número de estudios. De éstos obtuvieron propuestas para los contructos PCK y CK específicos para las matemáticas. Por un lado, dividen el PCK en tres partes: 'conocimiento del contenido y de los estudiantes' (Knowledge of Content and Students (KCS)), 'conocimiento del contenido y la enseñanza' (Knowledge of Content and Teaching (KCT)) y 'conocimiento del curriculum' (Knowledge of Curriculum (KC)). Por el otro, crean el MCK y lo dividen en tres partes también. Una es el 'conocimiento común del contenido' (*Common Content Knowledge* (CCK)), en el cual la palabra 'común' se refiere a un conocimiento matemático compartido con otros profesionales mientras que el otro, el denominado 'conocimiento especializado del contenido' (*Specialized Content Knowledge* (SCK)), sería aquel de quienes enseñan matemáticas. La tercera parte corresponde al conocimiento del contenido de horizonte (*Horizon Content Knowledge* (HCK)) el cual se refiere a la apreciación de cómo se relacionan unos tópicos matemáticos con otros. Al marco teórico de Ball y colaboradores se le conoce de forma abreviada como MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*), referido al conocimiento del contenido necesario para enseñar matemáticas.

De acuerdo con Depaepe, Verschaffel, y Kelchtermans (2013) los cambios antes mencionados, provocan que lo que era un constructo teórico quede convertido en uno empírico que condensa el conocimiento del contenido, o de la materia, y el conocimiento pedagógico del contenido. Para ellos el cambio tiene ventajas, el concepto MKT tiene tres méritos:

> Primero, el MKT es el resultado de la investigación empírica sobre el conocimiento que los profesores necesitan para la enseñanza de las matemáticas, y como tal proporciona fundamentos empíricos al PCK. En segundo lugar, [...] convierte el concepto de Shulman en un concepto operativo a través del desarrollo de una medida del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza, el cuestionario del MKT. Si bien este instrumento de evaluación incluye típicamente elementos para cuatro categorías del modelo (CCK, SCK, KCS, y KCT), se centra en particular en las categorías de conocimiento de contenidos comunes y especializados. Las preguntas se refieren a las tres áreas de contenido que se enseñan con mayor frecuencia: (1) conceptos numéricos, (2) operaciones y (3) patrones, funciones y álgebra [...]. En tercer lugar, el concepto MKT proporciona evidencia empírica para una relación positiva entre el PCK de los docentes y los resultados del aprendizaje de los alumnos (Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013, p. 14).

Existe un gran número de investigaciones que usan este marco teórico, ya sea siguiendo directamente a Shulman o las modificaciones establecidas por Ball y sus colaboradores, y sería infructuoso incluir todos los elementos relacionados con el conocimiento esencial para la enseñanza extraídos de esos estudios. Una alternativa es buscar coincidencias de lo que forma parte del PCK para obtener una idea de qué puede ser lo esencial en este constructo. Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans (2013) analizaron los significados dados al PCK en 60 artículos, elegidos de manera sistemática en las bases de datos más reconocidas a nivel mundial. Ellos encontraron que para casi todos los autores el PCK tiene que ver con los conocimientos de los profesores; la conexión entre el contenido y la pedagogía es específica de la enseñanza, y tiene como prerrequisito el concimiento del contenido. Respecto a los componentes del PCK ellos encuentran que todos los autores coinciden en que este tipo de conocimiento incluye el específico sobre las concepciones erróneas de los estudiantes y sobre estrategias de resolución de problemas y representaciones de los contenidos matemáticos. Por lo que las variables que aquí se han mencionado pueden considerarse conocimientos esenciales para un profesor de matemáticas.

Entre los programas de investigación que usan ideas relacionadas con el marco teórico de Ball y colaboradores para sustentar y diseñar la formación inicial de profesores se encuentra el uso del modelo teórico desarrollado en la Universidad de Huelva (ver Montes, Carrillo, Contreras, Liñan-García y Barrera-Castarnado, en un capítulo de este libro).

Con el estudio TEDS-M, comentado antes en este capítulo, se pretendió medir tanto el MCK, como el MPCK, el cual es el PCK específico para matemáticas y, aunque sus reactivos para medir estos conocimientos han sido criticados por diversos autores (ver por ejemplo Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014), las características consideradas para el diseño de estas preguntas posiblemente aportan elementos que pueden ser aceptados como esenciales para la enseñanza de las matemáticas, aunque éstos sean difíciles de medir. Respecto al MCK, TEDS-M considera tres dominios cognitivos para describirlo, éstos son: saber, aplicar y razonar. Para cada uno señalan algunas conductas que los ejemplifican, por ejemplo, un maestro que recuerda, reconoce, calcula o mide está actuando en el saber; cuando selecciona, modela, representa o resuelve problemas rutinarios está actuando en el aplicar y si deduce, generaliza, sintetiza, justifica y resuelve problemas no rutinarios está en el razonar y todas estas actividades describen conocimiento esencial englobado en el constructo MCK. Para el caso del MPCK las dimensiones que se reconocen son: el conocimiento del currículo de matemáticas, conocimiento para planear la enseñanza y el aprendizaje (diseño de lecciones y evaluaciones) y uso y aplicación de las matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje (explicar o representar conceptos matemáticos o procedimientos, generar buenas preguntas, diagnosticar las respuestas de los alumnos incluyendo las concepciones erróneas).

También en una tradición cognitiva, se estableció otro marco de referencia teórico para el conocimiento matemático del profesor, el Cuarteto del Conocimiento (*The Knowledge Quartet* (KQ)). Ese marco de referencia conceptual basado empíricamente surge de la investigación acerca del conocimiento matemático del contenido de futuros profesores de educación elemental, indagación inscrita en el proyecto SKIMA desarrollado por miembros de la Universidad de Cambridge. Petrou y Goulding (2011) afirman que «el proyecto se sustentó en el marco teórico de Shulman (1986) pero responde a Fennema y Franke (1992) porque categoriza situaciones del aula en las cuales el conocimiento matemático surge en la enseñanza» (pág. 18). Turner y Rowland (2011) afirman que el KQ

> ... proporciona un marco para el análisis del contenido matemático que conforma las percepciones del docente cuando éstas se reúnen todas juntas en la práctica, de modo que la distinción entre diferentes tipos de conocimiento matemático es de menor importancia que la clasificación de las situaciones en las que surge el conocimiento matemático en la enseñanza (pág. 196).

En esta afirmación de Turner y Rowland subyacen las diferencias entre su marco teórico y el elaborado por Ball y colaboradores, ponen foco en objetos de estudio distintos.

El acercamiento de los investigadores del grupo de la Universidad de Cambridge para estudiar la relación del conocimiento matemático de la materia (SMK) y PCK de futuros profesores fue observar y videograbar las clases de matemáticas que los estudiantes imparten en escuelas de educación elemental con la guía de un mentor de la propia escuela. Los alumnos hacen esta actividad durante la mitad del curso de posgrado con duración de un año, en el departamento de educación de una universidad de Inglaterra o Gales, para obtener un certificado de educación, requisito para dar clases en una escuela primaria. Después de observar en el aula al estudiante, el mentor proporciona una reflexión sobre su actuación en el salón de clase. En ocasiones el tutor universitario también participa en esas reuniones, empero afirman Turner y Rowland (2011) que «con frecuencia la revisión versa sobre la gestión y pocas veces se le presta atención al contenido matemático de las lecciones de esa materia» (pág. 196). Por ello los miembros del grupo se propusieron desarrollar un marco de referencia que permitiera enfocar la reflexión en el contenido matemático de la lección y el papel del conocimiento matemático de la materia (SMK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) de quien se está capacitando para ser maestro. Turner y Rowland (2011) afirman que:

> Si bien creemos que cierto tipo de conocimiento es deseable para la enseñanza elemental de matemáticas, estamos convencidos de la inutilidad de afirmar lo que un profesor principiante o uno más experimentado debería saber. Nuestro interés es lo que el maestro sabe y cree, y cómo se pueden identificar las oportunidades para mejorar el conocimiento. Hemos encontrado que el Cuarteto del Conocimiento, el marco que surgió de esta investigación, proporciona un medio para reflexionar sobre la enseñanza y el conocimiento del profesor, con miras a desarrollar ambos (pág. 197).

El KQ está formado por cuatro dimensiones: Fundamento, Transformación, Conexión y Contingencia; resumidas por Petrou y Goulding (2011, pág. 18) de la manera siguiente:

> (Fundamento) consiste en el conocimiento de los alumnos, las creencias y la comprensión adquiridos en la academia, en preparación para su papel en el aula. Dichos conocimientos y creencias conforman las elecciones y estrategias pedagógicas de una manera fundamental [...] la segunda categoría (Transformación) se refiere al conocimiento en acción, como se demuestra tanto en la planificación para enseñar, como en el acto de enseñar en sí mismo [...] Conexión une ciertas elecciones y decisiones que se toman para las partes más o menos discretas del contenido matemático [...] Contingencia se refiere a eventos en el aula que son casi imposibles de planificar (Rowland et al., 2003, págs. 97-98).

Este marco de referencia puede usarse como herramienta para clasificar las formas en las cuales los conocimientos de la materia y pedagógico del contenido entran en juego en el salón de clase. El KQ se aplica para sustentar el desarrollo de la enseñanza en carreras iniciales de profesores en Inglaterra y para estructurar la formación inicial de profesores en Irlanda. Para el desarrollo de su tesis de doctorado, Petrou usó este marco teórico con el objeto de comprender qué relación podía observarse entre el conocimiento matemático de futuros profesores de Chipre y su enseñanza. Ella argumenta que en términos generales el KQ sirvió al clasificar el conocimiento de los estudiantes en las situaciones de enseñanza en las cuales los conocimientos matemáticos de los futuros docentes emergen (Petrou, 2009, citado en Petrou y Goulding, 2011, pág. 19).

Aun cuando en el KQ no se consideraron aspectos relacionados con la interpretación y el uso de libros de texto, sí fueron importantes en el análisis de las lecciones de matemáticas que se enseñan en las aulas chipriotas. Petrou y Goulding (2011) sugieren que al adaptar el KQ es importante tener cuidado con las diferencias entre el contexto en el cual el marco se construyó y en el que se quiere aplicar. Petrou (2009, citado en Petrou y Goulding, 2011, pág. 19) argumenta que quizá los libros de texto son menos visibles en Inglaterra de lo que son en Chipre, pero también podría ser que debido a que el estudio original se centró en PCK y MCK y no en el conocimiento del curriculum este aspecto del conocimiento del profesor se echa en falta en el KQ, ya que el conocimiento del curriculum es importante en cualquier intento por comprender qué necesitan saber los profesores para poder enseñar matemáticas eficientemente.

Los constructos MCK, PCK y sus derivados son producto de una manera de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero existen otras. Las perspectivas socio-culturales se enfocan en aspectos que parecen muy diferentes a los que hasta ahora se han mencionado.

> Los enfoques discursivos de investigación en educación matemática se describen como «participacionistas» y están típicamente yuxtapuestos a aquellos etiquetados como «adquisicionistas» (Kieran, Forman, & Sfard, 2002) que, a menudo, han sido cuestionados en los terrenos metodológicos y epistemológicos (Sriraman y Nardi, 2013): los métodos clínico-experimentales pueden estar alejados de donde se produce el aprendizaje; y, el aprendizaje no es invariante del contexto universal. Como Kieran et al. (2002) notan, las perspectivas discursivas apuntan a unir dimensiones individuales y sociales del aprendizaje, propugnan el principio socio-cultural de que el aprendizaje ocurre en, y es co-constituido por el medio situacional, cultural e histórico, y enfatizan el pensamiento humano como un tipo de comunicación (Gagatsis & Nardi, 2016, pág. 187).

Una de las teorías discursivas más influyentes es la teoría de la comognición de Sfard (explicada y usada por Gavilán-Izquierdo, Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Fernández-León, ver capítulo en este libro). Esta teoría considera a las matemáticas como un discurso y distingue cuatro elementos que lo caracterizan como discurso matemático: Uso de palabras, mediadores visuales, narrativas (que describen objetos, procesos y relaciones entre ellos, por ejemplo, las definiciones y los teoremas) y rutinas (modo de justificar, modo de multiplicar, patrones de comportamiento). Sfard considera que la comunicación humana está regulada por reglas y que esas reglas son a nivel objeto (narrativas que informan sobre el comportamiento regular de los objetos del discurso) y meta reglas, esto es, «patrones de comportamiento que se observan en la actividad de los participantes del discurso cuando estos tratan de producir, corroborar o justificar narrativas a nivel objeto» (ver Gavilán et al, capítulo en este libro).

Por otro lado, con esta teoría el aprendizaje se manifiesta como un cambio de discurso, el cual se divide en dos tipos: aprendizaje a nivel objeto y aprendizaje a nivel meta (cuando se produce un cambio en las meta reglas del discurso). Estas diferencias llevan a pensar que desde esta perspectiva los conocimientos esenciales para enseñar matemáticas no serían los que ya se han mencionado, sino que se centrarían en aquellos indicadores de los cambios de discurso, las maneras en que éstos se estructuran y las habilidades o competencias necesarias para promover esos cambios.

¿QUIÉN PRODUCE CONOCIMIENTO ACERCA DE LA ENSEÑANZA?

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, esta pregunta tiene como propósito distinguir el conocimiento producido por medio de la investigación llevada a cabo en las universidades y aquella hecha por el profesor. En las secciones anteriores todas las líneas descritas se han enfocado en el primer tipo, en esta parte la descripción se centrará sobre la investigación del profesor resaltando su papel como un productor de conocimiento. Dos modalidades se distinguen, una en la cual el profesor produce el conocimiento a partir de su experiencia y la reflexión sobre su práctica, y otra en la que el profesor produce conocimiento junto con otros colegas e investigadores.

Cochran-Smith y Lytle (1993), habiendo sido tanto profesoras como investigadoras, se niegan a privilegiar un papel sobre el otro, y delimitan su postura de la siguiente manera (posición 145-161):

> ... hemos tratado de cuestionar la suposición común de que el conocimiento para la enseñanza debe ser principalmente «de afuera hacia adentro», generado en la universidad y luego utilizado en las escuelas, una posición que sugiere que la transmisión se hace sin problemas desde una fuente a un destino. En contraste, ... [nuestra postura] se basa en la noción de que el conocimiento para la enseñanza es «de dentro hacia afuera», una yuxtaposición destinada a enfocar la atención en los maestros como conocedores y en las complejas relaciones, claramente no lineales, entre conocimiento y enseñanza, en tanto están inmersos en los contextos y las relaciones de poder que estructuran el trabajo diario de profesores y alumnos tanto en la escuela, como en la universidad.

Las maestras/investigadoras definen la investigación del profesor como «una indagación sistemática e intencional hecha en su propia escuela y sobre su propio trabajo educativo» (posición 384). Sistemática en relación a las formas de recoger y almacenar información, de documentar las experiencias dentro y fuera del aula, de hacer registros escritos de situaciones. Intencionada ya que es planificada, más que espontánea. Broomer (1987 citado por Cochram-Smith y Lytle) afirma que «aprender deliberadamente es investigar», y por ello el carácter de intencional en la investigación del profesor; ésta se puede considerar como un ejemplar de la investigación acción, la cual se caracteriza como una «indagación sistemática de la propia práctica con el objeto de aprender sobre ella y hacer cambios para sustentar el aprendizaje de los estudiantes» (Herbel-Eisenmann, 2009, citado en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013, pág. 382).

Un programa de investigación de profesores en el contexto de la educación matemática es el conocido como «Estudio de lecciones» (*Lesson study*) diseñado e implementado por profesores japoneses para profesores japoneses. Fernández y Yoshida (2004, citados en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013, pág. 375) dicen que sus orígenes se pueden ubicar alrededor de 1900. En la década de los 60's los profesores empezaron a combinar el estudio de lecciones con un desarrollo profesional basado-en-la-escuela para profesores en activo. Una década más tarde el gobierno reconoció el valor de este tipo de actividades y lo apoyó financieramente. El estudio de lecciones se ha convertido por mucho en el programa de desarrollo profesional más común en Japón.

Kieren, Krainer y Shaughnessy (2013) dicen que después de elegir la lección a estudiar en una escuela, el programa se conforma de 6 etapas: (1) planear colectivamente una lección, (2) observar la lección en acción, (3) discusión sobre la lección, (4) corregir la lección (opcional), (5) enseñar la nueva versión de la lección (opcional), y (6) compartir reflexiones acerca de la nueva versión de la lección. A veces se hacen invitaciones a asesores externos, sus recomendaciones y observaciones son altamente valoradas. Pueden hacerse clases abiertas para la puesta en marcha de una lección y en ocasiones se hacen informes sobre un proceso de estudio de una lección. Hay profesores que participan en varios grupos de estudio de lecciones en otras instituciones diferentes a su escuela.

Ciertas características se consideran factores clave y al mismo tiempo factores de éxito. Murata (2011, citado en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013) identificó 5 de estos factores. El estudio de lecciones está centrado en los intereses de los profesores, se enfoca en los estudiantes, se hace la investigación de lecciones, es un proceso reflexivo y colaborativo. Fernández y Yoshida (2004, citado en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013) mencionan otros elementos clave. Afirman que el estudio de lecciones tiene sus raíces en movimientos sólidos (por ejemplo, en un aprendizaje centrado en los estudiantes o bien en la resolución de problemas), considera a la enseñanza como una tarea compleja y una empresa profunda y es parte de la cultura del desarrollo profesional basado en la escuela, una manera de involucrar a los profesores principiantes en actividades académicas serias y una forma de superarse a uno mismo viendo a otros. Alrededor de todo este programa autónomo se advierte un reconocimiento y una confianza en los profesores.

Como ya se mencionó, una de las recomendaciones del TEDS-M es que se utilice el estudio de lecciones como una forma de mejorar el conocimiento matemático de los profesores. Con los logros que este programa ha tenido en Japón, hay muchos intentos de exportar la experiencia a otros países, sin considerar que las características culturales son diferentes y que la decisión de transportar el programa se hace a través de investigadores universitarios y no por iniciativa de los profesores en su escuela para reflexionar sobre su práctica y de ese modo generar un conocimiento práctico que redunde en la mejora de la enseñanza en sus comunidades y su entorno.

La segunda modalidad de la línea sobre el profesor como productor de conocimiento es aquella en la cual el profesor participa en las investigaciones coordinadas por investigadores universitarios. En ocasiones estos estudios se originan a petición de un grupo de profesores para solicitar apoyo con la intención de prepararse mejor para enfrentar alguna problemática; ese es el caso de uno de los ejemplos que incluyen Kieran, Krainer y Shaughnessy (2013). Un grupo de maestras se pusieron en contacto con investigadores de la Universidad de Québec debido a que tenían dificultades para conceptualizar una manera por medio de la cual implementar una reforma educativa sustentada en el uso del acercamiento de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas en sus clases (ver Bednarz, 2004, citado en Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013). Ellas no sabían cómo estructurar una enseñanza de ese tipo para niños pequeños. El proyecto se constituyó para un año en el que ambos, profesores e investigadores se acompañaron para diseñar las tareas que se ponían a prueba en el salón de clase y en la reflexión para valorar el impacto de la actividad matemática promovida por ese tipo de enseñanza. Al final de tres años los miembros del grupo dan cuenta, además del conocimiento adquirido, de productos de varios tipos, entre ellos publicaciones tanto para alumnos, como para profesores e investigadores y concluyen que incorporar a los maestros al equipo de investigación es redituable para la eficiencia de la enseñanza.

Huillet (2007) hace una revisión de informes de investigación en los cuales los profesores eligen indagar asuntos pedagógicos o algún problema del aprendizaje de los estudiantes. Ella afirma que «al parecer cuando se les pide que escojan un tópico, los profesores cuestionan su propia práctica o las dificultades que enfrentan sus estudiantes o bien su desempeño, pero parecen no considerar el contenido que usualmente es enseñado dentro de la institución» (pág. 76). Por esa razón, Huillet lleva a cabo una investigación centrada en las matemáticas para enseñar límites de una función. El proyecto se basa, por un lado, en el estudio de la relación institucional, en el sentido de Chevallard, de la educación secundaria en Mozambique, con ese concepto, y por el otro, en el estudio del conocimiento matemático que permite al profesor extender esta relación institucional. El estudio de Huillet puso en evidencia que el conocimiento matemático de los profesores no podía darse por sentado. Para aquellos aspectos de matemáticas para enseñar que requerían una comprensión profunda de algunos conceptos de matemáticas básicos la evolución del conocimiento de los profesores a través del desarrollo del proyecto resultó ser limitada. El proceso de investigación fue un reto para el profesor con más experiencia, ya que el estudio que llevó a cabo desafió su propia práctica. Huillet (págs. 78-79) sugiere que los profesores se involucren:

> ... en indagaciones en las cuales el foco sea las matemáticas para enseñar, basada en aspectos matemáticos y pedagógicos. De esa forma producirían conocimiento que les ayudaría a desarrollar su propia relación con las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. No afirmo que necesariamente enseñen de manera diferente, ya que quizá se enfrenten con las restricciones institucionales, pero su relación personal con las matemáticas les permitirá enseñar de diferente manera.

UN COMENTARIO FINAL

Caracterizar el conocimiento matemático del profesor para enseñar o aquel que entra en juego al enseñar, así como la relación que ese conocimiento tiene con lo que los estudiantes aprenden ha sido una temática de interés en cuya comprensión y diseño de soluciones se ha comprometido un gran número de investigadores y profesores de la comunidad internacional. La literatura que da cuenta de ello es extensa. Pero pareciera que todavía hay mucho que hacer a nivel local. En el recorrido que se ha hecho para comprender mejor la complejidad de la enseñanza de las matemáticas se ha utilizado una diversidad de métodos, tales como: investigación proceso-producto, investigación interpretativa, estudios de caso, investigación participativa, investigación-acción, indagación narrativa. Se han construido también instrumentos para recolectar información, entre estos se encuentran cuestionarios, videos, diarios de clase, mapas conceptuales, narrativas y ensayos. Esas herramientas se usan actualmente para mejorar los programas de formación de profesores y las prácticas de los futuros maestros. Los marcos teóricos para investigar esta temática se han ido refinando y probando en diferentes contextos y países y los programas de formación de unos países se han adaptado o implementado en otros sistemas educativos. Estas adopciones no siempre han sido exitosas, por ello es necesario seguir poniendo a prueba propuestas con la intención de que los profesores sigan comprometidos en crear comprensión en las mentes de los estudiantes a través de representaciones accesibles de las complejas ideas matemáticas.

REFERENCIAS

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-408.

Black, A. y Halliwell, G. (2000). Assessing Practical Knowledge: How?, Why?. *Teaching and Teacher Education, 16*(1), 103-115.

Burghes, D. (2011). *International Comparative Study in Mathematics Teacher Training*. Reading, Berkshire: CfBT. Obtenido de https://www.educationdevelopmenttrust.com/en-GB/our-research/our-research-library/2011/r-international-comparative-study-in-mathematics-teacher-training-2011.

Clandinin, D. J. (1985) Personal Practical Knowledge: A Study of Teachers' Classroom Images. *Curriculum Inquiry, 15*, 361-385.

Clarke, D. (2003). *The Problematics of International Lesson Structure Comparisons*. Padova, Italia: European Association for Research on Learning and Instruction. Obtenido de http://www.lps.iccr.edu.au/index.php/publications.

Cochran-Smith, M. y Lytle, S. L. (1993). *Inside/Outside: Teacher Research and Knowledge*. NY: Teachers College Press (ebook).

da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 461-494). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Depaepe, F., Verschaffel, L. y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical Content Knowledge: A Systematic Review of the Way in. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12-25.

Elbaz, F. (1981). The Teachers' «Practical Knowledge»: Report of a Case Study. *Curriculum Inquiry, 11*(1), 43-71.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: The National Council of Teachers of Mathematics.

Fenstermacher, G. D. (1994): The Knower and the Known: The Nature of Knowledge in Research on Teaching. *Review of Research on Teaching, 20*, 1-54.

Gagatsis, A. y Nardi, E. (2016). Developmental, Sociocultural, Semiotic, and Affect Approaches to the Study of Concepts and Conceptual Development. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 187-234). Rotterdam: Sense.

Gellert, U., Becerra Hernández, R. y Chapman, O. (2013). Research Methods in Mathematics Teacher Education. En K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 327-360). NY: Springer.

Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Futuro Profesor. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.

Goffree, F. y Oonk, W. (2001). Digitalizing Real Teaching Practice for Teachers' Education Programmes: The MILE Approach. En F.-L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 111-145). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Huillet, D. (2007). Teachers as Researchers: Putting Mathematics at the Core. En W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik y S. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the IGPME*, Vol. 3, (pp. 73-80). República de Korea: The Korean Society of Educational Studies in Mathematics.

Kieran, C., Krainer, K. y Shaughnessy, M. J. (2013). Linking Research to Practice: Teachers as Key Stakeholders in Mathematics Education Research. En M.A. Clement (Ken), A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 361-392). NY: Spinger Science+Business Media.

Lin, F.-L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and In-service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continue*s (pp. 483-513). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

McDonough, A. y Clarke, D. (2003). Describing the Practice of Effective Teachers of Mathematics in the Early Years. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 261-268). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Miao, Z. (2015). *The Effectiveness of Mathematics Teaching, A Cross-National Investigation in Primary Schools in England and China*. Tesis para obtener el grado de Ph. D., Southampton Univesity, Faculty of Social and Human Sciences Southampton Educational School, Southampton.

Murillo, F. J. (2008). Hacia un Modelo de Eficacia Escolar. Estudio Multinivel sobre los Factores de Eficacia en las Escuelas Españolas. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 6*(1), 4-28.

Oonk, W. (2009). *Theory-Enriched Practical Knowledge*. Tesis de doctorado. Leiden University. Recuperado de https://openaccess.leidenuniv.nl/handle/1887/13866.

Petrou, M. y Goulding, M. (2011). Conceptualizing Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). NY: Springer Science+Bussiness Media B. V.

Scheerens, J. y Creemers, B. P. M. (1996). School Effectiveness in the Netherlands: The Modest Influence of a Research Programme. *School Effectiveness and School Improvement*, *7*(2), 181-195.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner. How Professionals Think in Action*. Avebury: Aldershot Hants.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tatto, M. (Ed). (2013). *The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Technical Report*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Turner, F. y Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an Organizing Framework. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). NY: Springer Science+Bussiness Media B. V.

APRENDIZAJE DEL PROFESOR: DESARROLLO DE COMPETENCIAS

TEACHERS' LEARNING: DEVELOPMENT OF COMPETENCES

Fernández, C.
Universidad de Alicante

Los aspectos relacionados con el aprendizaje del profesor de matemáticas siempre han tenido un papel central en la investigación en educación matemática. Un indicador es el creciente número de artículos centrados en el aprendizaje del profesor en revistas indexadas como el *Journal of Mathematics Teacher Education* (Ponte, 2011), los espacios de discusión centrados en el profesor creados en los grupos de trabajo del CERME, del PME (Lin y Rowland, 2016) y del ICME, y secciones especificas en la edición de monográficos temáticos (Even y Ball, 2009; Wood, 2008). Recientemente, el interés de los investigadores se está centrando en comprender el desarrollo de competencias asumiendo que aprender a ser profesor de matemáticas requiere del desarrollo de competencias profesionales (Schack, Fisher y Wilhelm, 2017). Con este nuevo foco se plantean preguntas como ¿cuáles son las competencias profesionales que debe desarrollar el profesor/maestro de matemáticas? ¿cómo las desarrolla? ¿qué características debe tener la enseñanza en los programas de formación para que el futuro maestro/profesor desarrolle estas competencias?

Esta sección presenta cuatro capítulos que abordan el desarrollo de diferentes competencias que debe adquirir un futuro profesor/maestro de matemáticas: la

Fernández C. (2019). Aprendizaje del profesor: Desarrollo de competencias. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 215-217). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, la competencia digital, la competencia de análisis ontosemiótico y la competencia para promover un aprendizaje funcional en el aula. Además, el último capítulo presenta una panorámica internacional sobre la noción de competencia exponiendo algunos de los acercamientos vigentes en la formación de profesores. Los diferentes capítulos abordan tanto la formación inicial de maestros de infantil (capítulo 1) y secundaria (capítulos 2 y 4) como la formación continua (capítulo 3), y caracterizan el desarrollo de las competencias a través de diferentes instrumentos de análisis como la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje (génesis instrumental), el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) o el análisis de contenido. Se subraya como aporte de los capítulos de esta sección la caracterización de niveles de desarrollo de las competencias (o cambios) al describir procesos cognitivos que favorecen su adquisición y desarrollo.

El primer capítulo aborda el uso que los estudiantes para maestro de educación infantil hacen de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual en tareas profesionales de análisis de situaciones de aula y de planificación de tareas. Un aporte interesante es el uso de la génesis instrumental para identificar y caracterizar diferentes niveles de instrumentación de la trayectoria de aprendizaje por parte de los estudiantes para maestro. La caracterización del proceso de instrumentación supone un avance en los estudios sobre la competencia mirar profesionalmente ya que permite describir cómo los estudiantes para maestro de educación infantil construyen procesos cognitivos que favorecen el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as.

El segundo capítulo describe y analiza una experiencia formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria dirigida a desarrollar la competencia de reconocer las prácticas matemáticas, y los objetos y procesos implicados al resolver tareas matemáticas. El análisis de las respuestas de los futuros profesores a tareas de proporcionalidad se lleva a cabo usando herramientas teóricas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas, basado en el enfoque ontosemiótico (EOS). Una de las aportaciones de este estudio es que el reconocimiento de las prácticas, objetos y procesos por parte de los futuros profesores no es fácil sugiriendo la necesidad de profundizar en el diseño y análisis de nuevas experiencias formativas.

El tercer capítulo se enmarca en la reciente reforma curricular en matemáticas en Costa Rica. Esta reforma propone la aplicación de un modelo de currículo que persigue el logro y el fortalecimiento de una serie de habilidades para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. En particular, se analiza la competencia profesional de profesores de matemáticas de Educación Secundaria para promover un aprendizaje funcional en el aula, después de haber participado en una propuesta formativa con base en esa reforma. En este capítulo se presenta el diseño del programa de formación continua para profesores en ejercicio y sus fundamentos y los primeros resultados sobre el impacto de esa formación.

En el cuarto capítulo se estudia y caracteriza el nivel de competencia digital de un grupo de futuros profesores de matemáticas de Secundaria. Para ello, se lleva a cabo un análisis de la reflexión sobre su propia práctica a través de una rúbrica de evaluación basada en categorías del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. A partir del análisis de la reflexión se confirma un conjunto de indicadores asociados a seis categorías: lo epistémico, cognitivo, interaccional, afectivo, ecológico y de análisis didáctico. Además, se presentan evidencias de niveles de desarrollo para cada una de las dimensiones propuestas que ilustran la dificultad que tienen los futuros profesores en desarrollar los diferentes usos de las herramientas digitales en el aula de matemáticas.

Finalmente, en el quinto capítulo, se presenta una amplia panorámica de la noción de competencia matemática y de la competencia docente para la enseñanza de las matemáticas. Se exponen en profundidad tres acercamientos vigentes en la práctica e investigación de formación de profesores de matemáticas: el enfoque centrado en la resolución de problemas, el orientado al desarrollo de la competencia mirar profesionalmente y el enfoque de análisis ontosemiótico. El capítulo finaliza con algunas reflexiones en torno a las posibilidades de que los avances teóricos se conviertan en mejoras de la práctica.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el marco colaborativo de los Proyectos EDU2016-81994-REDT y EDU2017-87411-R, MINECO-España.

REFERENCIAS

Even, R. y Ball, D. (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study.* London: Springer.

Lin, F-L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En A. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413-417.

Schack, E. O., Fisher, M. H. y Wilhelm, J. A. (2017). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks.* Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.

Wood, T, (Ed.) (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education.* Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

LA MIRADA PROFESIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE INFANTIL EN SITUACIONES DE AULA Y PLANIFICACIÓN DE TAREAS DE APRENDIZAJE

PROFESSIONAL NOTICING OF PROSPECTIVE KINDERGARTEN TEACHERS IN CLASS SITUATIONS AND PLANNING LEARNING TASKS

Sánchez-Matamoros, G.[1], Valls, J.[2], Moreno, M.[2] y Pérez-Tyteca, P.[2]

[1]*Universidad de Sevilla,* [2]*Universidad de Alicante*

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es caracterizar el uso que los estudiantes para maestro hacen de una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual, en tareas profesionales de análisis de situaciones de aula y de planificación de tareas de aprendizaje, para la adquisición de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños. Los datos proceden de las respuestas de los estudiantes para maestro a dichas tareas profesionales. Los resultados muestran la dificultad de los estudiantes para maestro para usar la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual en ambos tipos de tareas profesionales, mostrando más limitaciones en las de planificación de tareas. El enfoque instrumental ha permitido identificar maneras diferentes en la que los estudiantes para maestro adquieren la competencia mirar profesionalmente.

Palabras clave: *mirada profesional, trayectoria de aprendizaje, instrumento conceptual, magnitud longitud y su medida, estudiantes para maestro/a de infantil.*

Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., Moreno, M. y Pérez-Tyteca, P. (2019). La mirada profesional de los estudiantes para maestro de infantil en situaciones de aula y planificación de tareas de aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 219-239). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The aim of this research is to characterise the way that prospective kindergarten teachers use a learning trajectory of length magnitude and its measurement as a conceptual instrument, while solving professional tasks like analysis of class situations and planning learning tasks to develop professional noticing. Data come from prospective kindergarten teachers' answers to the professional tasks. Results show prospective kindergarten teachers' difficulty in using the learning trajectory as a conceptual instrument in both professional tasks. They show more difficulties with professional tasks related to planning and designing learning tasks. The instrumental genesis has let to identify ways in which prospective kindergarten teachers acquire the skill of professional noticing.

Keywords: *noticing, learning trajectory, conceptual instrument, magnitude and its measurement, prospective kindergarten teachers.*

INTRODUCCIÓN

Actualmente son diversas las investigaciones centradas en la formación de los maestros o profesores de matemáticas y de su desarrollo profesional. Todas ellas intentan favorecer la reflexión del profesor sobre su práctica docente, a nivel individual o interactuando con otros docentes. Estas investigaciones, se han desarrollado a partir de diferentes modelos teóricos como el del Conocimiento y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) que plantean Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), la Lesson Study (Fernandez y Yoshida, 2004) y Mirar Profesionalmente (Mason, 2002).

Este trabajo se apoya en el modelo teórico Mirar Profesionalmente operativizado por Jacobs, Lamb y Philipp (2010) que caracterizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes mediante tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar los elementos relevantes en las respuestas de los estudiantes; (b) interpretar la comprensión de los estudiantes y (c) tomar decisiones sobre las acciones a desarrollar en la clase. Los trabajos de Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson (2017) sobre el desarrollo de la mirada profesional concluyen acerca de la bondad del uso de trayectorias de aprendizaje como guías que apoyan a los profesores. Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) indican que una trayectoria de aprendizaje, en el sentido de Clements y Sarama (2004), ayuda a los profesores a tomar decisiones instruccionales por lo que se transforman en una herramienta útil para que los futuros profesores se inicien en la adquisición y desarrollo de la mirada profesional.

Diversas investigaciones, tanto en el ámbito nacional como internacional, han utilizado trayectorias de aprendizaje para favorecer el desarrollo de una mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos. Por ejemplo, Ivars, Fernández, Llinares y Choy (2018) para el significado de fracción como parte-todo; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) para la derivada; Schack et al. (2013) para el estudio de la aritmética temprana; Wilson, Mojica, y Confrey (2013) para las nociones de equipartición, entre otros. Sin embargo, son escasas las investigaciones realizadas en el nivel de educación infantil, por lo que consideramos necesario profundizar en este ámbito. En general, todos estos estudios han mostrado el potencial que tienen las trayectorias de aprendizaje, en los programas de formación de maestros, para desarrollar las tres destrezas de la mirada profesional en diferentes situaciones de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

La mayoría de los trabajos sobre el desarrollo profesional, tanto si se apoyan en el uso de trayectorias de aprendizaje como si no, ponen su atención en identificar características de los estudiantes para maestro o profesor de algunas de las destrezas que caracterizan la competencia mirar profesionalmente. Sin embargo, en nuestros últimos trabajos (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo, 2018), profundizamos en el proceso de adquisición y desarrollo de las destrezas, proporcionando información sobre la mejora del diseño de los módulos de enseñanza en los programas formativos (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018).

Asimismo, hemos realizado otros trabajos (Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo, Pérez-Tyteca y Valls, 2017; Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018; Sánchez-Matamoros, Moreno, Valls y Callejo, 2018) que ponen el foco de atención en el uso que los estudiantes para maestro hacen de la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños, usando una adaptación del modelo de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

En este trabajo, usamos dicha adaptación del modelo de la génesis instrumental para examinar cómo estudiantes para maestro de educación infantil miran profesionalmente el pensamiento matemático de los niños de 3-6 años en dos tipos de tareas profesionales diferentes: interpretar situaciones de aula y planificar tareas de aprendizaje, apoyándose en una trayectoria de aprendizaje. Esta trayectoria es entendida, inicialmente, como un artefacto susceptible de transformarse en instrumento conceptual a partir de la construcción de diferentes esquemas, tanto de uso como de acción, los cuales informan de los procesos que realizan los estudiantes para maestro durante el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos.

Por tanto, el objetivo de esta investigación es caracterizar el uso que los estudiantes para maestro hacen de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, en tareas profesionales que requieren del análisis de situaciones de aula y de la planificación de tareas de aula, para la adquisición de la competencia docente «mirar profesionalmente» el pensamiento matemático de los niños.

MARCO TEÓRICO

En el programa de formación de maestros de infantil se ha proporcionado una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida adaptada de la de Sarama y Clements (2009). Este concepto matemático está presente cuando los niños aprenden a apreciar algunas cualidades de los objetos al relacionarse con su entorno (largo-corto, alto-bajo, lleno-vacío, etc.), a realizar comparaciones (tan largo como…, más alto que…, menos grueso que…, etc.), o a resolver situaciones relacionadas con alguna magnitud y su medida. En el actual currículum de educación infantil de la Comunidad Valenciana (Decreto 38/2008) se contempla la iniciación al aprendizaje de la magnitud longitud, entendida como reconocimiento de propiedades de un objeto, como un aprendizaje progresivo, intuitivo y experimental.

Para caracterizar el uso de la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual adaptamos la perspectiva de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010; Verillon y Rabardel, 1995), cuyo enfoque se basa en las ideas de Vygotsky (1985). La perspectiva de la génesis instrumental diferencia entre artefacto e instrumento. En este caso, la trayectoria de aprendizaje, información que debe ser aprendida para realizar las tareas profesionales, es el artefacto que puede convertirse en instrumento cuando el estudiante para maestro la use de manera significativa para analizar las tareas profesionales. Es decir, cuando el estudiante para maestro integra la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje con la actividad que está realizando. Esta adaptación del modelo teórico de génesis instrumental a investigaciones sobre adquisición y desarrollo de la mirada profesional ya ha sido discutida en investigaciones recientes (Sánchez-Matamoros et al., 2017; Sánchez-Matamoros et al., 2018).

El proceso por el que la información de una trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento se llama génesis instrumental, y consiste en la formación de esquemas instrumentales (de uso o de acción instrumental) entendidos como formas estables de realizar las tareas (Trouche, 2004). La utilización de un artefacto por parte del sujeto permite la realización de una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización, de ahí que los estudiantes pueden usar un artefacto de manera diferente y desarrollar diferentes esquemas de uso y de acción instrumental (Rabardel, 1995). Los esquemas de uso son esquemas elementales básicos, directamente relacionados con el artefacto (Drijvers y Trouche, 2008), que pueden servir como bloques de construcción para esquemas de orden superior, los esquemas de acción instrumental. Los esquemas de acción instrumental, propios del proceso de instrumentación, permiten al estudiante para maestro entender las potencialidades y restricciones de la información dada por la trayectoria de aprendizaje y se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva para resolver las tareas profesionales propuestas. La coordinación de los esquemas de acción instrumental permite al estudiante para maestro usar toda la información de la trayectoria de aprendizaje (objetivos, modelo de progresión en el desarrollo de la comprensión y tipos de tareas) para mirar profesionalmente las tareas profesionales propuestas.

En esta investigación consideramos que la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en niños de 3 a 6 años es un artefacto cuando los estudiantes para maestro no realizan ningún proceso cognitivo, y podría convertirse en instrumento conceptual cuando el estudiante para maestro la usara para razonar sobre las tareas profesionales, es decir, construyera diferentes esquemas de uso y de acción instrumental.

De todo lo expuesto anteriormente, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación en este trabajo:

- ¿Cómo usan los estudiantes para maestro una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños en las tareas profesionales propuestas?
- ¿Permite el enfoque de la génesis instrumental describir los procesos cognitivos que los estudiantes para maestro construyen para adquirir la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños?

MÉTODO

Los participantes en esta investigación fueron 23 estudiantes para maestro de educación infantil (EPM) matriculados en la asignatura Aprendizaje de la Geometría, que se implementa en el sexto cuatrimestre del Grado en Maestro en Educación Infantil de la Universidad de Alicante.

En esta asignatura se desarrolló un módulo de enseñanza sobre la longitud y su medida en Educación Infantil. Este módulo constaba de cinco sesiones de 100 minutos. En el módulo de formación se propusieron diferentes tareas profesionales, unas sobre situaciones de aula (registros de la práctica en forma de videos y/o de interacción entre alumnos y maestra) y otras sobre planificación de tareas de aprendizaje. Todas las tareas profesionales se discutieron en gran grupo en las sesiones correspondientes.

Para realizar las tareas profesionales los EPM disponían de la trayectoria de aprendizaje (TA) de la magnitud longitud y su medida como guía para identificar los elementos matemáticos, interpretar/anticipar la comprensión de los alumnos y proponer nuevas tareas para progresar en su aprendizaje. La TA consta de un objetivo de aprendizaje, un modelo de progresión de la comprensión de la longitud y su medida (Tabla 1), y tipos de tareas instruccionales para ayudar a progresar a los niños en su comprensión. Los elementos matemáticos, claves en la adquisición de la magnitud longitud y su medida, son: reconocimiento de la magnitud longitud, conservación y transitividad de la magnitud, unidad de medida, unicidad de la unidad de medida, iteración, acumulación, relación entre el número de iteraciones de la unidad de medida y el tamaño de esta.

Tabla 1. Un modelo de progresión del aprendizaje de la longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la magnitud longitud: • Identifican las cualidades de la magnitud longitud. • Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: • Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: • Comparaciones indirectas. • Ordenaciones de objetos. • Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida: • Realizan iteraciones de la unidad de medida. • Reconocen la propiedad de acumulación.
5	Reconocen la universalidad de la unidad de medida. Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones.

Instrumento de recogida de datos

Previo a la implementación del módulo de enseñanza, se diseñó el instrumento de recogida de datos formado por tres tareas profesionales, dos de ellas hacen referencia a las funciones docentes que ha de realizar un maestro en una situación de aula, es decir, interpretar la comprensión de los niños/as, en este caso, sobre la magnitud longitud y su medida, y la toma de decisiones, a partir de la interpretación realizada, para que los niños/as progresen en el aprendizaje (Tabla 2). La otra se corresponde con la planificación de una tarea de aprendizaje, es decir, el EPM debía seleccionar una tarea, identificar y establecer el objetivo coherente con la misma, anticipar posibles respuestas de los niños/as y tomar decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de estos (Tabla 3). De este modo, estas tareas profesionales sirven para trabajar los contenidos del programa formativo de los estudiantes para maestro y para recoger los datos necesarios para esta investigación.

Tabla 2. Descripción de las tareas profesionales de análisis de situaciones de aula

Tarea	Descripción de la situación de aula	Elementos matemáticos
Magnitud	Está compuesta por 4 viñetas extraídas del vídeo Van den Heuvel-Panhuizen y Buys (2005). En la Viñeta 1, la maestra propone a los niños recortar una tira de papel tan larga como ellos. En la Viñeta 2, los niños hacen diversos ensayos (de pie, en el suelo, de pie, pero apoyados en un armario…) para hacer una señal en la tira para que quede exactamente de su altura. En las viñetas 3 y 4, decoran las tiras y las comparan de dos en dos y, posteriormente, la maestra las ordena.	Reconocimiento (Viñeta 1) Conservación (Viñeta 2)
Medida	A través de 5 viñetas, adaptadas de Alsina (2011), se muestra una salida de los niños, en dos equipos, a un parque para medir el contorno del árbol seleccionado por cada equipo, a partir del trozo de cuerda proporcionado. El equipo A seleccionó un árbol de tronco delgado que midió con el trozo de cuerda (Viñeta 1), mientras que el árbol elegido por el equipo B, al ser grueso, no pudo ser medido con el trozo de cuerda (Viñeta 2). Ante tal hecho, los niños de ambos equipos decidieron rodear cada árbol con sus brazos (equipo A: una niña, equipo B: cuatro niños) (Viñetas 3 y 4, respectivamente). La maestra pregunta qué pasaría si cambiasen dos de los cuatro niños por otros dos (Viñeta 5).	Elección de una unidad de medida (Viñeta 1 y 2) Unicidad (Viñeta 3 y 4) Iteración y acumulación (Viñeta 4) Relación entre el número y la unidad de medida (Viñeta 5)

Para facilitar que los EPM analizaran de manera estructurada las situaciones de enseñanza se les plantearon las siguientes cuestiones:

- Cuestión 1. Justifica las **características de la comprensión** de los niños puestas de manifiesto en cada una de las viñetas indicando los **elementos matemáticos** que están implícitos.

- Cuestión 2. Según las características de la comprensión de los niños identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** los situarías? Justifica tu respuesta.
- Cuestión 3. Suponiendo que eres la maestra de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje y** propón **una tarea** para que los niños sigan **avanzando** en la comprensión de la magnitud longitud y su medida.

Una vez realizadas y analizadas las tareas profesionales correspondientes a las situaciones de aula, se les pidió a los EPM que planificaran una tarea de aprendizaje (Tabla 3).

Tabla 3. Descripción de la tarea profesional de planificación de una tarea de aprendizaje

Objetivos de la tarea profesional	Enunciado de la tarea
Seleccionar la tarea e identificar y establecer objetivo	Selecciona una tarea de la magnitud longitud y su medida para Educación Infantil (libros, proyectos, web, etc.) e indica: Objetivo de aprendizaje de la tarea.
Anticipar características de la comprensión	Elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea ¿Qué características de la comprensión debería mostrar un niño que fuera capaz de resolverla?
Tomar decisiones	¿Qué tarea propondrías a continuación para avanzar en la comprensión de la magnitud longitud y su medida? Diséñala, indica el objetivo de aprendizaje y justifica tu respuesta.

Análisis de Datos

Los datos son las respuestas de los EPM a las tareas profesionales descritas anteriormente (Tabla 2 y 3). El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado en dos fases.

En la primera fase se analiza conjuntamente el uso que hacen los EPM de la TA en las situaciones de aula y en la de planificación de una tarea de aprendizaje. Se inicia esta fase analizando cómo los EPM usan el modelo de progresión del aprendizaje de la longitud para interpretar, a partir de los elementos matemáticos identificados, las características de la comprensión de los niños/as, en las situaciones de aula, y en la planificación de tareas de aprendizaje, para seleccionar la tarea, identificar y establecer el objetivo de aprendizaje y anticipar la comprensión. Posteriormente, analizamos si los EPM, haciendo uso del modelo de progresión en el aprendizaje, de los tipos de tareas de la TA y la comprensión interpretada/anticipada, proponen nuevas tareas para favorecer, en ambos casos, el aprendizaje de los niños/as. En la segunda fase, se compararon los usos que los EPM hicieron de la TA en las tareas profesionales de análisis de situaciones de aula y de planificación.

Como resultado de ambas fases de análisis identificamos distintos niveles de instrumentación de la TA y, en consecuencia, describimos cómo, a partir de la génesis instrumental, los EPM construyen los procesos cognitivos que favorecen la adquisición y desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as. Por ejemplo, en las tareas de análisis de las situaciones de aula propuestas, se construye un primer esquema de uso cuando el EPM solo usa la TA para identificar los elementos matemáticos implícitos en la situación de aula. El EPM construye un segundo esquema de uso al proponer una nueva tarea, secuencialmente posterior a la tratada en la situación de aula analizada, sin considerar la comprensión inferida y los tipos de tareas facilitadas en la TA. Asimismo, el EPM construye un primer esquema de acción instrumental cuando usa el modelo de progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida para interpretar la comprensión del niño/a, desde los elementos matemáticos identificados, pero no propone tareas para su progresión. Finalmente, se construye un segundo esquema de acción instrumental, cuando el EPM usa los tipos de tareas y el modelo de progresión del aprendizaje facilitado en la TA para proponer nuevas tareas teniendo en cuenta la comprensión inferida. La instrumentación de la TA implica la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental.

RESULTADOS

En esta sección se describen conjuntamente los resultados obtenidos sobre el uso que los EPM han hecho de la TA de la magnitud longitud y su medida en las tareas profesionales propuestas, y los procesos cognitivos que construyen para adquirir la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as. Hemos caracterizado a los EPM en cuatro grupos tal y como se describe a continuación.

Los EPM no usan la TA para resolver las tareas profesionales

Solo tres de los 23 EPM participantes no usaron la TA ni para analizar las situaciones de aula propuestas ni para planificar tareas de aprendizaje, por lo que consideraron la TA como un artefacto.

Así, estos tres EPM, al mirar profesionalmente las situaciones de aula no identificaron los elementos matemáticos implícitos en las mismas, o bien, reprodujeron retóricamente la información del documento teórico proporcionado, por lo que no interpretaron la comprensión de los niños/as. Tampoco utilizaron la TA para identificar el objetivo de la tarea de aprendizaje seleccionada por ellos mismos. Por ejemplo, Miranda, al analizar la situación de aula, correspondiente a la magnitud longitud (Tabla 2), argumenta:

> Miranda: En las viñetas [tabla 2, viñetas de la tarea de magnitud] aparece el reconocimiento de la magnitud longitud, ya que reconocen que sí pueden hacer que la tira sea igual a su altura. Además, el niño sabe que debe dividir la tira en unidades de la misma longitud que su cuerpo, por ello se da la equipartición. También, podemos visionar que aparece la iteración de la unidad de medida, la transitividad, la conservación y la acumulación. Los niños están en un nivel de comprensión 3 y 4 ya que reconocen que la tira es más grande que su longitud.

Miranda nombra elementos matemáticos sin aportar evidencias de la mayoría de ellos, e incluso, sin que estos formen parte de dicha situación de aula (transitividad, unidad de medida, iteración, equipartición y acumulación). Además, no tiene en cuenta el modelo de progresión del aprendizaje para interpretar la comprensión de los niños/as, ya que los sitúa en un nivel 4, argumentando que «reconocen que la tira es más grande que su longitud», cuando realmente están en el nivel 2 de comprensión (conservación de la magnitud).

En el análisis de la situación de aula, correspondiente a la medida de la longitud (Tabla 2), Miranda no tiene en cuenta el modelo de progresión en el aprendizaje al asignar un nivel diferente de comprensión a cada equipo según la viñeta que está analizando; si bien dado el carácter inclusivo de los niveles de comprensión, debería haber mirado la situación globalmente y no viñeta a viñeta.

Por último, cuando se le pide que planifique una tarea de aprendizaje, Miranda propone la siguiente tarea y objetivo de aprendizaje:

> Tarea: Las tizas. La maestra mostrará a los niños diferentes tizas de distintos tamaños: unas más largas, otras más cortas […] Los niños deben clasificar las tizas de clase dependiendo de su tamaño, si es corto o si es largo. Medir la estatura de los niños con las diferentes tizas.
>
> Objetivo: Reconocer la propiedad de acumulación. Identificar la unidad de medida para realizar iteraciones. Realizar ordenaciones de objetos comparando la longitud de las tizas. Realizar mediciones con las tizas.

Esta EPM ha propuesto una tarea en la que les pide a los niños que clasifiquen las tizas y midan su estatura con ellas. Sin embargo, en el objetivo habla de ordenar, y al describir los elementos matemáticos necesarios para su resolución nombra la transitividad, refiriéndose a ella como «tiza más grande-menos tizas para medir/tiza más corta-más tizas para medir», Miranda confunde los conceptos de ordenar-clasificar-relación inversa entre el número y la unidad de medida. También indica como objetivo «Reconocer la propiedad de acumulación», propiedad que describe como «deben contar las iteraciones de la unidad de medida a lo largo de la longitud de la tiza», cuando en realidad, para medir a los niños hay que contar las iteraciones de la tiza a lo largo de la longitud de los niños. Por tanto, esta EPM no usa el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para identificar el objetivo de aprendizaje de la tarea seleccionada.

Los EPM usan la TA para resolver las tareas de análisis de situaciones de aula, pero no para la de planificación

En este grupo 12 de los 23 EPM usaron la TA como instrumento conceptual para resolver las dos tareas de análisis de situaciones de aula, aunque construyeron diferentes procesos cognitivos. Nueve de ellos construyeron un primer esquema de uso para las situaciones de aula relacionadas con la magnitud o/y medida al usar la TA para identificar los elementos matemáticos implícitos en las tareas de magnitud de longitud, de medida o de ambas, aunque no usaron dicha TA para interpretar la comprensión de los niños/as. Los tres restantes usaron el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para mirar profesionalmente las tareas de análisis de las situaciones de aula, interpretando la comprensión de los niños/as de la situación de magnitud, de medida o de ambas, a partir de los elementos identificados, por lo que construyeron un primer esquema de acción instrumental. Ninguno de estos 12 EPM usó la TA para mirar profesionalmente la tarea de planificación, esto es, la consideraron como un artefacto. Estos EPM identificaron un objetivo que no era coherente con la tarea seleccionada. Por ejemplo, Pilar, utilizó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para interpretar la comprensión de los niños de la situación de aula de medida a partir de los elementos matemáticos identificados (primer esquema de acción instrumental para la medida), como se observa en su respuesta:

> Pilar: El equipo A se encuentra en la transición del nivel de comprensión 3 al 4, ya que son conscientes de que se deben realizar iteraciones de la misma medida a lo largo de la longitud sin superposiciones ni saltos. El equipo B está en la transición del nivel 4 al 5 porque al final deducen una relación inversa entre las medidas de las unidades y el número de unidades de medida.

Pilar ha interpretado la comprensión de los niños aportando evidencias concretas cuando hace alusión, en el caso del equipo A, a las iteraciones de la cuerda que realizan para medir el contorno del árbol y, en el caso del equipo B, a la relación inversa que deducen los alumnos entre el tamaño de los brazos de los niños y el número de niños que harán falta para medir el contorno del árbol. En la tarea de planificación, la EPM Pilar propone una tarea en la que los niños tienen que ordenar de mayor a menor sus calcetines y los de sus compañeros. En este caso, Pilar identifica como objetivo de aprendizaje «ordenar las longitudes de mayor a menor» pero no identifica la transitividad como elemento matemático necesario para resolver la tarea, lo que pone de manifiesto que no ha usado la TA para mirar profesionalmente la tarea de planificación.

Los EPM usan la TA para resolver las tareas profesionales

Encontramos siete EPM que usaron la TA como instrumento conceptual para resolver las tareas profesionales, tanto las de análisis de situaciones de aula como la de planificación de tareas de aprendizaje. En las tareas de análisis de situaciones de aula, todos la usaron para identificar los elementos matemáticos. Pero cuatro de estos siete EPM no pasaron de esta identificación de elementos matemáticos implícitos en las situaciones de magnitud (tres EPM) o en ambas (un EPM), por lo que construyeron un primer esquema de uso para magnitud y/o medida, mientras que los otros tres EPM usaron el modelo de progresión en el aprendizaje para interpretar la comprensión de los niños/as, a partir de los elementos matemáticos identificados, en las situaciones de magnitud y/o medida, por lo que construyeron un primer esquema de acción instrumental.

El uso de la TA para la tarea de planificación de los cuatro EPM que habían construido un primer esquema de uso en las tareas de análisis de situaciones de aula fue diferente: uno de ellos solo seleccionó una tarea y un objetivo coherente con la misma, desarrollando un primer esquema de uso; otro EPM usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para establecer un objetivo coherente con la tarea seleccionada y anticipar la comprensión de un niño que fuera capaz de resolver la tarea seleccionada, por lo que desarrolló el primer esquema de acción instrumental; y los otros dos EPM, además de usar el modelo de progresión del aprendizaje de la TA también usaron los tipos de tareas de la misma para proponer una nueva tarea para que el niño progresara en su aprendizaje, es decir, instrumentaron la TA. Por ejemplo, Cayetana usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para identificar los elementos «reconocimiento de la magnitud longitud» y «conservación» en las respuestas de los niños a la situación de magnitud, como vemos en su respuesta:

> Cayetana: Los niños consideran la longitud de forma intuitiva (percepción directa). Además, comprenden que si se mueve un objeto su longitud

no cambia (conservación de la magnitud longitud) ya que marcan su longitud en la tira tanto de pie como tumbados.

Sin embargo, no interpretó su comprensión correctamente ya que estableció un nivel de comprensión de los niños viñeta a viñeta y no planteó su comprensión al final de la situación de aula. Esto indica que esta EPM no era consciente del carácter inclusivo de los niveles de comprensión (primer esquema de uso para magnitud).

En la tarea de planificación Cayetana instrumentó la TA, al seleccionar una tarea y establecer un objetivo de aprendizaje coherente con la misma:

Tarea: Juntar y ordenar, de menor a mayor longitud, todos los lápices de la clase.
Objetivo: Hacer comparaciones directas entre dos o más objetos y ordenarlos según su longitud.

Además, Cayetana identificó los elementos matemáticos implicados en la tarea, aportando evidencias de los mismos, como refleja su respuesta:

Cayetana: Dentro de los elementos matemáticos distinguimos entre:
Elementos de magnitud:
Reconocimiento de la magnitud: los niños deben tener en cuenta que para medir un objeto deben considerar la distancia entre dos puntos como atributo.
Transitividad: si la longitud de un lápiz A es igual a la de un lápiz B, y la longitud del lápiz B es igual a la del lápiz C, entonces la longitud del lápiz A es igual a la de C.
Elementos de medida: No se observan.

Cayetana también, anticipó la comprensión de un niño que resolviera correctamente la tarea, indicando que éste debería realizar comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva y también por desplazamiento de los objetos y utilizar la propiedad transitiva para realizar ordenaciones de objetos, características del nivel 3 de comprensión.

Al planificar una tarea para que este niño pudiera progresar en su aprendizaje, propuso:

Cayetana: Que el niño mida cada uno de los lápices en «deditos», sin superponer ni hacer saltos. Finalmente, debe decir a la maestra cuántos «deditos» tienen sus lápices y discutir sobre los resultados en clase. El objetivo de esta tarea es subdividir un objeto en unidades de la misma longitud y realizar mediciones de longitudes comparando un objeto (lápiz) con otro elegido de antemano (deditos) que se usará para indicar cuántas veces cabe uno en el otro (medida).

Esta tarea supone una iniciación al trabajo de los elementos matemáticos de medida de la longitud, que caracterizan el nivel 4 de comprensión (iteración, unicidad, acumulación, etc.), por lo que resulta adecuada para que el niño progrese desde el nivel 3 de comprensión que mostraban en la tarea anterior. Así, Cayetana pasó de desarrollar un primer esquema de uso de la TA para magnitud, al analizar la situación de aula, a instrumentar la TA tanto para magnitud como para medida en la situación de planificación.

De los tres EPM restantes, uno de ellos usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para interpretar la comprensión de los niños/as implicados en ambas situaciones de aula, magnitud y medida, sin embargo, solo usó la TA para seleccionar una tarea de magnitud y establecer un objetivo coherente con la misma. Los otros dos EPM usaron el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para interpretar la compresión de los niños implicados en ambas situaciones de aula, magnitud y/o medida, a partir de los elementos matemáticos identificados, así como para seleccionar una tarea con un objetivo coherente con la misma y anticipar la comprensión del niño que fuera capaz de resolverla, en consecuencia, en ambas tareas profesionales construyeron un primer esquema de acción instrumental. Por ejemplo, Pedro desarrolla un primer esquema de acción instrumental en la situación de aula relacionada con la medida, al usar el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para identificar los elementos matemáticos de acumulación, iteración y unicidad de la unidad de medida, aportando evidencias de los mismos, e interpretar a partir de ellos la comprensión de los niños implicados en dicha situación de aula, si bien no propone una tarea que les ayude a progresar (Sánchez-Matamoros et al., 2017). En la planificación de la tarea de aprendizaje, este EPM usa la TA para proponer una tarea cuyo objetivo de aprendizaje es profundizar en la adquisición de la universalidad de la unidad de medida. La tarea es la siguiente:

Pedro: Los alumnos tendrían que medir dos longitudes iguales y una diferente con los pies, por lo que obtendrán medidas distintas entre todos ellos. Posteriormente se les dará un metro para que todos midan con una unidad de medida universal y vean que de esta forma distintos niños obtienen el mismo resultado para una misma longitud.

Así, este EPM ha propuesto una tarea de introducción del metro para que los niños reflexionen sobre la necesidad de emplear una medida universal para homogeneizar las mediciones de un objeto. Al anticipar la comprensión de un niño que fuera capaz de resolver con éxito la tarea, indica:

Pedro: Debe ser capaz de reconocer la universalidad de la unidad de medida por lo que tendrá que tener adquirido el reconocimiento de la magnitud longitud y su conservación, la propiedad transitiva y la capacidad para hacer equiparticiones de objetos.

Pedro usa la TA para seleccionar una tarea y proponer un objetivo de aprendizaje coherente con ella y para anticipar la comprensión de los niños que la resolvieran, ya que ha propuesto una tarea de transición del nivel 4 (unidad de medida) al nivel 5 (universalidad de la unidad de medida) de comprensión y anticipa que un alumno capaz de resolverla tiene que tener adquiridos los elementos matemáticos implicados en los niveles anteriores, esto es, los elementos referentes a la magnitud (reconocimiento, conservación y transitividad) y los abordados en el cuarto nivel de comprensión (equipartición de la longitud de un objeto, lo que conlleva hacer «partes» de igual longitud –unicidad– e iterarlas de manera correcta –iteración–). Sin embargo, este EPM no ha propuesto ninguna tarea de progreso para ellos, quedándose así en la construcción del primer esquema de acción instrumental.

Los EPM no usan la TA en las situaciones de aula y la usan como instrumento conceptual en la planificación

A este grupo solo pertenece un estudiante que no puso de manifiesto ninguna de las tres destrezas de la mirada profesional al analizar las situaciones de aula propuestas por lo que consideró la TA como un artefacto. Sin embargo, usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para seleccionar una tarea de magnitud, establecer un objetivo coherente con esta y anticipar la comprensión de un niño que fuera capaz de resolverla, es decir, construyó el primer esquema de acción instrumental en la planificación de una tarea de aprendizaje.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar el uso que los estudiantes para maestro de educación infantil hacen de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, en tareas profesionales que requieren del análisis de situaciones de aula y de la planificación de tareas de aprendizaje, para la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as.

Hemos organizado esta sección en dos apartados que dan respuesta al uso que hacen los estudiantes para maestro de infantil de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual para mirar profesionalmente (primera pregunta de investigación) y al papel del enfoque instrumental como indicador de la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as (segunda pregunta de investigación).

El uso de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual para mirar profesionalmente

La instrumentación de la trayectoria de aprendizaje pasa por desarrollar los dos esquemas de acción instruccional para interpretar, anticipar, inferir y comparar la comprensión de los niños, y, a partir de ahí, proponer tareas que favorezcan la progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida. Los resultados han mostrado que, de los 23 estudiantes para maestro, solo dos han manifestado haber instrumentalizado la trayectoria de aprendizaje en una tarea de planificación, y ninguno en la de análisis de una situación de aula. De estos resultados podemos concluir que la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje y, por tanto, la adquisición de una mirada profesional para los estudiantes para maestro es un proceso complejo que puede favorecerse mediante las prácticas profesionales en un módulo de enseñanza durante la formación inicial y debería continuar con el ejercicio profesional.

Asimismo, 20 estudiantes para maestro han iniciado la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje al considerarla como instrumento conceptual para relacionar dos de las tres destrezas que conforman la mirada profesional (identificar e interpretar). De estos veinte, 12 de ellos sólo manifiestan el uso de la trayectoria de aprendizaje en el análisis de situaciones de aula, pero no en la planificación de tareas de aprendizaje. Los ocho estudiantes para maestro restantes hacen uso de la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual en las tres tareas profesionales y, de ellos, sólo dos llegan a manifestar la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, al interrelacionar las tres destrezas que conforman la mirada profesional, en la tarea de planificación, pero no en las de análisis de situaciones de aula. A la vista de estos resultados, se evidencia que los estudiantes para maestro pueden llegar a instrumentar la trayectoria de aprendizaje en determinadas situaciones (en nuestro caso, en la planificación de tareas) pero no instrumentarla en todas las situaciones relacionadas con dicha competencia (en nuestro caso, en el análisis de situaciones de aula). Podemos concluir que el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente a través de la instrumentación de una trayectoria aprendizaje, en los módulos de enseñanza, además de contemplar tareas profesionales, variadas como pueden ser las de análisis de situaciones de aula o la de planificación de tareas de aprendizaje, es necesario establecer relaciones entre dichas tareas profesionales que lleven al estudiante para maestro a la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje en cualquier situación relacionada con la competencia de la mirada profesional.

La dificultad de los tres estudiantes para maestro que no adquirieron ninguna de las tres destrezas de la competencia, al considerar la trayectoria de aprendizaje como un artefacto, podría deberse a la dificultad de establecer relaciones entre su conocimiento de matemáticas y su conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños. Esta dificultad ya ha sido indicada en investigaciones sobre la mirada profesional de los estudiantes para maestro (Son, 2013; Wilson et al., 2015), en las que se concluía que para poder establecer esta relación era necesario que los estudiantes para maestro anticiparan o identificaran la corrección o no de las respuestas de los niños y determinaran cómo estas eran o no significativas, desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas. El resto de estudiantes para maestro (20 EPM) al iniciar la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, ya sea como esquema de uso o como esquema de acción instrumental, han empezado a establecer relaciones entre el conocimiento matemático de la magnitud longitud y su medida y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños y niñas, necesario para adquirir la mirada profesional (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

A la vista de estos resultados, concluimos que el análisis del uso de una trayectoria como instrumento conceptual es una herramienta útil para describir los procesos cognitivos, tales como esquemas de uso o de acción instrumental, que llevan a cabo los estudiantes para maestro para interpretar o anticipar las características de la comprensión y tomar decisiones para el progreso del aprendizaje. Asimismo, la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje y, por tanto, la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente, es un proceso complejo para los estudiantes para maestro, es progresivo y no uniforme, ya que la interrelación entre las destrezas de identificar, interpretar o anticipar y tomar decisiones se ha manifestado en los estudiantes para maestro de maneras diferentes.

Papel del enfoque instrumental como indicador de la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente

El uso del enfoque instrumental como marco teórico nos ha permitido describir el proceso de adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños e identificar los procesos cognitivos que han desarrollado los estudiantes para maestro.

Los resultados nos permiten identificar maneras diferentes de adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños en las situaciones de aula y en planificación de tareas de aprendizaje (Figura 1).

En las situaciones de aula y en la planificación de tareas de aprendizaje la adquisición de la competencia se inicia con la consideración de la trayectoria de aprendizaje como un artefacto (Rabardel, 2002; Verillon y Rabardel, 1995), lo que supone que los estudiantes para maestro no realizan ningún proceso cognitivo con la trayectoria de aprendizaje. Por tanto, no adquieren la competencia docente. En un segundo momento de la adquisición de la competencia los estudiantes para maestro desarrollan un primer esquema de uso (Drijvers y Trouche, 2008) en el análisis de situaciones de aula y en la planificación de tareas de aprendizaje, el estudiante para maestro usa la trayectoria de aprendizaje para identificar los elementos matemáticos implícitos en la situación de aula planteada o en la selección de tareas y objetivos coherentes realizada en la planificación, sin tener en cuenta la comprensión. Este proceso cognitivo, en el que se evidencia un esquema de uso de la trayectoria de aprendizaje, le podría servir como bloque de construcción para desarrollar el primer esquema de acción instrumental que constituye el tercer momento de adquisición de la competencia.

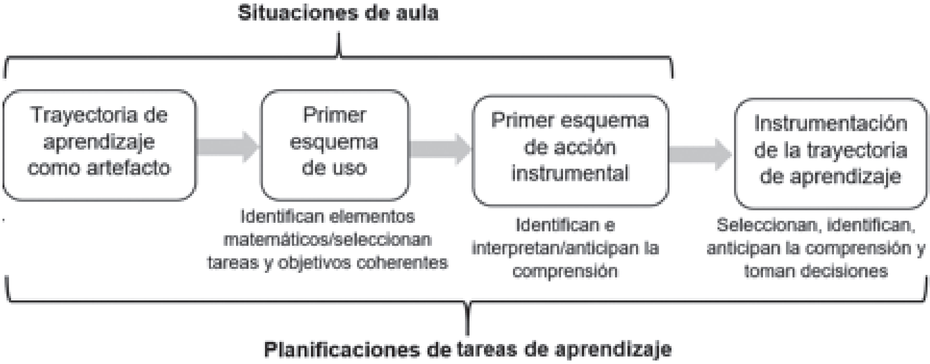


Figura 1. Adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente y procesos cognitivos realizados en el análisis de las situaciones de aula y en la planificación de tareas de aprendizaje

En el tercer momento de adquisición de la competencia, los estudiantes para maestro desarrollan el primer esquema de acción instrumental, al relacionar el modelo de progresión del aprendizaje con las evidencias de la situación de aula planteada para interpretar la comprensión de los niños a partir de los elementos matemáticos identificados o para anticipar la comprensión en la planificación de una tarea de aprendizaje. Por último, el cuarto momento de adquisición de la competencia se caracteriza por la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, momento que solo se da en la planificación de tarea de aprendizaje. Este momento supone el desarrollo y la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental, al relacionar el modelo de progresión del aprendizaje con la anticipación de la comprensión que mostrarían los niños al resolver la tarea que estaban considerando para la planificación, a partir de los elementos matemáticos identificados (primer esquema de acción instrumental) y proponer nuevas tareas coherentes con la comprensión anticipada, relacionando el modelo de progresión del aprendizaje y los tipos de tareas de la trayectoria de aprendizaje (segundo esquema de acción instrumental).

Un estudiante para maestro tiene desarrollada la competencia profesional, cuando construye ambos esquemas de acción instrumental lo que se pondría de manifiesto en la resolución de tareas profesionales. En nuestra investigación, no tenemos evidencias de ello. Estos resultados deben ser tenidos en cuenta en el diseño de módulos de enseñanza en los programas de formación de maestros para crear oportunidades de aprendizaje que potencien la interrelación entre las destrezas de identificar, interpretar/anticipar y tomar decisiones instruccionales (Mason, 2002), considerando el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes, organizado mediante trayectorias de aprendizaje con el objetivo de favorecer el inicio de la adquisición o desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo contó con la ayuda del Proyecto EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España y GV/2018/066 de la Generalitat Valenciana.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. I.C.E. Universitat de Barcelona. Hosori Editorial, S. L. (p. 176).

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389-407.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.

Decreto 38/2008, de 28 de marzo, del Consell, por el que se establece el currículo del segundo ciclo de la Educación Infantil en la Comunitat Valenciana. [2008/3838] (DOGV núm. 5734 de 03.04.2008).

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.

Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 363-392.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 13,* 39-61.

Fernandez, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Mahwah, EEUU: Erlbaum.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science, and Technology Education, 14*(11), em 1599.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack et al. (Eds.). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-71). Springer.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170. doi:10.12973/eurasia.2016.1295a

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P. (2002). People and technology-A cognitive approach to contemporary instruments. Recuperado el 12 de febrero de 2018, de: http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente»: un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P. y Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 21*(2), 203-228.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Use of a learning trajectory as a conceptual instrument to develop the competence of professional noticing**.** En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of* *the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 107-114*).* Umeå, Sweden: PME.

Sarama J. y Clements D. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. London and New York: Routledge.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education 16*, 379-397.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 49-70.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. TAL Project.* Freudenthal Institute, Utrech University and National Institute for Curriculum Development. Utrech. The Netherlands.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of psychology of education, 9*(3), 77-101.

Vygotsky, L. S. (1985). La méthode instrumentale en psychologie. En B. Schneuwly y J. P. Bronckart (Eds.), *Vygotsdy aujourd`hui* (pp. 39-47). Neudchâtel: Delachaux & Niestlé.

Wilson, P. H., Mojica, G. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32,* 103-121.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS MEDIANTE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

DEVELOPING THE ONTO-SEMIOTIC ANALYSIS COMPETENCE OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS USING PROPORTIONALITY TASKS

Burgos, M.[1], Giacomone, B.[2], Godino, J. D.[1] y Neto, T.[3]

[1] *Universidad de Granada (España);* [2] *Universidad de San Marino;*
[3] *Universidad de Aveiro (Portugal)*

RESUMEN

El reconocimiento de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver tareas matemáticas, así como de los objetos y procesos implicados en las mismas, se considera como una competencia que es necesario desarrollar en el profesor de matemáticas. En este trabajo se describe y analiza una experiencia formativa, con futuros profesores de matemáticas de secundaria, dirigida a desarrollar la competencia mencionada, usando tareas de proporcionalidad. Se realiza un análisis de las respuestas de uno de los estudiantes a una de las tareas (estudio de caso) usando herramientas teóricas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas, basado en el EOS. Los resultados revelan que el reconocimiento de las prácticas, objetos y procesos por parte

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D. y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

de los futuros profesores no es fácil, indicando la necesidad de profundizar en el diseño y experimentación de nuevas experiencias formativas.

Palabras clave: *formación de profesores, proporcionalidad, competencia, análisis ontosemiótico.*

ABSTRACT

The recognition of the mathematical practices carried out in solving mathematical tasks as well as of the objects and processes involved is considered as a necessary competence that mathematics teacher should develop. In this article, a formative experience with prospective high school mathematics teachers is described and analysed, aimed at developing the aforementioned competence, using proportionality tasks. An analysis of a student's answer to one of the tasks is made (case study) using theoretical tools of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC) of the mathematics teacher, which is based on the OSA. The results reveal the complexity in the recognition of practices, objects, and processes, showing the need to design and implement new educational experiences.

Keywords: *teachers training, proportionality, competence, onto-semiotic analysis.*

1. INTRODUCCIÓN

El profesor de matemáticas debe tener competencia matemática para resolver los problemas que el currículo propone para los niveles educativos en el que el docente desempeña su labor. Pero se reconoce que dicha competencia no es suficiente para lograr una enseñanza idónea. En este sentido, resulta evidente la necesidad de implementar experiencias formativas que permitan promover el crecimiento profesional y el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado, como un tema fundamental en la agenda de la investigación en educación matemática (Chapman, 2014; English, 2008; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Ponte y Chapman, 2016; Sadler, 2013).

Entre otros conocimientos y competencias, se requiere que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la solución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza-aprendizaje adecuadas. Esta competencia profesional global de análisis e intervención didáctica involucra, además, conocimientos didáctico-matemáticos específicos cuyo dominio y aplicación debe ser objeto de atención de los programas de formación de profesores. Por ejemplo, el conocimiento matemático en sí mismo capacita a los futuros profesores para la resolución de problemas de proporcionalidad propios de educación secundaria. Sin embargo, se espera que los futuros profesores adquieran el conocimiento didáctico-matemático específico que les permita prever diferentes métodos de resolución para las tareas, reconocer y dominar diferentes niveles de algebrización puestos en juego en las soluciones y desarrollar la capacidad de enunciar problemas relacionados.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017) se ha elaborado un modelo de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) (modelo CCDM) que puede servir de base para orientar la formación de profesores de matemáticas. Este modelo amplía y reorganiza las categorías de conocimientos propuestas por otros autores, como el modelo MKT de Ball y cols. (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008). Apoyado en los aportes teóricos del EOS, se vienen experimentando diversas intervenciones formativas con el objetivo de desarrollar en futuros profesores de matemáticas las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas propuestas en el modelo CCDM (véase, por ejemplo, Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016). Más específicamente, como señalan Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2018), se diseñan, implementan y valoran ciclos formativos para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico, tal como se propone en este trabajo, el cual centra la atención en la proporcionalidad, cuyo análisis, en el marco del EOS, se ha iniciado en Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino (2017).

El estudio de las razones, proporciones y la proporcionalidad es un tema importante en el currículo escolar que se inicia en Educación Primaria y se continúa en Secundaria, siendo transversal a diferentes materias (Wilhelmi, 2017). Diversas investigaciones señalan que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Berk, Taber, Gorowara y Poetzl, 2009; Fernández, Llinares y Valls, 2013; Rivas y Godino, 2010; Rivas, Godino y Castro, 2012; Simon y Blume, 1994; Thomson y Thomson, 1994; Thomson y Thomson, 1996). En particular, los profesores tienden a apoyarse en el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia (Riley, 2010), y recurren a explicaciones procedimentales para justificar sus estrategias de resolución en problemas de valor faltante en los que se establece una relación de proporcionalidad (Post, Harel, Behr y Lesh, 1991). Además, con frecuencia, los profesores centran la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional (aplicación de reglas y algoritmos) sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (Lamon, 2007).

La investigación de Ben-Chaim et al. (2012) recurre a tareas matemáticas para incentivar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores en relación al razonamiento proporcional. Se plantea que los futuros profesores lean artículos matemáticos y didácticos sobre razón y proporción, contemplando el trabajo en grupo y la discusión de los resultados con toda la clase. Por su parte, Berk y cols. (2009) estudian la capacidad de futuros maestros de emplear múltiples métodos de resolución para abordar problemas así como para elegir el método más eficaz operacionalmente. Los resultados muestran que los futuros maestros son poco flexibles en resolver el mismo problema usando diferentes métodos.

Teniendo en cuenta el papel central que tiene la noción de proporcionalidad en el currículo, y las dificultades que plantea su enseñanza, hemos realizado una experiencia formativa con futuros profesores de educación secundaria, focalizada en este contenido matemático, aplicando las herramientas del modelo CCDM y del modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática desarrollado en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) y Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015). Bajo esta perspectiva, el objetivo de este trabajo es informar del diseño, implementación y resultados de una intervención formativa centrando la atención en una competencia específica del modelo CCDM: el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas implicadas en la resolución de tareas de proporcionalidad y el reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones. Debido a limitaciones de espacio analizamos con detalle solo una de las tareas propuestas y las respuestas de uno de los estudiantes participantes que reflejan parcialmente los resultados de la investigación.

Por un lado, el análisis ontosemiótico focalizado en la identificación de la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema prototípicas permite desvelar la complejidad ontosemiótica de un objeto como factor explicativo de potenciales conflictos y dificultades de aprendizaje. Por otro lado, el reconocimiento de los niveles de algebrización, basado en la identificación de objetos y procesos algebraicos, permite identificar progresivos estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas. Además, el cambio en alguna de las variables de la tarea puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Mostramos como ejemplo concreto el diseño y análisis a priori de una tarea de proporcionalidad propuesta como parte de una intervención formativa más amplia, con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, y mostramos algunos resultados obtenidos de su implementación, que reflejan la importancia de proponer este tipo de tareas como recurso para el formador.

2. MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

Como hemos indicado, la investigación está basada en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas (modelo CCDM) desarrollado por Godino, Giacomone et al. (2017). Este modelo se apoya en el sistema de herramientas teóricas desarrolladas en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

2.1. Fundamentos teóricos

En Godino (2009) se propuso un sistema de categorías de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (modelo CDM) a partir de las herramientas teóricas del EOS. En Pino-Fan y Godino (2015) el modelo CDM se revisa y amplia, incorporando a las herramientas de análisis didáctico las nociones de fases, dimensiones, facetas y niveles de análisis, ampliando también el trabajo de Font, Planas y Godino (2010). En Godino, Giacomone et al. (2017) se realiza una nueva ampliación del modelo CDM al incorporar la noción de competencia de análisis e intervención didáctica, ligada a la aplicación de cinco herramientas básicas propuestas en el EOS. La Figura 1 detalla las cinco subcompetencias que componen la competencia general de análisis e intervención didáctica.

El futuro profesor debe tener los conocimientos necesarios para reconocer, por un lado los diversos significados (entendidos como sistemas de prácticas) del contenido correspondiente y su interconexión, y por otro la diversidad de objetos y procesos implicados (configuración ontosemiótica) para los diversos significados.

Figura 1. Competencia de análisis e intervención didáctica
(Godino, Giacomone et al., 2017, p. 103)

Godino, Giacomone et al. (2017) definen la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas como aquella que le permita al profesor identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas. Dicho reconocimiento permite «prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio» (p. 94).

Por otro lado, en lo que refiere al estudio de la proporcionalidad, un aspecto clave del CCDM es el reconocimiento, por parte de los profesores, de los distintos niveles de algebrización en la solución de tareas matemáticas que ponen en juego dicha noción. Para el caso de la proporcionalidad, en Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) se han identificado tres significados pragmáticos específicos de la proporcionalidad ligados a los niveles de algebrización que se ponen en juego en la solución de tareas que involucran la proporcionalidad directa de magnitudes: significado aritmético (nivel 0 de algebrización), proto-algebraico (nivel 1 y 2) y algebraico-funcional. Estos significados se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva.

Creemos que es importante tener en cuenta los diversos significados en el diseño de los procesos de instrucción, dado que estos tienen lugar en un dilatado espacio de tiempo (educación primaria y secundaria) y en distintas áreas de contenido (Wilhelmi 2017).

2.2. Enfoque metodológico

Dado que el problema de investigación es diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas para desarrollar en los futuros profesores de educación secundaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre un tema específico, el enfoque metodológico sigue las fases propias de las investigaciones de diseño, aplicando como teoría base el EOS, como proponen Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014): estudio preliminar, diseño de la trayectoria didáctica, implementación y análisis retrospectivo.

2.3. Contexto, población y muestra

La experiencia formativa se ha realizado en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2016-2017, en España, dentro de la asignatura Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Han participado en el estudio 33 estudiantes, con un perfil académico variado: solo 12 (33,3 %) tienen el grado de Matemáticas; 15 son ingenieros de caminos o arquitectos (44,1%), 3 son físicos y 3 proceden de otras ingenierías. En cuanto a la experiencia previa de enseñanza de las matemáticas, 19 estudiantes declaran que tienen alguna experiencia de enseñanza en clases particulares; los demás estudiantes no la tienen.

3. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO FORMATIVO

La intervención formativa se ha realizado en 4 sesiones de dos horas y media de duración. Dos de ellas tratan sobre el tópico de visualización, en las que se inicia el desarrollo de la competencia de análisis ontosemióticos de las prácticas matemáticas; otra sesión sobre álgebra en la que se introducen los niveles de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) basados en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino, Aké et al., 2014; Godino et al., 2015), y una última sesión en la que se evalúa la competencia de análisis ontosemiótico lograda usando una tarea sobre proporcionalidad, seguida de la discusión de las soluciones. El análisis a priori de dicha tarea y los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes a la misma puede encontrarse en Burgos et al. (2017). Por tanto, la cuarta sesión forma parte del proceso instructivo y no tiene una finalidad meramente evaluativa.

La tercera sesión (un taller de dos horas de duración) estuvo centrada en el desarrollo de conocimientos y competencias para el reconocimiento de niveles de algebrización, considerando tres momentos:

1. Presentación de las características del RAE, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática.
2. Realización de las siguientes actividades en equipos de 2 o 3 de estudiantes:
    2.1. Resolver tareas matemáticas (se propusieron 8), propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras.
    2.2. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta las prácticas, objetos y procesos algebraicos previamente identificados.
    2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.
3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

En cada una de las sesiones del curso, se recogieron las respuestas dadas por escrito a tareas específicas, resueltas mediante el trabajo en equipos y entregadas a través de la plataforma Moodle usada en la gestión del curso.

Al finalizar la cuarta sesión, y como trabajo opcional complementario para incrementar la calificación final del curso, se propuso la resolución de 5 tareas que involucran la noción de proporcionalidad. Este trabajo fue realizado por 10 estudiantes de manera individual tras la finalización del curso, reflejando por consiguiente aspectos relevantes de los aprendizajes logrados por dichos estudiantes. Analizamos globalmente las respuestas dadas por estos 10 estudiantes a una de las cinco tareas propuestas en esta cuarta sesión, y con más detalle, las respuestas de un estudiante a las consignas de la tarea. Esta tarea se describe en la siguiente sección.

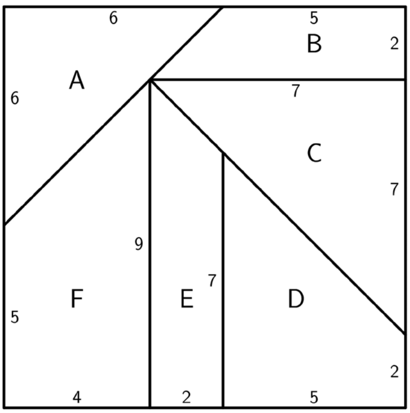
4. ANÁLISIS A PRIORI DE UNA DE LAS TAREAS

En esta sección, y a modo de ejemplo, se analizan las prácticas, objetos y procesos de distintas maneras de resolver uno de los problemas de proporcionalidad propuestos (adaptado de Brousseau, 1997, p. 177). Incluimos la configuración ontosemiótica de una de las soluciones propuestas y una posible variante al problema inicial. Se trata de identificar los tipos de objetos matemáticos y procesos puestos en juego y, por tanto, los conocimientos involucrados en cada caso en una solución esperada o experta del problema, correspondiente a un nivel de algebrización determinado (aritmético, proto-algebraico y algebraico). De esta manera mostramos el tipo de análisis de las tareas matemáticas escolares que esperamos sean capaces de realizar los futuros profesores.

Problema 3 (puzle):

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros.

Se quiere construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. Indicar las medidas de los diferentes lados de las piezas.



Las consignas dadas a los futuros profesores fueron las siguientes:

A) Resolver los problemas incluidos en anexo por al menos dos métodos.

B) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones.

Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver, justificar la solución y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias[1].

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

C) Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se pone en juego en cada caso.

D) Enunciar y resolver tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles.

Seguidamente incluimos tres soluciones posibles de la tarea del puzle y mostramos en la Tabla 1, a modo de ejemplo, el análisis ontosemiótico de la segunda solución.

Solución 1. Aritmética (nivel 0 de algebrización)

1) Se trata de construir en cartulina un puzle, de manera que el lado que en la figura tiene 4 cm, después tenga 7 cm. Necesitamos conocer las medidas de los lados correspondientes a 2, 5 y 6 cm en la figura (observamos que los lados correspondientes a 7 cm y 9 cm quedarán determinados con las medidas anteriores).
2) En primer lugar, el lado que tenga 2 cm, la mitad de 4 cm, tendrá en cartulina, la mitad de 7 cm, es decir 3,5 cm. Al lado de 6 cm, que es el triple de 2 cm, le corresponderá en cartulina el triple de 3,5 cm, es decir, 3,5 x 3 = 10,5 cm.
3) De la misma manera, a 3 cm en la figura (la mitad de 6 cm) le corresponde en cartulina la mitad de 10,5 cm, esto es, 10,5 ÷ 2 = 5,25 cm.
4) Finalmente, al lado de 5 = 2 + 3 cm en la figura le corresponderán 3,5 + 5,25 = 8,75 cm en el puzle de cartulina.

Solución 2. Proto-algebraica (nivel 1 de algebrización)

1) La relación entre las longitudes de los segmentos en la figura y en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, puesto que se debe construir el mismo puzle pero de mayor tamaño.

[1] Esta tabla fue usada previamente en la fase instructiva.

2) Calculamos la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4 = 1,75.
3) La longitud en el puzle de cartulina, que le corresponde a un segmento de longitud *k* en la figura será 1,75 x *k*

Tabla 1. Configuración ontosemiótica de la solución proto-algebraica (nivel 1 de algebrización)

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
1) La relación entre las longitudes en la figura y en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, puesto que se debe construir el mismo puzle, pero de mayor tamaño	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de aplicación de la proporcionalidad directa.	*Conceptos:* magnitud, distancia, relación, proporcionalidad directa, escala. *Proposición P1*: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa. *Argumento*: se debe construir el mismo puzle, pero de mayor tamaño.
2) Calculamos la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4=1,75.	Obtener el valor unitario.	*Conceptos*: escala, valor unitario. *Procedimiento*: reducción a la unidad. *Argumento*: la relación es de proporcionalidad directa.
3) La longitud en el puzle de cartulina, que le corresponde a un segmento de longitud *k* en la figura será 1,75 x *k*	Interpretar el resultado numérico y expresar simbólicamente la solución del problema.	*Concepto:* factor de escala. *Proposición P2*: enunciado de la práctica 3). *Argumento*: secuencia de prácticas 1) a 3), condiciones de proporcionalidad que definen una escala.

Solución 3. Algebraica (nivel 3 de algebrización)

Según Godino et al. (2017), el significado propiamente algebraico (nivel 3) se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones (aditiva $f(x + y) = f(x) + f(y)$, y homogénea $f(\alpha x) = \alpha f(\mathrm{x})$).

1) Pretendemos construir un puzle igual al de la figura pero de mayor tamaño. Es decir, si un segmento *s* en la figura tiene el doble, triple,…, de longitud que otro segmento *t* en la figura, en el puzle de cartulina, el segmento *S* correspondiente a *s* tendrá, el doble, triple, etc. de longitud que el segmento *T* correspondiente a *t*. Además si un segmento en la figura es unión de otros dos, en el puzle el segmento asociado también será la unión de los correspondientes en la figura.

2) Teniendo esto en cuenta, la correspondencia que se establece entre las longitudes de los segmentos en la figura (F) y las longitudes de los segmentos en el puzle (P), $f: F \to P$, cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes $f(x + y) = f(x) + F(y)$ y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número $f(\alpha x) = \alpha f(\mathrm{x})$.
3) Por tanto, $f(x) = f(x1) = xf(1)$, es decir, la aplicación $f: F \to P$ es lineal, de la forma: $f(x) = kf(x)$ con $k = f(1)$.
4) El coeficiente k de la función lineal es la constante de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.
5) Aplicando dichas propiedades al caso se tiene:

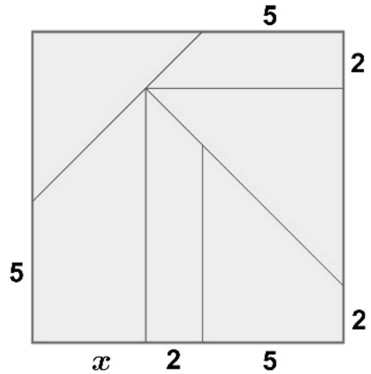
$$f(4) = 7cm;\ 4f(1) = 7cm;\ f(1) = 7/4 = 1{,}75cm$$

6) La longitud en el puzle de cartulina de un segmento de longitud x en la figura, será por tanto $f(\mathrm{x}) = x \text{ x } f(1) = x \text{ x } 1{,}75$

Enunciar y resolver tareas relacionadas

Una respuesta a la cuestión D) planteada en el enunciado de la tarea puede ser la siguiente variante, cuya solución implica un nivel de algebrización 3:

Problema. Se quiere construir un puzle cuadrado igual al de la figura de perímetro 77 cm, de forma que al lado de x cm le corresponda uno de 7 cm. ¿Cuál es la escala?



Solución (Nivel 3 de algebrización).

1) Dado que el puzle es cuadrado y el lado de la figura tiene de longitud $2 + 5 + x = 7 + x$ cm, sabemos que su perímetro será $4(7 + x) = 28 + 4x$ centímetros.
2) Al lado de x centímetros le corresponde uno de 7 cm. Dado que la relación es de proporcionalidad directa:

$$x \to 7$$
$$28 + 4x \to 7$$

3) En toda relación de proporcionalidad directa, las razones de las cantidades que se corresponden son iguales:

$$x = \frac{28 + 4x}{77}$$

4) De aquí, $77x = 7(28 + 4x) \Leftrightarrow 11x = 28 + 4x \Leftrightarrow 7\,x = 28 \Leftrightarrow x = \frac{28}{7} \Leftrightarrow x = 4$
5) Por tanto, la escala es 4:7.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado informaremos de manera detallada de la respuesta de uno de los estudiantes, como un estudio de caso, haciendo mención también al conjunto de respuestas de los 10 estudiantes que respondieron a la tarea analizada.

5.1. Estudio de un caso

En la consigna A) se pedía que resolviese la tarea por al menos dos métodos. Como vemos en la Figura 2, el estudiante E7 ofrece dos soluciones al problema.

En la primera solución dada, el estudiante recurre al procedimiento de la regla de tres, tantas veces como longitudes necesita averiguar para construir el puzle en cartulina. Este desarrollo se aplica en la resolución de un problema de proporcionalidad, en el cual se conocen tres de los cuatro valores que determinan la proporción y se precisa calcular el cuarto. El estudiante no se preocupa por argumentar la pertinencia del procedimiento seguido, es decir, no fundamenta el algoritmo en base a la correspondencia de proporcionalidad directa entre las magnitudes, distancia en la figura y distancia en el puzle. Por otro lado, en la solución no aparece explícito el procedimiento seguido para despejar y obtener el valor de las distintas incógnitas.

Figura 2. Soluciones propuestas por el estudiante E7

1º Usando la regla de 3 identificamos todas las longitudes distintas que aparecen en la figura.

$$4 \rightarrow 7 \qquad 4 \rightarrow 7 \qquad 4 \rightarrow 7 \qquad 4 \rightarrow 7 \qquad 4 \rightarrow 7$$
$$6 \rightarrow x \qquad 5 \rightarrow y \qquad 2 \rightarrow z \qquad 7 \rightarrow a \qquad 9 \rightarrow b$$

x=10,5 y =8,75 z=3,5 a=12,25 b=15,75

21 Usando el concepto de escala y razón: r = 7/4 = 1,75 vamos a construir un elemento 1,75 veces mayor al anterior. Ahora a cada elemento lo multiplicamos por la razón obteniendo as' el resultado final:

6 x 1,75 = 10,5; 5 x 1,75 = 8,75; 2 x 1,75= 3,5;

7 x 1,75 = 12,25; 9 x 1,75 = 15,75

En la segunda solución dada, el estudiante obtiene el factor de escala que le permite pasar de las longitudes en la figura a las longitudes del puzle en cartulina, indicando que «a cada elemento lo multiplicamos por la razón». El uso del término razón, en lugar de factor de proporcionalidad nos lleva a pensar que este estudiante no reconoce la riqueza y complejidad de los conceptos de razón y proporcionalidad (Freudenthal, 1983, cap. 6).

En la Tabla 2, aparece la respuesta dada por el estudiante a la consigna B). Debía identificar los conocimientos puestos en juego en las soluciones que había presentado en la consigna anterior, enumerando la secuencia de prácticas y completando la tabla con el uso e intencionalidad de las unidades elementales de prácticas y los objetos referidos en las mismas.

Tabla 2. Configuración ontosemiótica elaborada por el estudiante E7

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)
Solución 1. 1º Identificar cada uno de las medidas de los elementos 2º Usar la regla de 3.	La intención es formar parejas de fracciones equivalentes entre sí, con tres datos y una incógnita.	*Conceptos*: regla de 3, equivalencia. *Proposiciones*: cuando existen una relación de proporcionalidad se usa la regla de 3 para el cálculo de un cuarto elemento que se desconoce. *Procedimientos*: la incógnita se calcula multiplicando en cruz y dividiendo por el número que queda. *Argumentación*: todas las magnitudes obtenidas son mayores a las iniciales, tal y como propone el enunciado.
Solución 2. 1º Calcular la razón de semejanza que existe entre los dos datos iniciales del problema. 2º Multiplicar cada elemento por la razón de semejanza.	La intención de este método es usar la razón de semejanza como objeto de elementos que son proporcionales, ya que se quiere crear un objeto de mayores dimensiones que siga la misma proporción.	*Conceptos*: razón de semejanza, equivalencia, proporcionalidad. *Proposiciones*: elementos que son proporcionales siguen una misma razón de semejanza. *Procedimientos*: multiplicar a cada elemento por la razón de semejanza. *Argumentación*: todas las magnitudes obtenidas son mayores a las iniciales tal y como propone el enunciado.

El estudiante no enumera las distintas prácticas elementales, sino que incluye en la columna destinada a tal fin, el uso de éstas, lo que muestra una confusión entre la práctica matemática y el significado atribuido a ésta. En la primera solución propuesta, el estudiante asigna a la técnica de la regla de tres la intención de «formar parejas de fracciones equivalentes entre sí, con tres datos y una incógnita». En cierta medida, esto esconde el significado de la regla de tres: la equivalencia de razones permite encontrar uno de los términos de una proporción conocidos los otros tres. En una igualdad de razones (proporción) los productos en cruz son iguales, de manera que si el término desconocido es un extremo se obtendrá multiplicando los términos medios de la proporción y dividiendo el resultado por el otro extremo.

Como objetos referidos figura «regla de tres» como concepto. Así mismo, bajo la denominación de proposición «cuando existen una relación de proporcionalidad se usa la regla de tres para el cálculo de un cuarto elemento que se desconoce» establece una relación causa-efecto entre situación de proporcionalidad y procedimiento de regla de tres para resolverla. El procedimiento «la incógnita se calcula multiplicando en cruz y dividiendo por el número que queda», refiere a la igualdad de los productos cruzados en una proporción, estando la incógnita en un extremo de la misma.

Un argumento es un enunciado requerido para justificar una proposición o explicar un procedimiento. El argumento «todos las magnitudes obtenidas son mayores a las iniciales tal y como propone el enunciado» no deja de ser un pensamiento cualitativo que pretende justificar la corrección de la solución.

La segunda solución propuesta por el estudiante recae en la semejanza entre la figura del puzle y el puzle que debe construirse en cartulina. Establece que «la intención de este método es usar la razón de semejanza como objeto de elementos que son proporcionales», ya que se quiere crear un objeto de mayores dimensiones que siga la misma proporción. El uso que hace el estudiante de los términos razón de semejanza y proporción es confuso. Esta confusión se manifiesta también cuando identifica la proposición «elementos que son proporcionales siguen una misma razón de semejanza». Nuevamente el argumento hace referencia a un tratamiento informal cualitativo de la relación de proporcionalidad entre ambas figuras.

A continuación, el estudiante debía identificar el nivel de algebrización de las soluciones que había propuesto, teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en ellas, así como las posibles dificultades que se podrían observar en la resolución del problema usando las distintas estrategias seguidas. En la Figura 3 se incluye la respuesta del estudiante a esta consigna.

Figura 3. Niveles de algebrización identificados por el estudiante E7

En ambos casos el nivel de algebrización es 1, ya que se usa el significado relacional de la igualdad y se usan variables como incógnitas.

El estudiante identifica apropiadamente el nivel de algebrización en la segunda solución, aunque la justificación es incorrecta (en este caso no hay un uso de símbolos literales como incógnitas) pero no así en la primera, que correspondería a un nivel 2 de algebrización. Probablemente, la confusión proceda del hecho de vincular nivel 1 de algebrización a un procedimiento de resolución por regla de tres, debido al uso degenerado del algoritmo, donde no se hace mención a la serie de números proporcionales implicada ni a la igualdad de razones correspondientes que lleva a la resolución de una ecuación del tipo Ax = B. El estudiante hace referencia al uso de «variables como incógnitas» para decidir (junto al significado relacional de la igualdad) que la actividad desarrollada en la solución es proto-algebraica de nivel 1.

Por último, el estudiante debía enunciar y resolver variantes del problema cuya solución implicase cambios en los significados puestos en juego. La Figura 4 incluye la tarea (solo propone una) del estudiante E7.

Figura 4. Variante propuesta por el estudiante E7

Partiendo del mismo ejercicio, calcular la magnitud que tendrían que tener cada uno de los elementos de la figura para que la relación de áreas fuera de 25/16.

Primero identificamos que la relación pedida corresponde a k2 = 25/16 por lo tanto la razón de semejanza que tienen que tener los lados es de k = 5/4. Por lo tanto, como se ha procedido en el ejercicio anterior se procede a calcular los otros elementos:

6x1,25 = 7,5; 5x1,25 = 6,25; 2x1,25= 2,5; 7x1,25 = 8,75; 9x1,25 = 11,25; 4x1,25 =5

El enunciado propuesto por el estudiante pide determinar las medidas del puzle en cartulina teniendo en cuenta que la razón entre las áreas del puzle y la maqueta es 25/16. Así, cuando el estudiante dice «magnitud» debería decir medida, y donde dice «relación de áreas» debería decir razón de áreas. En la solución el estudiante obtiene la razón entre los lados a partir de la razón entre las áreas, calculando la raíz cuadrada de los términos de ésta. A partir de aquí concluye que se procede como en la segunda solución propuesta al problema inicial. No incluye el nivel de algebrización que le asigna a esta nueva tarea, que sigue siendo proto-algebraica de nivel 1, es decir, el estudiante no ha conseguido proponer un enunciado alternativo con un nivel de algebrización distinto al de las soluciones previas.

5.2. Respuestas de otros estudiantes

De los 10 estudiantes que hicieron las tareas complementarias, dos alumnos no resolvieron la tarea del puzle y de los que la realizaron, uno no respondió a los ítems B), C) y D).

Los procedimientos más frecuentes de solución a la tarea son el de regla de tres y el de obtención del factor de escala o constante de proporcionalidad, el cual permite pasar de la maqueta al puzle en cartulina. Los alumnos que identificaron el nivel de algebrización en la solución por regla de tres, le asignaron nivel 1, en lugar de nivel 2, como sería apropiado, en virtud de los criterios establecidos en Godino, Aké et al. (2014). Al igual que ocurría con el estudiante E7, el uso degenerado de la regla de tres, lleva a los estudiantes a atribuir un nivel erróneo (como afirma un estudiante «le corresponde un nivel 1 de algebrización, pues los datos desconocidos los representamos por diferentes letras, pero no se resuelven ecuaciones de la forma $Ax=B$, ni se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión». Además de éstas, se propone una solución del tipo funcional (Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017) a la que asigna incorrectamente un nivel 4 de algebrización, argumentando para ello que «al aparecer y manejar una función donde no se manipulan ni se opera con los parámetros, el nivel de algebrización es el 4». Llama la atención la solución propuesta por otro alumno en base a la semejanza entre los puzles (maqueta y real), haciendo un uso inapropiado del teorema de Thales.

De manera general, las respuestas que los futuros profesores dieron a la tarea del puzle ponen de manifiesto ciertas dificultades para realizar la secuenciación de prácticas elementales, diferenciar las prácticas de sus usos e intencionalidad, y para distinguir los objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) referidos en ellas. En algunos estudiantes se aprecia confusión con el significado del objeto primario concepto. Por ejemplo, es frecuente que regla de tres aparezca como concepto en la configuración. Otros objetos identificados erróneamente como conceptos son «rectas semejantes», «Teorema de Thales».

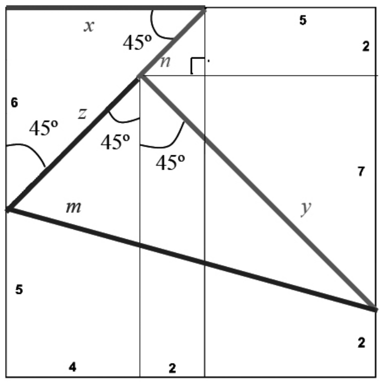
Los futuros profesores son frecuentemente imprecisos con la noción de proposición. A veces es interpretada como premisa o argumento en lugar de un enunciado sobre conceptos que necesita justificación o prueba. Así, es habitual encontrar en las configuraciones «identificar una proporción» o «establecer una regla de tres con una incógnita» como proposiciones. El objeto menos identificado es argumento. Además, cuando es referido lo es de forma incorrecta, no alude a justificación de una proposición o procedimiento, sino a la descripción de la práctica referida. Por ejemplo, un único estudiante hace referencia a «relaciones de proporcionalidad en el procedimiento empleado como argumento».

Por último, para responder adecuadamente a la consigna D) es importante que los futuros profesores hayan identificado previamente los objetos matemáticos en la solución de un problema y establezcan apropiadamente las relaciones entre ellos. En este sentido, observamos que los estudiantes tienen dificultades para elaborar de forma pertinente problemas que supongan una variación respecto del enunciado inicial. Los enunciados propuestos se alejan demasiado del contexto original, son poco significativos o la tarea que proponen no es de proporcionalidad. Interpretan que introducir nuevas variables, coeficientes, etc. incrementa el nivel de algebrización. Por ejemplo, el alumno que propone la solución algebraico-funcional, responde a la última consigna afirmando que «cambiaríamos el nivel de algebrización si en lugar de usar una proporción 4:7, ampliamos la figura de manera que a cada longitud le correspondiera su doble (es decir, la razón no es una fracción)». Otro futuro profesor propone la tarea que aparece en la Figura 5 como variante a la situación inicial:

Figura 5. Variante propuesta por el estudiante E4 a la tarea del puzle

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle.

Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Determina la longitud de los lados desconocidos x, y, z, m y n usando los ángulos dados y el teorema de Pitágoras.



El contexto de dicho problema ya no es el de proporcionalidad. La solución que desarrolla se basa en la aplicación sucesiva del Teorema de Pitágoras, a la que el estudiante asigna incorrectamente nivel 3 de algebrización —«asociamos a esta tarea un nivel 3 de algebrización pues aparecen ecuaciones con variables y se realizan operaciones con ellas».

6. REFLEXIONES FINALES

Para terminar, volvemos a enfatizar nuestro motivo para este capítulo. Las últimas décadas han visto una proliferación de nuevas teorías dentro de la investigación en educación matemática, y esto conduce a una preocupación por establecer más vínculos entre los distintos modelos teóricos y las herramientas que proporcionan, en particular, para propósitos de diseño. A lo largo de este trabajo, hemos planteado la necesidad de desarrollar en los profesores de matemáticas una competencia específica, relativa al análisis de las prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de tareas matemáticas. Otros autores han abordado este tema desde otras perspectivas teóricas, por ejemplo, Fernández, Llinares y Valls (2012; 2013), Buforn, Llinares y Fernández (2018), usando también tareas relacionadas con la proporcionalidad. Los resultados de estas investigaciones, revelan limitaciones en la comprensión de los significados de los conceptos matemáticos de los futuros profesores a pesar de que conocieran y emplearan los procedimientos vinculados correctamente, proponiendo como objetivo potenciar en los programas de estudio la comprensión conceptual de las matemáticas escolares en los alumnos. Como señalan estos autores, es importante promover en los futuros profesores la flexibilidad en el uso de múltiples métodos para resolver los problemas que involucran relaciones de proporcionalidad.

El análisis que nosotros realizamos está apoyado en la herramienta configuración ontosemiótica del EOS, al considerar que permite un nivel de análisis más microscópico y sistemático de la actividad matemática. Se considera que el profesor de matemáticas debe conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, interpretando los significados en términos de sistemas de prácticas, lo cual facilita la consideración de dichos sistemas como nuevos objetos de análisis y reflexión. Además, la identificación de los objetos y procesos implicados en la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan, permitirá al profesor comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización necesarios y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

El foco de atención de este trabajo ha sido el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa para desarrollar conocimientos y competencia para el análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas, particularizado a una tarea de proporcionalidad. Los resultados nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados. Este reconocimiento se considera, no obstante como clave para que los profesores estén capacitados para la implementación de procesos de estudio de las matemáticas que promuevan la competencia matemática de los estudiantes.

Observamos que la acción formativa implementada ha mejorado la competencia de los futuros docentes (comparándola con los resultados de Burgos et al., 2017) para identificar los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, así como también para reconocer de manera pertinente los distintos niveles de algebrización puestos en juego. También se observa mejora en la formulación de variantes pertinentes de un problema dado, y en el reconocimiento del papel que el procedimiento empleado, el lenguaje y el grado de generalidad, tienen en dicho proceso.

El estudio de caso descrito como ejemplo de diseño formativo ha revelado, no obstante, las dificultades que tienen los futuros profesores para apropiarse de la herramienta teórica configuración ontosemiótica. Esperamos que este capítulo motive la realización de nuevas experimentaciones, empleando más tiempo para iniciar discusiones prolongadas con los futuros profesores y lograr un nivel adecuado de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo PAI, FQM 126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L, Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(3), 113-135.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluver.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23,* 229-251.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham, y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York, NY: Routledge.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM-Mathematics Education, 44*, 747-759.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441-468.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM*, (13), 39-61.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2), 89-105.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-25.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1109-1132.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En, F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds*.), Handbook of international research in mathematics education* (3rd edn., pp. 275-296). New York, NY: Routledge.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds*.), Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). Ithaca, NY: SUNY Press.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). Columbus, OH: The Ohio State University.

Rivas, M. y Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere, 14*(48), 189-205.

Rivas, M., Godino J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26*(42B), 559-588.

Sadler, D. R. (2013). Making competent judgments of competence. En S. Blömeke, O. Zlatkin-Troitschanskaia, C. Kuhn y J. Fege (Eds.), *Modeling and measuring competencies in higher education: Tasks and challenges* (pp. 13-27). Rotterdam, The Netherlands: Sense

Simon, M. y Blume, G. (1994). Mathematical modelling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 183-197.

Thomson, P. W. y Thomson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 279-303.

Thomson, A. G. y Thomson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 2-24.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

LA COMPETENCIA PROFESIONAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EJERCICIO EN COSTA RICA

THE PROFESSIONAL COMPETENCE OF IN-SERVICE MATH TEACHERS OF SECONDARY EDUCATION IN COSTA RICA

Lupiáñez, J. L.[1], Loría, J. R.[2]

[1]*Universidad de Granada, España* [2]*Universidad Nacional, Costa Rica*

RESUMEN

El marco de la reciente reforma curricular en matemáticas en Costa Rica, propone la aplicación de un modelo de currículo que persigue el logro y el fortalecimiento de una serie de habilidades y capacidades cognoscitivas para conducir el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. En este trabajo analizaremos la competencia profesional de profesores de matemáticas de Educación Secundaria para promover ese aprendizaje funcional en el aula, después de desarrollar con ellos una propuesta formativa con base en esa reforma. Para ello, fundamentamos y diseñamos un programa de formación para profesores en ejercicio y elaboramos un protocolo de observación de prácticas de enseñanza para evaluar el impacto de esa formación en esa competencia profesional de los docentes.

Palabras clave: *currículo de matemáticas, competencia matemática, competencia profesional del profesor, formación de profesores de matemáticas, observación de aula.*

Lupiáñez, J. L. y Loría, J. R. (2019). La competencia profesional de profesores de matemáticas de educación secundaria en ejercicio en Costa Rica. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 263-284). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The framework of the recent curricular reform in mathematics in Costa Rica proposes the application of a curriculum model that pursues the achievement and strengthening of a set of skills and cognitive capabilities to lead the development of the mathematical competence in students. In this paper, we will analyze the professional competence of mathematics teachers of Secondary Education to promote this functional learning in the classroom, after developing with them a formative proposal based on that reform. For this, we base and design a training program for in-service teachers and we elaborate a classroom observation protocol of teaching practices to evaluate the impact of that training in teachers' professional competence.

Keywords: *math curriculum, mathematical competence, teachers' professional competence, education of mathematics teachers, classroom observation.*

INTRODUCCIÓN

Un sistema educativo brinda a cada individuo «el medio más adecuado para construir su personalidad, desarrollar al máximo sus capacidades, conformar su propia identidad personal y configurar su propia comprensión de la realidad, integrando la dimensión cognoscitiva, la afectiva y la axiológica» (MEC, 2006, p. 17158). Por esta razón, los cambios y las necesidades sociales que se producen en países avanzados, suelen tener marcadas implicaciones en sus respectivos sistemas educativos y es en las sociedades modernas, donde el sistema educativo tiene en el currículo su principal fundamento, estructurado como propuesta de planificación y actuación educativa (Rico y Lupiáñez, 2008).

En un currículo se concretan una serie de principios epistemológicos, pedagógicos y psicopedagógicos que, en su conjunto, encauzan y definen la orientación general del sistema educativo correspondiente (Jonnaert, Barrette, Masciotra y Yaya, 2008). También se consideran y organizan una gran variedad de conocimientos y se atiende a la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de cada disciplina, entre ellas las matemáticas. La noción de currículo es también importante para la labor del profesor (Lupiáñez, 2014). Niss (2011) caracteriza un modelo de profesor competente para enseñar matemática, dentro del cual destaca una faceta curricular que debe formar parte de sus conocimientos y habilidades: analizar, evaluar, relacionar e implementar programas formativos y currículos. También son reconocidas las implicaciones de las directrices y recomendaciones curriculares en las actividades de aula: «Lo que sucede en el aula es también, en buena medida, el resultado de factores, procesos y decisiones que tienen su origen en otros ámbitos o niveles como, por ejemplo, (...) el currículo» (Coll y Sánchez, 2008, p. 21). Cuando se aíslan las directrices curriculares de, por ejemplo, la labor del profesor, surgen problemas e inconvenientes que van precisamente en detrimento de esa propuesta curricular (Harris y Burn, 2011).

La base de la reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (MEP, 2012), constituye una reorganización de calado de las principales dimensiones y elementos curriculares, dotándoles de una gran cohesión y profundidad, que en su conjunto evidencia una apuesta explícita por el desarrollo de la sociedad costarricense en toda su amplitud y complejidad. Esta reforma, que ofrece una respuesta al fracaso escolar en matemáticas presente en años anteriores, propone un programa curricular que persigue el logro y el fortalecimiento de una serie de habilidades para conducir el desarrollo de la competencia matemática de los escolares. Este programa, que destaca con solidez una visión funcional de las Matemáticas, emplea la noción de competencia como expectativa a largo plazo, y en su articulación se emplean supuestos y referencias clave sobre tareas de aprendizaje contextualizadas, grados de desempeño y niveles de complejidad de los procesos básicos de actuación en esta área.

Como señalan Gordon et al. (2009), el profesor es el actor principal en el cambio hacia un enfoque curricular basado en la noción de competencia y la implementación de este enfoque también depende, en gran medida, de la formación y la actitud de los profesores. Sin embargo, los profesores costarricenses arrastran debilidades de su formación inicial y manifiestan la ausencia de procesos continuos de capacitación (Alfaro, Alpízar, Morales, Ramírez y Salas, 2013); particularmente en la formación en contenidos matemáticos y su didáctica. Esta situación atenta con la implementación del nuevo currículo, por lo que el desempeño profesional y la calidad de la formación docente están en la mira. Actualmente, Morales-López (2017) destaca que la formación del profesorado, es una de las líneas prioritarias de actuación presentes en la Educación Matemática en Costa Rica.

En este trabajo definimos las nociones básicas que articulan el nuevo programa de Matemáticas en Costa Rica y presentamos una investigación en curso, centrada en la formación de profesores de matemáticas costarricenses en ejercicio. Esta investigación tiene como finalidad principal explorar el desarrollo de la competencia profesional de estos docentes para seleccionar y diseñar tareas que promueven y evalúan la competencia matemática de los escolares, en el contexto de un curso-taller de formación y su desempeño docente posterior.

COMPETENCIA PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS QUE PROMUEVE UN APRENDIZAJE FUNCIONAL EN EL AULA

El modelo funcional del aprendizaje matemático, visión principal que se da a las Matemáticas en el actual currículo costarricense, centra su atención en cómo los alumnos aplican los conocimientos, adquiridos mediante los contenidos matemáticos, para enfrentarse a situaciones de la vida real que le son familiares. Son tres las dimensiones que conforman el modelo funcional: tareas contextualizadas, herramientas conceptuales y las capacidades del sujeto cognitivo que trabaja. El sujeto cognitivo usa las herramientas que tiene a su disposición para aproximarse a las tareas, movilizando y manifestando su competencia al efectuar los correspondientes procesos cognitivos (Rico y Lupiáñez, 2008).

De esta manera, la base que organiza los planes de estudio en cada ciclo y año lectivo son los conocimientos matemáticos y las habilidades en torno a ellos que se espera sean aprendidos. Se plantean cinco áreas matemáticas: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidad. En cuanto a las habilidades, son clasificadas en específicas y generales; las primeras relacionadas a la capacidad o saber en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento) y las segundas consideradas como generalizaciones de las primeras. Las habilidades específicas expresan expectativas de aprendizaje para cada año escolar, mientras que las habilidades generales lo hacen para cada ciclo educativo. Las habilidades siempre están asociadas a conocimientos matemáticos, y se sugiere agruparlas de manera que se trabajen tanto en la actividad de aula, como en la evaluación.

La profundidad y el valor del aprendizaje esperado, están en función de la variedad de conexiones y de la riqueza simbólica de los conocimientos matemáticos que se movilizan y de la dificultad de los problemas que se abordan. Tareas y conocimientos admiten diferentes niveles; por ello las actuaciones de los estudiantes pueden presentar distintos rangos de dominio y satisfacer en distinto grado las habilidades y capacidades cognoscitivas superiores enunciadas. El aprendizaje matemático se detecta y confirma delimitando actuaciones que hacen uso de unos conocimientos y dan respuesta a unas tareas determinadas. En los programas se han incluido diferentes ejemplos de tareas que evidencian la activación de habilidades genéricas y específicas, lo cual pone manifiesto un alto nivel de compromiso por dotarle de coherencia y profundidad desde un punto de vista pragmático.

La noción de *proceso matemático* resulta también clave en los programas de la reforma y en los posteriores modelos de evaluación propuestos (Ruiz, 2017). Estos procesos, que no dependen de áreas matemáticas, expresan modos de actuación para resolver e interpretar problemas y el fomento de su puesta en juego conduce y articula el desarrollo de la competencia matemática de los escolares. La definición de competencia matemática hace referencia a la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos y los procesos hacen operativa esta noción, pues describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas y, de ese modo, resolverlo. Los procesos de la reforma son: «Razonar y argumentar», «Plantear y resolver problemas», «Conectar», «Comunicar» y «Representar», con un significado muy próximo al adoptado en el marco del proyecto PISA.

El planteamiento y la resolución de problemas constituye la estrategia metodológica principal del programa de matemáticas, y relacionada con ésta se propone la contextualización activa como eje disciplinar que propugna la importancia de que los escolares resuelvan problemas en contextos reales, pues pueden incentivar que realicen conexiones e integren un conjunto de conocimientos para proponer soluciones creativas y estratégicas (MEP, 2012).

Barrantes (2015) concluye que la noción anterior implica proponer a la clase un problema, que pueda ser trabajado por los estudiantes mediante el uso de los conocimientos y habilidades previamente adquiridos, y que sirva como vehículo para introducir nuevos conocimientos, métodos y habilidades.

Moreno y Ramírez (2016) afirman que una tarea matemática escolar es significativa cuando ayuda a los estudiantes a que expresen y mejoren sus concepciones o significados parciales sobre determinados contenidos matemáticos, y es auténtica cuando la situación extraescolar de la vida real con la que se introduce la tarea puede ser reproducida o simulada de forma razonablemente realista. Según Maaβ (2006) las tareas pueden clasificarse de acuerdo a su autenticidad y la relevancia de las cuestiones que plantean; se puede hablar de contextualización activa en tareas cuyo diseño involucra el uso de contextos auténticos y cuestiones relevantes.

Por otra parte, los problemas deben poseer suficiente complejidad para provocar una acción cognitiva que no sea simple (MEP, 2012). La organización de la lección se debe pensar considerando la relación directamente proporcional entre los diferentes niveles de complejidad en los problemas matemáticos y las oportunidades para realizar procesos matemáticos y nutrir el progreso de la competencia matemática.

Resumiendo, la resolución de problemas como estrategia pedagógica es sustrato de un estilo de acción de aula cuyo enfoque debe centrarse en el aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) más que en el aprendizaje de métodos o estrategias para plantear y resolver problemas. Lo que se espera es una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico. Esto apela al diseño y a la selección de tareas que sirvan para la construcción de aprendizajes dentro de una lección (o secuencia de ellas), promoviendo múltiples aportes estudiantiles y docentes, donde haya una participación activa y una construcción colectiva de significados, para así activar procesos matemáticos que hagan progresar la competencia matemática. Consecuentemente se sugiere un estilo para organizar las lecciones que considera el establecimiento de dos etapas que se pueden distinguir por los propósitos de la enseñanza y aprendizaje. La etapa 1, donde se promueve la introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos siguiendo cuatro pasos o momentos centrales: propuesta de un problema, trabajo estudiantil independiente, discusión interactiva y comunicativa, y clausura o cierre. Y la etapa 2, donde se movilicen, apliquen y evalúen los conocimientos aprendidos.

Asimismo, el enfoque principal de resolución de problemas como estrategia metodológica conlleva a un cambio en el proceso evaluativo, que comienza con el replanteamiento del quehacer educativo y la forma en que se planifican, desarrollan y evalúan las actividades educativas. Bajo esta visión la evaluación es considerada como parte integral del proceso de enseñanza y aprendizaje; debe estar adaptada al estilo de organización de las lecciones. Además, su propósito se centra en la recopilación de información válida y confiable que permita determinar hasta qué punto se logran las habilidades, destrezas o competencias propuestas en los programas de estudio. En este sentido, se facilita la acción docente en la toma de decisiones prontas y oportunas orientadas al mejoramiento del desempeño estudiantil.

La evaluación debe inscribirse dentro de situaciones portadoras de sentido y que provoquen un determinado desequilibrio cognitivo (MEP, 2012). Es decir, la situación que se plantea debe representar un desafío que provoque el esfuerzo estudiantil para darle respuesta, poniendo en práctica conocimientos, habilidades, destrezas y competencias. Potenciar ítems de desarrollo tanto en la evaluación de aula como en la macroevaluación da oportunidades a una evaluación más cercana al nuevo enfoque curricular (Ruiz, 2015); la macroevaluación debería tener gran correlación con la evaluación de aula.

REFORMA CURRICULAR, ACTIVIDAD DOCENTE Y FORMACIÓN DEL PROFESOR

La visión de la educación matemática que propugna la reforma del programa de matemáticas en Costa Rica, obliga a un planeamiento cuidadoso de las lecciones, involucrando la selección de los problemas, los tiempos a destinar para cada paso, y la acción docente en cada momento (el profesor debe jugar un papel central en la interacción social y cognitiva en el aula). Además, su uso debe ser flexible, lo que dependerá de las condiciones y del contexto de aula, así como del nivel educativo en que se enseña. En esta línea, Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) consideran que,

> la planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades (p. 8).

Castro (2008) por su parte, señala que los profesores de matemáticas, ante una reforma curricular, utilizan las disposiciones de los programas de estudio como punto de partida para planear sus lecciones, pero son sus concepciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje quienes determinan las decisiones relacionadas con aspectos de la instrucción. En este sentido, Demonte (2013) destaca la importancia del profesor y afirma que su desarrollo profesional es el enlace entre el diseño y la implementación de una reforma curricular y constituye su éxito en el entorno escolar. Además, sostiene que desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje no se logra exclusivamente mediante el ejercicio de la práctica de enseñar; es necesario brindar a los profesores actividades de apoyo para alcanzar esa mejora. Asimismo, Fullan (2005) argumenta que el cambio educativo se logra mediante la reflexión sobre la práctica, la interacción y el intercambio de ideas que promueven la cohesión de grupo, y la mejora continua en el aprendizaje profesional.

Pero el proceso para concretar e implementar un cambio curricular de calado, no es sencillo ni inmediato. Ruiz (2015) reconoce que asumir el estilo de organización de las lecciones tratado en la reforma curricular, invoca una experticia docente que no ha sido generada hasta ahora por las instituciones formadoras. Las concepciones erróneas o imprecisas que tengan los docentes sobre nociones tratadas en la reforma, podrían influir de manera desfavorable el abordaje que hagan del enfoque metodológico sugerido. En este sentido es en el que defendemos la importancia de la formación del profesorado: el profesor juega un papel preponderante en la concreción de esas nociones en la realidad de aula, y necesita de formación pertinente para lograrlo.

Las experiencias e iniciativas de desarrollo profesional deben realizarse con el objetivo de mejorar la calidad de la enseñanza de los profesores de matemáticas en ejercicio (Sowder, 2007) y permitir que los profesores reflexionen sobre su conocimiento y sus creencias (Climent y Carrillo, 2003). Niss (2011) señala que para fomentar su desarrollo profesional debe participar en cursos y conferencias, investigar y realizar proyectos, reflexionar sobre su propia actividad docente y mantenerse actualizado acerca de nuevas tendencias en investigación y práctica. Estas actividades profesionales proporcionan a los docentes directrices para que personalicen las orientaciones curriculares a las necesidades que perciben e identifican en sus alumnos (Caraballo, 2014). Por ejemplo, Sullivan, Clarke y Clarke (2013) aseguran que el conocimiento didáctico que posee un profesor se refleja en la manera como selecciona, elabora y usa las tareas matemáticas escolares.

Por lo tanto, definimos el conocimiento didáctico del contenido matemático como el conjunto de conocimientos y capacidades que ponen en juego los profesores para aplicar las nociones de la visión funcional de las matemáticas, tratadas en la reforma curricular, en el diseño y selección de tareas dirigidas al desarrollo y evaluación de la competencia matemática.

UNA INVESTIGACIÓN EN CURSO

La puesta en marcha de la reforma del Programa de Estudio de Matemáticas en Costa Rica, ha requerido el diseño y la activación de varias medidas, entre las que destacan promover la formación de profesores (Ruiz y Barrantes, 2016), de asesores (Poveda y Morales, 2015), elaborar materiales de apoyo (Ruiz, 2017), y difundir directrices, recomendaciones y redes de colaboración (como las que se encuentran en www.reformamatematica.net), entre otras.

También la investigación puede contribuir a analizar el diseño, la puesta en práctica y las implicaciones de esta reforma curricular, y en este caso nos gustaría sintetizar algunas de las evidencias que se han encontrado en una investigación en curso, a pesar de que en estos momentos nos encontramos en pleno análisis de resultados.

La investigación tiene como objetivo general describir y analizar la naturaleza y la dirección de los cambios producidos en los conocimientos, capacidades y actitudes en profesores de matemáticas en ejercicio, acerca de su práctica docente en el contexto de la reforma curricular vigente en Costa Rica tras la participación en un curso-taller centrado en las nociones clave de esa reforma.

En lo que sigue, describimos el diseño y los destinatarios del curso, su implementación del curso-taller, así como el método de análisis de la información y algunos resultados incipientes.

Diseño del curso-taller

El curso *Diseño y selección de tareas pertinentes para desarrollar y evaluar la competencia matemática* fue elaborado por el equipo de investigadores, y proviene de la visión funcional del aprendizaje de las matemáticas escolares.

El contenido se determinó a partir del marco conceptual de la reforma curricular de los programas de matemáticas en Costa Rica. El tema central del curso y sobre el que se enfatizaron las sesiones, fueron las características de las tareas matemáticas escolares y su adecuación al modelo funcional del aprendizaje basado en competencias.

El curso estaba formado por 10 sesiones de tres horas de duración cada una, para un total de 30 horas presenciales, además de 55 horas para completar los trabajos no presenciales y 15 horas dedicadas exclusivamente a completar el trabajo final; el curso requirió de 100 horas para completarse exitosamente.

En cuanto a los contenidos del curso, siguiendo un planteamiento deductivo desde los principios generales a las propuestas específicas, se presenta en primer lugar los conceptos básicos tratados en el currículo, en segundo lugar, todo lo concerniente a las tareas matemáticas escolares, y en último lugar, modelos específicos de tareas que desarrollan y evalúan la competencia matemática y sus respectivos criterios de valoración. Las tareas que se propusieron a los profesores participantes incluían lecturas críticas de secciones específicas del currículum, valoración de tareas y secuencias de enseñanza dadas y demandas de ejemplos propios o elaboración de criterios de valoración de tareas en términos de competencias, entre otras.

El diseño del curso-taller fue validado por expertos: el director del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, una profesora del Departamento de Formación de Profesores de la Universidad de Costa Rica, un profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España, y una profesora de la Universidad Metropolitana de Puerto Rico (mencionada anteriormente como una de las asesoras del curso). Partiendo de la propuesta de Caraballo (2014), diseñamos un cuestionario tipo Likert organizado en cinco secciones, cada una de las cuales contenía características óptimas para el diseño de un curso: Pertinencia para el profesorado de Costa Rica, Adecuación y selección de contenidos, Calidad técnica, Viabilidad de la propuesta y Evaluabilidad de la propuesta. El cuestionario se envió por correo electrónico y las respuestas se recibieron en una semana.

Implementación del curso-taller

Durante esta fase implementamos el programa formativo diseñado, recogimos información sobre su desarrollo para revaluar y revisar de manera continua las actividades propuestas y organizamos la información que eventualmente sería analizada. La recogida de información se realizó mediante la aplicación de los siguientes instrumentos: cuestionario inicial, observación y registro de las presentaciones de los trabajos producidos por los participantes, registro de sus aportaciones e intervenciones personales con relación a los temas y conceptos presentados, reflexiones escritas de los participantes, grabaciones de audio, trabajo final presentado por los participantes y cuestionario de evaluación final del curso. Como parte de esta fase también tuvo lugar la revisión y reformulación del diseño del curso mediante observación crítica, continua y cíclica, de los contenidos curriculares y las estrategias de enseñanza. El carácter iterativo de esta revisión se sintetizó en cuatro momentos: planificación de cada una de las sesiones, intervención en el aula, observación de los procesos y reflexión del equipo de investigadores. Se matricularon en el curso-taller diez profesores de diferentes provincias, si bien solo 9 asistieron finalmente. De ellos, ocho eran profesores en ejercicio en algún centro educativo costarricense. La mayoría trabajaban en centros privados y contaban con pocos años de experiencia profesional; la mediana de años de experiencia era tres.

La secuenciación de los contenidos en las sesiones del curso implicó desarrollos parciales en dimensiones concretas de la competencia profesional que al finalizar la implementación denominamos momentos. Estos momentos estuvieron demarcados por la secuencia temporal de las sesiones y se determinaron a partir del progreso en los conocimientos, capacidades y actitudes del profesorado manifestado en los procesos que llevaron a cabo durante las actividades propuestas en el curso; estos cambios nos aportaban indicios de posible desarrollo profesional y se consideraron como puntos de inflexión. Particularmente nos centramos en la evolución de aspectos conceptuales relacionados con las nociones curriculares de competencia y de tarea matemática escolar y su aplicación en el diseño y selección de tareas para promover y evaluar la competencia matemática. A cada uno de estos momentos se asoció una característica específica en términos de los contenidos conceptuados, las tareas realizadas y la información recabada durante los mismos. Identificamos cinco momentos determinantes en el desarrollo del curso: momento inicial, momento 1, momento 2, momento 3 y momento final.

El momento inicial (MI) ocurrido en una sesión preliminar al inicio del curso y durante la primera sesión, permitió determinar las condiciones específicas a partir de las cuales cada participante se integró en la dinámica del curso en términos de sus conocimientos y actitudes sobre los antecedentes y el marco conceptual que encuadraba el curso. El momento 1 (M1) transcurrido durante las sesiones segunda, tercera, cuarta y quinta, facilitó la conceptualización y caracterización de tareas matemáticas escolares de acuerdo con la fundamentación teórica del currículo. El momento 2 (M2) se concretó en la sesión sexta y constituyó un balance intermedio del curso. El momento 3 (M3), que transcurrió en las sesiones séptima, octava, y la primera mitad de la novena, favoreció a que los profesores de aproximaran con mayor profundidad y recibieran información sobre el diseño y selección de tareas que evaluaran la competencia matemática. En el momento final (MF), que comenzó en la segunda mitad de la sesión novena y culminó junto con el curso en la sesión décima, los profesores pusieron en acción el conjunto de conocimientos adquiridos para diseñar una prueba para evaluar la competencia matemática y establecer sus respectivos criterios de valoración.

Valoración del impacto del curso-taller

En esta fase recolectamos información que nos permitiera determinar el impacto del programa de formación en la práctica docente de los profesores; cómo el aprendizaje adquirido y las capacidades desarrolladas influyen en su desempeño diario. De forma particular nos centramos en los cambios en su competencia para diseñar y seleccionar tareas que desarrollen y evalúen la competencia matemática de los alumnos, provocados por la experiencia de desarrollo profesional.

Para ello confeccionamos una plantilla de observación de prácticas de enseñanza, tomando en consideración las nociones curriculares básicas y las categorías de observación que emplean Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras (2013) en sus experimentos de enseñanza. Además, elaboramos instrumentos para valorar los planeamientos y las evaluaciones diseñadas por los profesores durante el periodo de observación; se usa como referencia para su elaboración las características óptimas que deberían tener estos documentos según las directrices curriculares.

La selección de los profesores observados obedece a su desempeño durante el curso y la actitud que mostraron a lo largo de este; escogimos cuatro docentes en cuyas intervenciones y producciones ponían de manifiesto un interés particular en mejorar sus prácticas de enseñanza. Además, se escoge una profesora que no había participado en el curso para contrastar que los cambios manifestados por los primeros, si los había, se debían en mayor parte por el diseño e implementación del programa formativo. Del total de profesores observados dos trabajan en el mismo colegio, el cual es de carácter público. Los otros tres profesores trabajan en colegios privados, y pueden asumir con mayor flexibilidad el currículo oficial.

El periodo de observación se efectúo tres meses después de la implementación del curso, tiempo suficiente para que los profesores pudieran manifestar cambios en sus prácticas de aula. Las observaciones se extendieron durante seis semanas, del 26 de febrero al 13 de abril de 2018, sin considerar la Semana Santa. Cada profesor fue observado durante dos semanas, para un aproximado de cinco episodios de observación de aula por profesor; uno de los investigadores participó como observador no participante en todos los episodios y se tiene el registro de audio o de video de la mayoría de ellos.

En términos generales, el análisis de información que realizamos recorre sucesivamente cuatro etapas: recogida con la ayuda de instrumentos variados durante el trabajo de campo; organización por medio de transcripción, categorización, codificación y descripción; procesamiento a través de técnicas propias del Análisis de contenido; e interpretación por medio de la identificación de patrones (Miles, Huberman y Saldaña, 2014). Con el propósito de garantizar que la información obtenida fuera consistente y considerar todos los ángulos posibles de acuerdo a nuestros objetivos, procedimos a una triangulación metodológica entre diferentes documentos: producciones escritas del curso, registro de las observaciones de aula, planeamientos y evaluaciones diseñados por los profesores.

RESULTADOS

En este apartado presentamos el análisis de la información recogida para documentar los cambios en el conocimiento, capacidades y actitudes del grupo de profesores, sobre el diseño y selección de tareas adecuadas para desarrollar y evaluar la competencia matemática, que se producen durante su participación en el programa de formación descrito. Organizamos la presentación de resultados de acuerdo a los momentos determinantes en el desarrollo del curso: momento inicial, momento 1, momento 2, momento 3, y momento final; y al periodo de valoración del impacto del programa de formación en la práctica docente de los profesores. Las fuentes de información asociadas a cada uno de estos momentos fueron analizadas para describir la naturaleza de los cambios percibidos por los profesores y si, en efecto, estos cambios pueden relacionarse con su participación en las actividades realizadas durante la experiencia de desarrollo profesional.

En el momento inicial logramos identificar los conocimientos, las capacidades y las actitudes de los profesores sobre aspectos teóricos y metodológicos del currículo costarricense a tratar en el curso. Por medio del cuestionario inicial y las primeras reflexiones escritas indagamos sobre la noción de competencia como innovación curricular, la selección de tareas, el desarrollo de la competencia matemática en los alumnos y la evaluación de los aprendizajes. Además, exploramos las creencias e intereses personales y profesionales que motivaron su participación en la experiencia de desarrollo profesional.

Tanto la encuesta como las reflexiones tuvieron formato de cuestionario abierto con aseveraciones para ser completadas. Recibimos respuesta de todos los profesores inscritos. Para efectos de su análisis, las preguntas las agrupamos de acuerdo al contenido o concepto con el que se relacionan y la finalidad que persiguen. Al organizar las respuestas a las preguntas y extraer los enunciados significativos encontramos amplia variedad en las respuestas. Un análisis minucioso de éstas nos permitió sintetizarlas y definir categorías y subcategorías. A partir de dicho análisis destacamos que los profesores identifican como focos de conocimiento y de interés: la resolución de problemas como estrategia metodológica, la contextualización activa como elemento que da sentido funcional a las Matemáticas, los conocimientos y las capacidades de los estudiantes en términos de habilidades, y la evaluación del aprendizaje escolar.

Cuando puntualizamos estos aspectos encontramos que los profesores reconocen la utilidad práctica de la noción de competencia como parte integral del currículo. Un profesor indicó: *Introducir la noción de competencia en el currículo favorece el aprendizaje de los estudiantes porque les permite desarrollar una serie de habilidades y capacidades necesarias para enfrentar problemas reales, de su entorno.* Pero ignoran su importancia como elemento curricular. Por ejemplo, uno de los profesores señaló: *Para promover el aprendizaje de los estudiantes es suficiente con contextualizar los conceptos por medio de situaciones reales, mostrando a los estudiantes la utilidad que tiene la matemática en su vida.* Este tipo de razonamiento desmerita el papel de otros elementos del currículo, que en su articulación son fundamentales para el desarrollo de la competencia matemática escolar, como los procesos matemáticos y las habilidades.

Además, manifiestan desconocimiento de los aspectos tanto conceptuales como técnicos del diseño y selección de tareas adecuadas para desarrollar y evaluar la competencia matemática. Particularmente, en las reflexiones hechas por los profesores se evidenció una concepción de tarea distinta a la que se entiende en el currículo. Para ellos una tarea correspondía a una asignación de actividades que deben ser resueltas fuera del tiempo lectivo con el propósito de reforzar los conocimientos estudiados en clase; la mayoría de las veces se considera la resolución de listas de ejercicios donde se fomente la reproducción de procedimientos aprendidos.

Asimismo, las respuestas de la encuesta inicial sugieren que los profesores seleccionan tareas y planifican sus clases a partir de aquellos aspectos que consideran importantes como las características de los alumnos y el logro de su aprendizaje, los recursos disponibles (libros de texto, planes de estudio, el tiempo) y las expectativas de aprendizaje. Comprendemos que los profesores poseen conocimiento adecuado sobre aspectos que deben priorizarse para desarrollar la competencia matemática. No obstante, el papel que le dan a las tareas para desarrollar esta competencia no es claro, lo cual aportó indicios de la necesidad de los profesores de conocer sobre el diseño, la selección y el análisis de tareas matemáticas. Esta necesidad también se pone de manifiesto en los intereses profesionales de los profesores que motivaron su participación en el curso. Además de mejorar sus procesos de enseñanza, los profesores se refirieron a expectativas relacionadas con aprender a seleccionar, desarrollar, mejorar y valorar tareas.

Por otro lado, consideran que la macroevaluación en el sistema educativo costarricense se limita a medir el dominio de contenidos, por lo que se ven limitados a priorizarlos en su acción de aula. Un profesor manifestó: *La adquisición del conocimiento matemático es el aspecto que considero en la evaluación de los aprendizajes de mis clases. Tanto en la clase como en los exámenes trato de presentar los contenidos como se presentan en las pruebas nacionales de matemática, usando diferentes formas para resolver un problema.* Este tipo de respuestas nos da indicios de que la macroevaluación juega un papel importante en el quehacer de los profesores. Los patrones observados durante el momento inicial del curso corroboraron la necesidad de mejorar el conocimiento sobre el marco conceptual de la reforma y de recibir formación específica para lograr diseñar y seleccionar tareas que permitan planificar la mediación y la evaluación.

En el momento 1 logramos conceptualizar y caracterizar las tareas matemáticas escolares. Los profesores reflexionaron sobre los criterios que utilizan para seleccionar tareas que desarrollen la competencia matemática, y los elementos que las deben constituir, manifestando un progreso en el concepto de tarea. En las últimas sesiones de este momento, un profesor señaló que: *Una tarea matemática escolar es una actividad que el profesor propone para que en su resolución el estudiante use las matemáticas aprendidas.* Otro profesor agregó: *Las tareas deben ser demandas cognitivas estructuras y en su diseño intervienen variables como el contenido matemático, las habilidades, los procesos matemáticos, el contexto y los niveles de complejidad.*

Estas afirmaciones están respaldadas por los resultados que obtuvimos a partir del análisis de los trabajos no presenciales asignados en este momento. Los trabajos no presenciales constituyen la fuente de información principal relativa al logro de los objetivos del curso. Estas tareas grupales informan sobre el dominio de los profesores en el diseño y la selección de tareas y del avance en su conocimiento didáctico. Los trabajos eran propuestos al final de cada una de las sesiones y discutidos al inicio de la sesión siguiente. Por medio de ellos pretendíamos que los profesores profundizaran en las nociones sujetas a reflexión y aplicaran los conceptos tratados durante el desarrollo de las sesiones.

La valoración de las producciones de los grupos está fundamentada sobre la reflexión que hicimos acerca de las expectativas de aprendizaje, consideradas en la relación entre las habilidades, los procesos y las competencias, y de las oportunidades de aprendizaje, en términos de tareas matemáticas; según la visión funcional de las matemáticas tratadas en la reforma curricular. Las funciones, variables y características de las tareas fueron el centro de nuestra reflexión. Como describimos en el marco teórico de este estudio el conocimiento didáctico del contenido es comprendido como el conjunto de conocimientos, capacidades y actitudes que los profesores ponen en juego al aplicar las nociones del currículo cuando diseñan, seleccionan y analizan tareas dirigidas a desarrollar y evaluar la competencia matemática.

El análisis de los trabajos no presenciales asociados a este momento demostró que, a medida que el curso se desarrolló, los profesores ampliaron y profundizaron sus conocimientos sobre el modelo funcional de aprendizaje matemático adoptado por el currículo de matemáticas costarricense. Además, mejoraron sus capacidades para vincular habilidades, procesos y competencias, justificar esta vinculación y, conceptualizar variables de tarea (áreas matemáticas, contextos, niveles de complejidad).

El momento 2 constituyó un balance intermedio del curso y, mediante la reflexión propuesta, los profesores deliberaron sobre la utilidad de lo aprendido hasta el momento para su práctica profesional. La utilidad que destacaron fue la comprensión del vínculo entre las nociones básicas de la reforma curricular. Un profesor explicó: *Antes de estar en el curso yo sabía que el aprendizaje se daba cuando los contenidos, las habilidades y los procesos se relacionaban al resolver un problema de la vida cotidiana pero no sabía cómo relacionar estos conceptos al proponer una tarea. Ahora comprendo que la competencia es algo que se desarrollará a través de los procesos a los que se enfrentan los alumnos en las tareas, las cuales deben ser enmarcadas en un contexto o situación real; los procesos movilizan las habilidades que determinan las competencias.*

En el momento 3 logramos conceptualizar y caracterizar las tareas para evaluar la competencia matemática y aplicar las variables de tarea estudiadas en el diseño y selección de este tipo de tareas. Las reflexiones asociadas a este momento ponen de manifiesto que los profesores han adquirido conocimiento para valorar las funciones de las tareas matemáticas escolares según sus características y de acuerdo con el propósito para el cual fueron diseñadas, y para diseñar por su propia cuenta tareas pertinentes tanto para desarrollar competencias como para evaluarlas. Al finalizar este momento un profesor mencionó que: *Las tareas matemáticas escolares pueden clasificarse según queramos usarlas, ya sea como medio para promover el aprendizaje o como herramienta para la evaluación.* Otro profesor indicó que: *Las tareas para promover la competencia matemática son diferentes a las tareas que evalúan competencias porque las primeras guían al estudiante a dar significado y utilidad al conocimiento matemático, la mayoría de veces en situaciones problemáticas nuevas, mientras que las segundas se proponen para aplicar esos conocimientos en problemas similares a los trabajados en clase. En el diseño de ambas tareas las variables estudiadas juegan un papel importante.*

En los trabajos no presenciales correspondientes al momento 3 y al momento final los profesores profundizaron en la caracterización de las variables de tarea, mejoraron su comprensión de estas, su capacidad para aplicarlas en el análisis de tareas para desarrollar y evaluar la competencia matemática y su conocimiento didáctico sobre el diseño y selección de tareas adecuadas para desarrollar y evaluar esta competencia. El avance en el conocimiento didáctico de los profesores es consistente con el manifestado durante los procesos reflexivos propuestos.

En la Figura 1 mostramos una tarea para evaluar la competencia matemática, diseñada y presentada por uno de los grupos en el último trabajo no presencial del curso. La tarea evidencia el progreso en el conocimiento didáctico de los profesores participantes del curso.

Figura 1. Tarea para evaluar la competencia matemática

El Túnel Zurquí es el más grande de Costa Rica, este túnel fue construido dentro de una montaña con el fin de conectar la provincia de San José con la de Limón, con una altura de 10 m y 12 m de ancho, el Ministerio de Obras Públicas desea saber cuál es la máxima altura que puede ingresar un vehículo para que pueda transitar y no tenga problemas en chocar contra el túnel o contra otro vehículo.

a) Realice un dibujo que modele la situación anterior
b) Determine la fórmula que modela la situación anterior
c) Calcule la medida del largo y del alto que no debe sobre pasar un vehículo para pasar por el túnel Zurquí
d) ¿Cuál debe ser el ancho de cada carril para que dos automóviles pasen sin problemas?

El análisis de la tarea incluye una caracterización de la misma en términos de las variables estudiadas en el curso: el contenido matemático tratado, las habilidades específicas asociadas al contenido, las habilidades de carácter más general vinculas a las habilidades específicas, el contexto en el que se ubica la tarea, los procesos matemáticos que intervienen y el nivel de complejidad de la tarea a partir de la estructura de intervención de los procesos matemáticos. Además, crearon una plantilla con criterios de corrección para valorar el desempeño de los alumnos al realizar la tarea.

Además, en el momento final administramos el cuestionario de evaluación del curso; el cual fue contestado por todos los profesores matriculados. Su propósito fue conocer la opinión y el grado de satisfacción de los profesores sobre aspectos conceptuales y técnicos del curso, documentar la interpretación de los profesores sobre los acontecimientos y procesos del curso en general y obtener sugerencias para su mejora. La encuesta consistió en un cuestionario con 22 preguntas, distribuidas en dos partes. La primera parte constó de 14 preguntas cerradas que se contestaron mediante una escala de satisfacción de Likert. La segunda parte estuvo constituida por ocho preguntas abiertas, dirigidas a informar sobre la utilidad para la práctica docente de lo aprendido y sobre los cambios sugeridos tanto al contenido temático como a los procesos en general. Para garantizar la confidencialidad de las respuestas, la encuesta se contestó anónimamente y las respuestas de cada uno de los encuestados se identificaron mediante un código.

Las preguntas cerradas de la primera parte se organizaron en una tabla de frecuencias y, en base a éstas, se calcularon porcentajes. Las preguntas abiertas de la segunda parte se estudiaron mediante técnicas de análisis de contenido, de modo similar a como se hizo con la encuesta inicial del curso.

Los profesores expresaron satisfacción con las estrategias, aspectos técnicos, metodología y conceptualización de los contenidos tratados durante el curso y afirmaron estar dispuestos a aplicar los conceptos aprendidos en su práctica docente. Destacaron la oportunidad para practicar lo aprendido, el trabajo colaborativo y el ajuste de los temas desarrollados a la realidad educativa. Además, manifestaron que conocer y aplicar las variables de tarea en el diseño, selección y análisis de tareas fue lo más útil del curso. Considerar las variables de tarea y profundizar el concepto de tarea fueron algunos cambios que los profesores consideraron apropiados. Estas afirmaciones refuerzan la elección de la dinámica del curso como plan efectivo de formación y confirman esta elección como una decisión acertada, asimismo nos dan indicios de que los profesores vieron cumplidas sus expectativas de mejora profesional.

No obstante, opinan que un aspecto que debe mejorarse es la extensión del curso. Un profesor explicó: *El curso ha sido excelente, pero me hubiese gustado que se extendiera por mucho más tiempo, que durará lo que tarda un típico curso universitario,* *de tal manera que podamos hacer más exposiciones y estudiar más tareas*. La duración de la experiencia profesional debería ser mayor a cuatro semanas de tal manera que exista mayor margen de trabajo independiente entre una sesión y otra, y se puedan desarrollar más actividades en cada sesión presencial. Consideramos que la información proporcionada es valiosa para revisar el diseño y el desarrollo del curso y para introducir mejores en ediciones futuras. En otro orden de ideas, propusimos las reflexiones escritas como fuente de información para ponderar la perspectiva y reacciones de los profesores sobre los conceptos que serían presentados en cada sesión del curso. Redactadas siempre en forma de pregunta abierta, las propuestas hechas a los profesores les proporcionaron la oportunidad de expresar sus conocimientos, capacidades, creencias y actitudes. Las respuestas obtenidas en ellas se estudiaron mediante técnicas de análisis de contenido, de modo similar a como se hizo con las fuentes de información detalladas anteriormente. Con los patrones observados, podemos afirmar que los profesores profundizaron en aspectos centrales del curso y mejoraron su conocimiento didáctico gradualmente.

Además, los profesores expresaron haber cumplido las expectativas establecidas al inicio de la experiencia en cuanto al análisis y la caracterización de tareas matemáticas escolares como medio para promover y evaluar la competencia matemática de sus alumnos, y manifestaron que la dinámica del curso y las herramientas adquiridas en este, les permitió reflexionar sobre su labor docente y la de otros compañeros, por lo que la percepción que tenían sobre su competencia profesional mejoró; expresan sentirse más dispuestos para aplicar lo aprendido en el aula valorando así el curso como experiencia de desarrollo profesional.

Finalmente, los planeamientos, las evaluaciones escritas y los reportes de observación constituyen la fuente de información para determinar el impacto del programa de formación en la práctica docente de los profesores; cómo el aprendizaje adquirido y las capacidades desarrolladas influyen en su desempeño diario. Estos documentos fueron valorados a partir de la reflexión que hicimos sobre las prácticas de enseñanza y las características óptimas que deberían tener los planeamientos y las evaluaciones escritas según las directrices curriculares. La información obtenida fue estudiada mediante técnicas de análisis de contenido. Las funciones, variables y características de las tareas fueron el foco de nuestra reflexión. El estudio de las prácticas de aula de los profesores observados y el análisis de sus planeamientos y evaluaciones, evidenció que el aprendizaje adquirido y las capacidades desarrolladas en el curso influyen en la acción de aula de los profesores.

Se encontraron diferencias significativas en el abordaje y diseño de los planeamientos; cada profesor debe acoger las normas oficiales del colegio correspondiente. En relación con la congruencia entre el diseño de los planeamientos analizados y el modelo de planeamiento sugerido en el currículo, los profesores de colegios públicos se apegan estrictamente a las disposiciones curriculares, por su parte, los planeamientos de los profesores de colegios privados coinciden con algunas nociones del modelo curricular, pero presentan diferencias marcadas en cuanto a fundamentación y formato. Esta diferencia ha constatado una dificultad inherente al profesorado que trabaja en centros privados. En esos casos, las directrices de organización y funcionamiento internas obligan a los docentes a realizar unas planificaciones de acuerdo a criterios particulares, que necesariamente no van en consonancia con las prioridades establecidas en los programas de Matemáticas. En algunos casos aparecen nuevas nociones organizadoras que no se describen conceptualmente, pero que sí debe ser ejemplificadas para cada curso o nivel. En varios de esos casos, los profesores deben realizar una planificación paralela en la que detallan las ideas, secuencias, ejemplos y enunciados de tareas, que son los que realmente tratarán en el aula.

Así, todos los profesores observados utilizan el planeamiento como un instrumento que organiza la instrucción, sin embargo, muchos de ellos complementan su uso con otros documentos como cuadernos de apuntes elaborados por ellos mismos o registros de actividades para respaldar las decisiones relacionadas con la instrucción, garantizando la concordancia entre lo planificado y lo que hacen en el aula. En estos documentos los profesores que participaron en la experiencia de desarrollo profesional profundizan en el conocimiento desarrollado en el curso, y vinculan lo propuesto en la reforma curricular, conceptual y metodológicamente, con las disposiciones que dictan sus respectivos colegios para abordar la acción de aula. La profesora que no participó en el programa de formación realiza un análisis pobre de las características de las variables de tareas que selecciona para trabajar en el desarrollo de la lección; se limita a proponer solo los problemas que se sugieren en los programas de estudio, considera las habilidades como fines logrados, determina la complejidad de una tarea a partir de cómo se plantean las cuestiones y prioriza la adquisición del contenido matemático sobre el desarrollo de la competencia matemática.

Con respecto al diseño de las evaluaciones escritas, en todos los instrumentos estudiados se sigue priorizando la evaluación de contenidos. No obstante, se evidenció la incorporación de algunas tareas para evaluar la competencia matemática con características trabajadas en el curso para este tipo de tareas. En la Figura 2 presentamos una tarea para evaluar la competencia matemática diseñada por uno de los profesores durante el periodo de observación. La tarea demuestra el impacto del curso en el quehacer docente de los profesores.

Figura 2. Tarea diseñada por uno de los profesores para una evaluación escrita

LA FERIA DEL AGRICULTOR

Todos los domingos, Rafael un agricultor va a la feria a vender frutas. Recolectó los datos de ventas del mes y obtuvo lo siguiente: Vendió 50 manzanas a 150 colones a cada una, 75 naranjas a 80 colones cada una y 200 melones a 800 colones cada uno.

1. ¿Cuál es el promedio de las frutas que vendió?

2. ¿Cuál es la ganancia promedio de un mes?

3. Rafael incorporó en sus ventas: cocos. En un determinado mes vende 89 cocos a 425 colones cada uno. Él quiere evaluar si la ganancia por mes mejora al introducir este producto. Ayude a Rafael si la venta de cocos

El análisis de la tarea incluye una caracterización de la misma en términos de las variables que la componen y los criterios de selección que deben cumplir las tareas de evaluación; nociones estudiadas durante el desarrollo del curso. Además, describen los criterios de corrección respectivos para valorar el desempeño de los alumnos al realizar la tarea. En términos generales, los profesores son conscientes del desarrollo profesional vivido, pues así lo expresaron en las reflexiones finales del curso-taller y también lo evidenciaron durante las jornadas de seguimiento en los centros, cuando explicaban y justificaban las planificaciones realizadas y las sesiones que imparten.

CONCLUSIONES

Concluimos así que los profesores participantes del programa formativo evidenciaron progreso en su conocimiento didáctico durante el desarrollo de las sesiones del curso y adquirieron capacidades y conocimientos todos ellos vinculados con su competencia profesional. Los profesores manifestaron mejora en su conocimiento sobre la noción de competencia como componente curricular, y ampliaron su comprensión del modelo funcional del aprendizaje matemático como base del currículo y de la utilidad de los conceptos considerados en este. Además, expresaron la importancia de potenciar el aprendizaje de sus alumnos y, profundizaron en el conocimiento sobre tareas matemáticas escolares y su función en los procesos de planeamiento, aprendizaje de sus alumnos y organización del trabajo docente. Asimismo, adquirieron conocimientos para incluir tareas matemáticas que promuevan y evalúen la competencia matemática en su acción de aula; particularmente cuentan con herramientas teóricas y prácticas para diseñar un instrumento pertinente que valore el desarrollo de la competencia matemática.

La participación activa de los profesores durante las actividades del curso, así como las interacciones entre ellos y su disposición permanente de compartir conocimientos y estrategias durante la realización del curso y posterior a este, evidencian su progreso en la capacidad para ser profesores reflexivos sobre sus prácticas de aula y las de sus colegas. La participación voluntaria de los profesores al curso como experiencia profesional que surge de haber identificado la necesidad de adquirir conocimiento sobre los temas y conceptos discutidos, y su satisfacción con los cambios manifestados a través de la experiencia formativa, hacen al curso que diseñamos e implementamos un recurso efectivo de desarrollo profesional.

El currículo de Matemáticas de la reforma educativa de Costa Rica, propone un compendio completo en el tiempo y en la materia, de exposición sosegada y pormenorizada, donde se van desgranando conceptos y matices importantes, la terminología necesaria para manejarlos, su génesis, sus fundamentos y recomendaciones para su desarrollo posterior. Pero también se han incluido secciones dedicadas a desarrollar la praxis de esta propuesta con numerosos ejemplos que serán de gran utilidad para el profesorado. Es muy relevante también el hecho de que este modelo curricular se sustente en las necesidades más prioritarias de la realidad sociocultural de Costa Rica, pues debe convertirse en referencia clave para orientar la política educativa de este país y dar coherencia a todas las estrategias de renovación, formación y asesoramiento de los centros educativos y de los equipos docentes que en ellos desarrollan su labor.

Un currículo funcional que plantea como prioridad formativa el desarrollar estudiantes competentes, constituye, en sí mismo, una marcada implicación, un apasionante reto y un compromiso de futuro. Pero establecer en los documentos normativos

> la competencia matemática sobre un enfoque funcional no es más que un primer paso, que no tiene virtualidad propia sólo por su inclusión en los documentos normativos. La competencia matemática hay que encuadrarla en el conjunto de un marco curricular, conectarla con el resto de sus componentes y hacerla actuar en el conjunto del sistema (Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 214-215).

Los estudios e investigaciones que se realicen ahora pueden jugar un papel muy relevante en cada uno de los componentes y agentes del sistema. La necesidad de documentar y acreditar iniciativas, dificultades, avances e inquietudes, es ahora absolutamente prioritaria.

REFERENCIAS

Alfaro, A. L., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez O. y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Número especial, noviembre. Costa Rica.

Barrantes, H. (2015). Acciones en Costa Rica para potenciar la integración de habilidades y conocimientos en la implementación curricular. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 10*(13), 37-52.

Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Castro, A. (2008). Planning for Mathematics Instruction: A Model of Experienced Teachers Planning Processes in the Context of a Reform Mathematics Curriculum. *The Mathematics Educator, 18*(2), 11-22.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional: Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias, 21*(3), 387-404.

Climent, N., Romero, J.M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (2013). Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula. *Relime, 16*(1), 13-36.

Coll, C. y Sánchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación, 346*, 15-32.

Demonte, J. (2013). *High-Quality Professional Development for Teachers: Supporting Teacher Training to Improve Student Learning.* Washington, DC: Center for American Progress.

Fullan, M. (2005). *Leadership and sustainability: System thinkers in action.* Thousand Oaks, CA: Corwin P.

Gordon, J., Halász, G., Krawczyk, M., Leney, T., Michel, A. Pepper, D., Putkiewicz, E. y Wisniewski, J. (2009). *Key Competences in Europe: Opening Doors for Lifelong Learns across the School Curriculum and Teacher Education*. Warsaw: Center for Social and Economic Research.

Harris, R. y Burn, K. (2011). Curriculum theory, curriculum policy and the problem of III-disciplined thinking. *Journal of Education Policy, 26*(2), 245-261.

Jonnaert, P., Barrette, J. Masciotra, D. y Yaya, M. (2008). La competencia como organizadora de los programas de formación: hacia un desempeño competente. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado, 12*(3), 1-32.

Lupiáñez, J.L. (2014). Competencias del profesor de educación primaria. *Educação & Realidade, 39*(4), 1089-1111.

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113-142.

Miles, M., Huberman, A. y Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis.* Thousand Oaks, CA: Sage P.

MEP (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas.* Costa Rica: autor.

MEC (2006). Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo. *BOE, 106*, 17158-17207.

Morales-López, Y. (2017). Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers. En Á. Ruiz (Ed.), *Mathmatics Teacher Preparation in Central America, and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominic Republican and Venezuela* (pp. 39-56). Cham: Springer.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 243-258). Madrid: Pirámide.

Niss, M. (2011). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 6*(9), 13-24.

Poveda, R. y Morales, Y. (2015). Desafíos del Asesor Regional de Matemáticas ante la Reforma en Educación Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 13*, 67-78.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA, 58,* 7-23.

Ruiz, A. (2015). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 10*(13), 15-33.

Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 12*, 1-307.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (2016). Desafíos para la formación inicial de docentes ante los programas oficiales de matemáticas en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *14*, 9-81.

Sowder, T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: NCTM.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning.* New York: Springer.

LA COMPETENCIA DIGITAL EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

DIGITAL COMPETENCY BY PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS

Carvajal, S., Giménez, J., Font. V. y Breda, A.
Universitat de Barcelona

RESUMEN

En este capítulo se estudia y caracteriza el nivel de competencia digital de un grupo de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria. Para ello, se discute una rúbrica de evaluación basada en categorías del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. A partir del análisis de la reflexión sobre su propia práctica se confirma un conjunto de once indicadores asociados a seis categorías: lo epistémico, cognitivo, interaccional, afectivo, ecológico y de análisis didáctico. Se presentan evidencias de niveles de desarrollo para cada una de las dimensiones propuestas en la herramienta. Lo que permite inferir unos perfiles de desarrollo para cada una de las dimensiones propuestas en la herramienta. El hecho de que nadie alcanza el nivel más alto, indica que el programa de formación no ha proporcionado experiencias suficientes sobre los diferentes usos de las herramientas digitales en el aula de matemáticas.

Palabras clave: *educación matemática, competencia digital, enfoque ontosemiótico.*

Carvajal, S., Giménez, J., Font, V. y Breda, A. (2019). La competencia digital en futuros profesores de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 285-306). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

This chapter studies and characterizes the level of digital competence of a group of future professors of Secondary Mathematics. To do this, an evaluation header based on categories of the ontosemiotic approach to knowledge and mathematical instruction is discussed. Based on the analysis of the reflection on their own practice, a set of eleven indicators associated with six categories is confirmed: the epistemic, cognitive, interaction, affective, ecological and didactic analysis. Evidence of development levels is presented for each of the dimensions proposed in the tool. Which allows inferring development profiles for each of the dimensions proposed in the tool. The fact that no one reaches the highest level indicates that the training program has not provided sufficient experiences about the different uses of the digital tools in mathematics classrooms.

Keywords: *mathematics education, digital competency, ontosemiotic approach.*

PROBLEMÁTICA

Investigaciones recientes ponen de relevancia la importancia del análisis de competencias profesionales en futuros profesores, y entre ellas, la digital. Hablar de la competencia digital es una cuestión de interés social que preocupa a gobiernos, a empleados, a padres y a madres, y a la sociedad en su conjunto. En efecto, las transformaciones sociales y económicas que se están desarrollando en el siglo XXI, imponen criterios y orientan las demandas para el sistema educativo preparando para el trabajo (Hoyles et al., 2010). En este capítulo pretendemos caracterizar niveles de desarrollo de la competencia digital de futuros profesores de Matemáticas a partir de sus producciones de reflexión sobre una práctica.

MARCO TEÓRICO

Drijvers (2013) indicaba en varios de sus estudios cuan de importante es que el uso de la tecnología esté integrado en un contexto educativo que sea coherente y en el que el trabajo con tecnología se integre de forma natural. Para este autor existen tres factores que son decisivos en la integración exitosa de la tecnología en educación matemática: el diseño, el papel del profesor y el contexto educativo.

De acuerdo con Seckel y Font (2015) consideramos que el punto de partida para el desarrollo y evaluación de una competencia profesional debe ser una tarea que produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el futuro profesor o el profesor en servicio debe movilizar habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica (o acción) que intente dar solución al problema.

La Unión Europea considera que:

> La competencia digital entraña el uso seguro y crítico de las tecnologías de la sociedad de la información para el trabajo, el ocio y la comunicación. Se sustenta en

> las competencias básicas en materia de TIC: el uso de ordenadores para obtener, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, y comunicarse y participar en redes de colaboración a través de Internet (INTEF, 2013, p. 9).

Eso implica, una mirada profesional que permita identificar necesidades de uso de recursos digitales, tomar decisiones informadas sobre las herramientas digitales más apropiadas según el propósito o la necesidad, resolver problemas conceptuales a través de medios digitales, usar las tecnologías de forma creativa, resolver problemas técnicos, actualizar su propia competencia y la de otros. Para mostrarse competente en lo digital, consideramos que el futuro profesor sabe analizar las propias necesidades en términos tanto de uso de recursos, herramientas como de desarrollo competencial, asignar posibles soluciones a las necesidades detectadas, adaptar las herramientas a las necesidades personales y evaluar de forma crítica las posibles soluciones y las herramientas digitales. Y teniendo en cuenta que a un profesor de matemáticas se le exige innovación y creatividad, se supone que:

> El futuro docente de matemáticas debe poder innovar utilizando la tecnología, participar activamente en producciones colaborativas multimedia y digitales, expresarse de forma creativa a través de medios digitales y de tecnologías, generar conocimiento y resolver problemas conceptuales con el apoyo de herramientas digitales (INTEF, 2017, p. 41).

Para el análisis evaluador de la competencia digital en educación matemática, consideramos como esquema a priori, cinco dimensiones basadas en los niveles de análisis de idoneidad de los procesos de estudio, según el enfoque ontosemiótico (Godino, 2011). *Dimensión epistémica*: uso y control de informaciones sobre los objetos matemáticos y su enseñanza /aprendizaje (lo digital que contribuye a las configuraciones epistémicas puestas de manifiesto); herramientas de almacenamiento y co-construcción de significados matemáticos y de educación matemática (elementos de lo digital que tienen a ver con interacciones y recursos). *Dimensión cognitiva*: en cuanto a la contribución de lo digital a los procesos reflexivos del alumnado (correspondiente a la idoneidad cognitiva en EOS). También, el uso de herramientas como por ejemplo ayudas representacionales; tutoriales basados en el árbol de problema; y, en cuanto lo didáctico: propuestas de estudios de caso, colecciones de recursos, experiencias de investigación, elementos de evaluación y artículos de apoyo. *Dimensión afectiva*: en cuanto la idoneidad emocional y normativa se piensa en el desarrollo de elementos motivacionales en el proceso de instrucción. *Dimensión interaccional*: como contribución de lo digital en procesos de co-construcción de significados matemáticos y de educación matemática (contribución de medios digitales en el fomento de significados institucionales a partir de los significados personales). *Dimensión ecológica*: En cuanto se analiza lo ético y las restricciones posibles del entorno.

METODOLOGÍA

Para observar el resultado de la competencia en la práctica de formación, se decide realizar un estudio de caso sobre el análisis de la competencia digital en una experiencia concreta. Los estudios de casos, debido a la complejidad y variedad de los procesos y contextos educativos, tienen un valor particular para los investigadores en el ámbito educativo (Stake, 2007), dado que se caracterizan por su orientación hacia la comprensión profunda del *cómo* y *por qué* de una entidad bien definida como una persona, un aula, un curso, una institución o un programa educativo (da Ponte, 2006). Para reconocer como se desarrolla la competencia digital se decide analizar 40 trabajos finales (a partir de ahora, TFM) del Master Interuniversitario de formación de profesores de Secundaria de Matemáticas de Catalunya (a partir de ahora, MFPSM) escogidos de forma arbitraria en el curso académico 2015-2016. En efecto, los TFM son significativos de la reflexión realizada sobre la consideración de lo digital en su práctica.

En este contexto de formación, lo digital no es un objetivo principal, sino secundario, y se incluye formalmente en una parte pequeña de la asignatura de innovación e investigación del bloque didáctico. Trasversalmente, se muestran algunos ejemplos de uso, y se presenta el papel de la programación de applets con ejemplos en Java o el uso de Scratch. Y, por último, se espera que se aprenda a usar otras herramientas en las experiencias de Practicum. En cuanto los objetivos en las diferentes asignaturas, se dice que se promueve la comunicación audiovisual y multimedia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así como el uso del Moodle como plataforma virtual de trabajo colaborativo y a distancia.

Dado que este modelo de formación es posterior a la formación científica, algunos de los estudiantes han conocido herramientas digitales en su trabajo anterior, antes de ser profesores. Es el caso de economistas que han trabajado con programas de contabilidad, o arquitectos o ingenieros que han usado Autocad u otros programas para representar construcciones.

Para realizar el análisis y mostrar los resultados correspondientes se considera ante todo los indicadores de evaluación de la competencia digital elaborada a priori por el equipo investigador con el que se evaluó a los futuros profesores de la muestra, correspondiente a las dimensiones aludidas anteriormente. Se explica cómo se codifican y puntúan las evidencias correspondientes a los indicadores y la asignación del nivel de competencia digital a partir de esa codificación inicial. Por último, se ejemplifica una parte de la rúbrica definitiva elaborada.

Indicadores a priori

En una asignación a priori, se consideran 11 indicadores, correspondientes a las seis dimensiones que se han considerado para caracterizar la competencia digital a lo que se añade una componente profesional como es la conciencia del uso de lo digital en el análisis didáctico. A continuación, se concretan las dimensiones e indicadores considerados.

- Dimensión *epistémica*. Usa o crea medios digitales específicos para dar significado a contenidos matemáticos (i1) y usa los medios digitales para establecer relaciones entre el conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas matemáticos (i2). Almacena y comunica matemáticas mediante herramientas digitales (i3) y además interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social (i4).
- Dimensión *cognitiva*. Usa los medios digitales para reconocer la idoneidad cognitiva de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje (i5).
- Dimensión *afectiva-normativa*. Usa los medios digitales para reconocer la idoneidad afectiva y normativa de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje (i6).
- Dimensión *interaccional***.** Reconoce el valor interaccional del uso de los medios digitales que utiliza (i7).
- Dimensión *ecológica-ética*. Reconoce el valor ecológico del uso de los medios digitales que utiliza (i8). Asume una conciencia ética en el uso de lo digital en el aula de matemáticas (i9).
- Dimensión *análisis didáctico, innovación e investigación***.** Contrasta, evalúa e integra información matemática o de educación matemática en formato tecnológico más allá del simple repositorio para hacer innovaciones y mejoras en su práctica (i10). Y reconoce el valor epistémico y didáctico del uso de los medios digitales que utiliza (i11).

Aunque sabemos que las dimensiones son de distinta naturaleza, pensamos que para una asignación de nivel consideraremos todos los indicadores con la misma importancia en cuanto al nivel global de competencia digital.

En cada uno de los textos, se observan indicios de comentarios asociados a los distintos indicadores. Se codifican las respuestas encontradas como se observa en la Tabla 1.

Tabla 1. Codificación en textos parciales del futuro docente FP39 y asignación de puntaje

Textos parciales	Código	Asignación
Crear una aplicación en forma de juego es un gran reto, este ha de ser atractivo y motivador, pero a la vez ha de incluir las herramientas matemáticas que se quieren practicar	i6	2
Para llamar la atención y el interés de los alumnos el juego tiene que tener un objetivo, una finalidad más allá de las matemáticas.	i11	3
Este nuevo recurso incentiva el trabajo individual fuera del aula ya que es una forma más lúdica de resolver problemas….	i10	1
«*La aplicación creada también tiene un apartado específico al menú principal para practicar problemas, de esta forma no es necesario pasar por toda la historia para hacer ejercicios de trigonometría y prepararse, por ejemplo, para el examen*»…	i2 i5	1
He hecho una búsqueda de aplicaciones como la que he propuesto, pero no he encontrado ninguna adecuada para el nivel de la ESO. También he buscado información sobre este tipo de recursos y los que he encontrado son test similares a los del Moodle o aplicaciones que se basan en problemas de geometría sin contextualizar. Además, la mayoría de estos recursos no son compatibles para el móvil.	i11 i11	1
Finalmente hemos decidido crear las bases del recurso que proponemos para este trabajo. (…) Para que los alumnos utilizaran la aplicación, es necesario que les resulte atractiva. Pensé que para conseguirlo la mejor manera era preguntarles a ellos mismos mediante una encuesta anónima.	i6	

Una vez realizadas las asignaciones a los textos, se atribuyen estos resultados a cada uno de los futuros docentes. Se decide asignar puntuaciones de 0 a 3, según el número de alusiones que se dan a los diferentes indicadores que se pueden ver en diferentes momentos del trabajo de los estudiantes. Se ajusta este resultado en base a las posibilidades de una mayor calidad de estas asignaciones. Estos ajustes permitirán posteriormente, para cada uno de los indicadores, describir y caracterizar los niveles en forma de rúbrica.

En la Tabla 2 que se muestra a continuación, se explicitan los ajustes iniciales que se hacen en cada uno de los indicadores según el nivel de profundidad de las aportaciones. Para ello asumimos que en un desarrollo competencial se dan tres niveles de logro: usa, justifica y aplica o integra (Zabalza, 2003; INTEF, 2017).

Tabla 2. Ajustes y criterios de puntuación asignada a cada una de las dimensiones

Ind	Puntuación 1	Puntuación 2	Puntuación 3
	Existe una única evidencia	Existen dos evidencias	Tres o más evidencias,
i1	Usa recursos digitales del curso	Justifica el valor de los recursos	Desarrolla recursos nuevos
i2	Establece relaciones con el contenido	Justifica las relaciones	Plantea nuevas relaciones
i3	Almacena informaciones digitales	Incorpora comunicación	Relaciona formatos
i4	Usa interacciones virtuales	Justifica	Incorpora interacciones
i5	Busca conocer alumnado	Justifica las propuestas	Elabora e inventa
i6	Busca motivar con herramientas digitales	Justifica	Profundiza y relaciona
i7	Interacciona	Relaciona y valora	Propone redes
i8	Reconoce variables del entorno en el uso de lo digital	Relaciona variables del entorno	Desarrolla variables
i9	Reconoce lo ético	Establece relaciones	Desarrolla lo ético
i10	Contrasta información	Evalúa información	Integra información
i11	Reconoce la importancia de lo epistémico	Valora lo epistémico	Desarrolla relaciones

La puntuación 0 se indica en los casos en los que no aparece ninguna evidencia sobre un determinado indicador.

La asignación la hace el equipo investigador en su totalidad, buscando las coincidencias entre todos en cuanto a la interpretación de asignaciones. A continuación, se explica la aplicación de los criterios de un profesor en mayor detalle.

Asignación de evidencias para un futuro profesor

Para mostrar cómo se ha realizado la asignación de evidencias a los indicadores en el caso de un futuro profesor, y ver que se dan niveles en el uso de lo digital, se toma el ejemplo del trabajo de un futuro profesor llamado FP39. El futuro profesor FP39 implementa su unidad didáctica sobre Trigonometría en un grupo de 4º ESO.

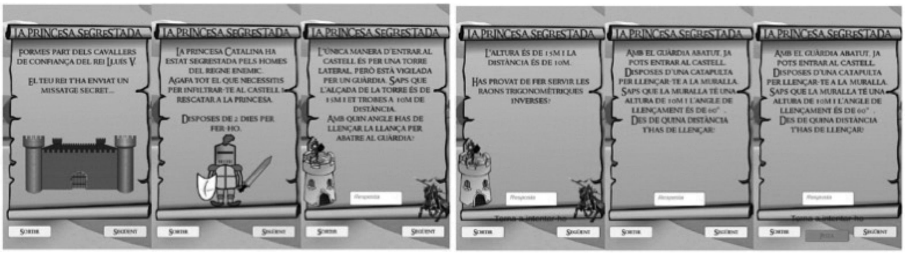
Sobre la dimensión epistémica hemos constatado que este futuro profesor c*rea y usa contenidos matemáticos específicos con medios digitales en diversos momentos*. En efecto, desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos. El futuro profesor cita textualmente:

> *Cada vez es más habitual encontrar aplicaciones que te enseñen cualquier tema que se quiera estudiar, por eso, he creado una aplicación de trigonométrica con el objetivo de facilitar su estudio. La aplicación tiene dos secciones diferenciadas, una donde se ponen en práctica ejercicios estándares generados aleatoriamente y otra donde hay ejercicios contextualizados dentro una historia ficticia.*

Reconocemos que no sólo está usando lo digital, sino que lo hace conscientemente, y organiza algo que no copia de otro trabajo ya realizado. Además, usa los medios digitales para establecer relaciones entre el conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas matemáticos como se ve en el comentario siguiente y se percibe en la Figura 1.

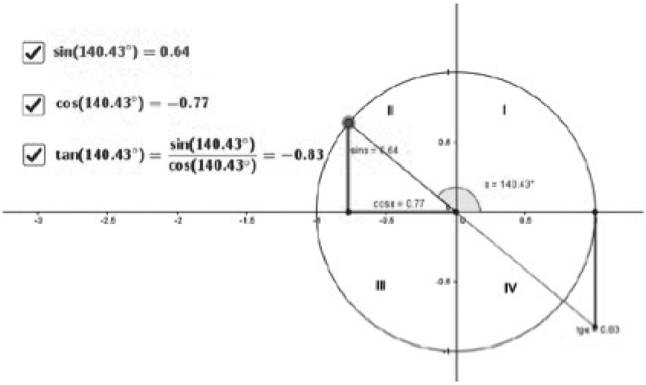
> (…) *Se ha considerado que la mejor forma de hacer este juego es creando una historia donde la trigonometría sea vital para que el personaje avance en la historia. Este personaje tiene que completar misiones en donde se enfrentará a diferentes retos que tendrá que superar para poder pasar de nivel.*

Figura 1. Capturas de pantalla del modo historia de la aplicación que se inventa.



Además, en otro fragmento del TFM indica: «*Se utilizó la calculadora en todo momento como herramienta indispensable para calcular las razones trigonométricas. Además, se facilitaron dos programas de GeoGebra para que los alumnos pudieran trabajar con más facilidad la circunferencia goniométrica*». Aunque es cierto que no especifica cómo se usó en el aula, se ve que usa el programa para visualizar la representación de las razones trigonométricas en el círculo unidad como se puede ver en la Figura 2. Los estudiantes perciben no sólo el valor numérico sino el significado del cociente cuando el denominador es 1. Se ve que, al mover el ángulo, cambia el valor. Y da la oportunidad a que los alumnos perciban propiedades de las razones como por ejemplo que el seno de un ángulo y su suplementario son iguales.

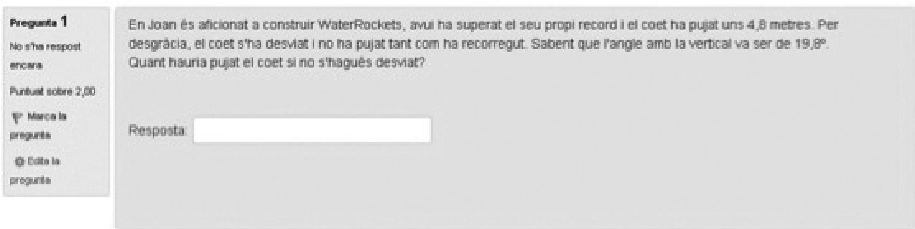
Figura 2. Captura de pantalla de la aplicación de GeoGebra utilizada para ver los valores de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes



Aunque es cierto que se hizo un uso clásico de cuestionarios de tipo evaluativo con el formato de Moodle como se ve en Figura 3, prepara actividades específicas para la unidad de trabajo mediante la herramienta de Moodle, que explica el futuro docente como se muestra a continuación.

En el Moodle también se incluyó un cuestionario con diferentes preguntas en las que los números de los enunciados se generaban de forma aleatoria. Las preguntas eran una muestra representativa del temario de trigonometría que tenían que saber de cara al examen.

Figura 3. Captura de pantalla del cuestionario del Moodle



Hemos considerado que en los indicadores i1 e i2, le asignamos un puntaje de 3 porque hemos observado incluso más de 3 veces estos indicadores. En efecto, desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y/o diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos más allá de los que se proponen en la formación.

En relación al uso de las herramientas digitales para fomentar conocimiento matemático, este futuro profesor selecciona diferentes dispositivos/servicios para almacenar los recursos digitales y/o la información matemática (repositorios, fórums, blogs, etc.). En efecto (1) colgó los programas de GeoGebra que creó en el repositorio de la aplicación, (2) utilizó el Moodle como herramienta para almacenar toda la información matemática relevante de la unidad didáctica que implementó y (3) creó un programa online en el que se repasaban todos los conceptos de trigonometría que se habían trabajado en la unidad didáctica. Por ejemplo, cita textualmente:

> *Las listas de problemas que se prepararon se subieron al Moodle con el objetivo de que los alumnos pudieran resolver en casa los problemas que no les había dado tiempo de acabar en clase. Posteriormente, se subían las soluciones para que pudieran autocorregirse.*

A pesar de haber encontrado tres alusiones en el indicador 3, no usa modos de interacción para crear conocimiento matemático compartido en formato digital para ser apropiado por otros. Pensamos que podría haber hecho más en el uso de herramientas como elaboración de wikis, o glosarios que permitirían un desarrollo más profundo. Según el criterio descrito, le asignaríamos un nivel 3. Consideramos que no alcanza lo que sería un comportamiento experto en el uso de lo digital. Este tipo de comentarios, avanza lo que posteriormente será la asignación más precisa de niveles en una rúbrica. También interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social ya que dice utilizar los foros del Moodle así como los mensajes privados para establecer contacto social con sus alumnos. Pero tampoco lo hace en alto nivel, puesto que podría haber desarrollado un grupo de discusión, o expresar la importancia de las intervenciones del foro, por ejemplo. Es decir, ha usado simplemente los medios digitales promovidos en el curso.

Respecto al indicador 4, le hemos asignado al profesor el puntaje de 1. porque tan sólo reconocemos una asignación que podría tener mayor profundidad.

En cuanto *la dimensión cognitiva el futuro docente que estamos analizando* sugiere desarrollos digitales más allá de simples asociaciones o respuestas cerradas, analizando los resultados en términos de las conexiones establecidas, y contextos usados. El futuro profesor cita textualmente: «*El recurso se ha programado de forma que se han de descifrar los retos para poder ir avanzando en la historia. La teoría se introduce en forma de pistas, que aparecen cuando se falla una respuesta dos veces*». Es decir, propone situaciones interesantes mediante lo digital para reconocer lo que están realizando los estudiantes y fomentar pensamiento crítico mediante el uso de recursos vinculados con la historia de las matemáticas. Pero no usa herramientas digitales (por ejemplo) para una evaluación pormenorizada o formativa. Tampoco se queda en propuestas elementales o superficiales. De acuerdo a lo propuesto como criterio, en el indicador i5 al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje de 2 sobre 3.

En cuanto la componente *afectiva,* existen evidencias de que el futuro profesor consigue que los alumnos se emocionen con las matemáticas e identifiquen significados matemáticos mediante el uso de medios digitales. El futuro profesor indica en uno de los párrafos del TFM cuando habla sobre el programa matemático que ha implementado:

> *Crear una aplicación en forma de juego es un gran reto, este ha de ser atractivo y motivador, pero a la vez ha de incluir las herramientas matemáticas que se quieren practicar. Para llamar la atención y el interés de los alumnos el juego tiene que tener un objetivo, una finalidad más allá de las matemáticas. Este nuevo recurso incentiva el trabajo individual fuera del aula ya que es una forma más lúdica de resolver problemas.*

Consideramos que en este caso un uso consciente debería promover actividades alternativas incluso autónomas. Por ello, en el indicador i6 (u*sa los medios digitales para reconocer la idoneidad afectiva y normativa de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje*) al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje de 2 sobre 3.

¿Qué sucede en la dimensión interaccional? En el indicador *Reconoce el valor interaccional del uso de los medios digitales que utiliza*, al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje de 1, ya que sólo indica que colabora con otros colegas usando formatos tradicionales obligados en el curso. Por ejemplo, utilizando el correo electrónico, el Moodle y el teléfono móvil para comunicarse con sus tutores de prácticas y con los compañeros del máster que realizan las prácticas en el mismo centro.

Veamos las evidencias de la dimensión *sobre lo ecológico y lo ético.* En el indicador i8 (*Reconoce el valor ecológico del uso de los medios digitales que utiliza*) al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje básico de 1 sobre 3, ya que usa los medios digitales para establecer análisis de variables que influyen en la enseñanza. El futuro profesor cita textualmente: «*La aplicación creada también tiene un apartado específico al menú principal para practicar problemas, de esta forma no es necesario pasar por toda la historia para hacer ejercicios de trigonometría y prepararse, por ejemplo, para el examen*».

En el indicador i9, *Asume una conciencia ética en el uso de lo digital en el aula de matemáticas* al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje 2 ya que entiende las normes básicas de conducta que rigen la comunicación con otros mediante herramientas digitales. El futuro profesor expone en su TFM

> *El centro de prácticas se considera un centro innovador ya que se adapta rápidamente a las nuevas tecnologías y se impulsan nuevas metodologías educativas. (…) En cuenta a la comunicación, los profesores dan feedback de algunas de las actividades planteadas en el aula a través de la plataforma Moodle.*

Observemos la componente de *análisis didáctico, innovación e investigación***.** En el indicador i10 *Usa, revisa y valora información en el análisis didáctico para tomar decisiones profesionales* al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje de 3 ya que vemos que contrasta, evalúa e integra información matemática o de educación matemática en formato tecnológico más allá del simple repositorio para hacer innovaciones y mejoras en su práctica. Al analizar la potencialidad del indicador, pensamos que el futuro profesor podría haber reflexionado más sobre el aporte de sus herramientas digitales al análisis reflexivo profesional. Podría haber realizado un mapa on line, por ejemplo, lo cual habría sido considerado con una mayor puntuación. Este aspecto pensamos que se matizará en una asignación de niveles.

En el indicador i11 (*Reconoce el valor epistémico y didáctico del uso de los medios digitales que utiliza*) al futuro profesor FP39 se le ha inferido un puntaje de tres ya que sugiere propuestas de mejora de la práctica que usan formatos digitales en base al análisis del efecto de los mediadores en el desarrollo epistémico y el análisis de la configuración y trayectorias didácticas para la resolución de conflictos epistémicos, semióticos, cognitivos, etc. Como se ve en las frases siguientes

> *He hecho una búsqueda de aplicaciones como la que he propuesto, pero no he encontrado ninguna adecuada para el nivel de la ESO. También he buscado información sobre este tipo de recursos y los que he encontrado son test similares a los del Moodle o aplicaciones que se basan en problemas de geometría sin contextualizar. Además, la mayoría de estos recursos no son compatibles para el móvil. Finalmente hemos decidido crear las bases del recurso que proponemos para este trabajo. (…) Para que los alumnos utilizaran la aplicación, es necesario que les resulte atractiva. Pensé que para conseguirlo la mejor manera era preguntarles a ellos mismos mediante una encuesta anónima.*

En este caso, se ha puntuado el indicador con 3 porque se dan más de tres evidencias que se asocian a características de alto nivel como se acaba de explicar.

Una vez otorgados los puntajes, para la consideración final, sumamos las asignaciones en los diferentes indicadores y a cada uno de los futuros profesores se le asocia un nivel global. Se hace así, porque se considera que los indicadores en una misma dimensión proporcionan una mirada complementaria. Y cada dimensión aporta un elemento diferente a constatar en la competencia digital global que asignaremos a cada futuro profesor. El detalle de la asignación se presenta en el apartado siguiente.

Asignación del nivel de competencia digital

Como se ha dicho, para cada indicador el puntaje varía de 0 a 3, Por lo tanto, la mayor puntuación que puede obtener un es la de 33 puntos. En nuestra tradición, la evaluación, aunque sea multidimensional, se traslada a un único digito o medida. De forma que las franjas de puntuación por niveles se han repartido de la siguiente forma: (nivel bajo) un futuro profesor posee un nivel 0 de competencia digital si ha obtenido un puntaje global de 7 o menor; (1) un futuro profesor posee un nivel 1 si ha obtenido un puntaje entre 8 y 14; (2) un futuro profesor posee un nivel 2 en la competencia si ha obtenido un puntaje entre 15 y 25 y (3) un futuro profesor posee un nivel 3 si ha obtenido un puntaje entre 26 y 33.

Después del reconocimiento de evidencias en los distintos indicadores, al futuro profesor FP39 se le asigna un puntaje que se asocia a un nivel intermedio de la competencia.

Rúbrica de evaluación de la competencia digital

A partir de las distintas evidencias encontradas por los 40 futuros profesores de la muestra, se reconoce la posibilidad de una rúbrica de asignación de niveles en los 11 indicadores descritos anteriormente que explicite las características asociadas a distintos niveles. Se muestra a continuación la parte que refiere a lo epistémico de dicha rúbrica. Se asocian los criterios que se observan en la Tabla 3 a las distintas evidencias observadas, tal como se ha explicado en el ejemplo del futuro profesor FP39.

En cuanto al indicador i2 veremos que no hay nadie que use medios digitales para relacionar conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas matemáticos.

Y difícilmente se prepara un análisis de la práctica con recursos digitales, aunque pensamos que un buen desarrollo de la competencia debería contemplar este aspecto. En el indicador i3 se percibe que difícilmente se encuentra quien use modos de interacción para crear conocimiento matemático compartido en formato digital que se sitúa en un espacio nuevo para ser apropiado por otros. De un modo parecido, consideramos que debemos conservar un nivel alto de la competencia digital en el indicador i4 si se valora y analiza el uso de medios interactivos digitales para tener un control del proceso de enseñanza/aprendizaje y autorregular el aprendizaje matemático. Aunque pensamos que no se dará en muchos casos.

Tabla 3. Indicadores de la dimensión epistémica

Descriptores	0	1	2	3
Crea y usa contenidos matemáticos específicos con medios digitales	No usa ni desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante formatos digitales. (i1)	Usa propuestas digitales realizadas por otros sin adaptaciones o con pocas adaptaciones; introduce propuestas en entornos cerrados (textos, tablas, imágenes, presentaciones, etc.) para establecer asociaciones, con objetivo de reconocer la adquisición de ideas u objetos matemáticos.	Usa instrumentos digitales para establecer relaciones entre conexiones, representaciones, etc. identificando las dificultades subyacentes y las implicaciones junto a otros mediadores.	Desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y/o diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos más allá de los que se proponen en la formación.
	No usa ni desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante formatos digitales. (i2)	Problematiza con herramientas digitales usadas como desarrollo de procedimientos específicos, o bien introduciendo significados parciales del contenido.	Modifica, perfecciona y combina los recursos existentes para crear contenido y conocimiento nuevo, original y relevante y establecer rediseños.	Usa medios digitales para relacionar conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas matemáticos. Prepara análisis de la práctica con recursos digitales.
Almacena y comunica matemáticas mediante herramientas digitales	No almacena información matemática mediante herramientas digitales. (i3)	Almacena en un único dispositivo/servicio los recursos digitales y/o la información matemática.	Gestiona, almacena y selecciona diferentes dispositivos/servicios en donde almacenar los recursos digitales y/o la información matemática (wikis, repositorios, fórums, blogs, etc.).	Usa modos de interacción para crear conocimiento matemático compartido en formato digital que se sitúa en un espacio nuevo para ser apropiado por otros.
	No comunica matemáticas mediante herramientas digitales.(i4)	Interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social.	Utiliza de forma consciente tecnologías y medios para los procesos colaborativos y para la creación y construcción común de recursos, conocimiento y contenido matemático.	Usa, valora y analiza el uso de medios interactivos digitales para tener un control del proceso de enseñanza/aprendizaje y autorregular el aprendizaje matemático reconociendo las limitaciones y potencialidades de cada dispositivo o aplicación digital.

RESULTADOS

Establecemos dos tipos de comentarios en este apartado: un análisis cualitativo de las distintas dimensiones de la competencia, y posteriormente un análisis cuantitativo que nos permite justificar cuatro perfiles en el desarrollo de la competencia.

En cuanto la *construcción de objetos y procesos matemáticos*, vemos como GeoGebra es un claro aliado de las construcciones geométricas, a la hora de profundizar en conceptos e ideas matemáticas de una manera intuitiva por el hecho de trabajar con un entorno visual, sintético y manipulable. La finalidad de la mayoría de los futuros profesores que utilizaron este programa de geometría dinámica fue la de experimentar con las infinitas posibilidades que ofrece el simulador (escoger dos vectores cualesquiera y sumarlos o restarlos gráfica y dinámicamente, calcular el área de una determinada figura a partir de una dimensión que varía mediante un deslizador…). Casi todos los futuros profesores que incluyen construcciones digitales creen que éstas estimulan el pensamiento matemático, pero sus argumentos son genéricos y basados en una reflexión metodológica. Hacen alusiones al respecto sin tener perspectiva de lo que implica el trabajo digital en cuanto a la construcción de conocimiento matemático. Es decir, en muchas ocasiones incluyen recursos digitales porque el análisis que realizan sobre su propia práctica les alerta de una baja nota en la idoniedad mediacional y la incluyen como una metodología más. No tienen en cuenta que lo digital puede cambiar el paradigma clásico del conocimiento basado en responder a una buena tarea. Sólo los futuros profesores que han probado experiencias de generalización mediante recursos digitales reconocen que los recursos digitales son instrumentos útiles que provocan que el alumno realice experimentos, conjeturas y generalizaciones (Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi, 2005).

En cuanto *lo cognitivo*, el futuro profesor pretende abrir un diálogo sobre el conocimiento previo. En algunos de estos casos, los conocimientos previos de los alumnos son almacenados en recursos digitales mediante cuestionarios online (plataforma Socrative, Kahoot, etc.) que los alumnos responden en tiempo real a través de sus dispositivos. Pero en muy pocos casos, se analizan los resultados para reconocer dificultades y proponer tareas de mejora. Estos recursos digitales estimulan la colaboración, la cooperación y la interacción entre el alumnado participante, pero creemos necesario ir un paso más allá y utilizar los recursos digitales de forma que implique tanto a los alumnos como al profesor una estrecha colaboración, más allá de un test de respuesta única. Estas afirmaciones están en consonancia con lo descrito en las investigaciones de Aldon, Cusi, Morselli, Panero y Sabena (2017).

En cuanto *lo afectivo*, los futuros profesores son conscientes de que gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de nuestros estudiantes tienen su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en ese campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros (De Guzmán, 2007). En esta investigación observamos cómo a través de diversos medios digitales, los estudiantes pueden percibir el sentimiento estético y el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos. También hemos podido observar como los futuros profesores se limitan a aludir al sentimiento de placer estético a partir del contacto con conceptos matemáticos y tecnología sin incidir en la importancia de la construcción de aprendizaje matemático a partir de este contacto. Por otro lado, para poder valorar esta dimensión nos hubiera gustado, no solo analizar las evidencias escritas en sus memorias de TFM, sino valorar también el lenguaje gestual en el aula de los futuros profesores cuando hablan del uso de las TIC. Esta limitación de los instrumentos de la muestra está en consonancia con las conclusiones de Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) en las que indica que todo el complejo cognitivo-afectivo comprende tanto los aspectos operatorios como discursivos del conocimiento matemático e incluso la disposición para la acción.

En cuanto *la dimensión interaccional*, se interpreta la cooperación y la interacción entre el alumnado participante como un elemento de motivación, pero creemos necesario ir un paso más allá y utilizar los recursos digitales de forma que implique tanto a los alumnos como al profesor una estrecha colaboración, más allá de un test de respuesta única. En cuanto a los recursos de colaboración entre colegas, percibimos como no hay ningún futuro profesor que no interactúe con otros colegas mediante alguno de los medios digitales tradicionales. Todos los futuros profesores utilizan el teléfono móvil, el correo electrónico o el chat para comunicarse. Por el contrario, no hemos obtenido evidencias de ningún futuro profesor que utilice los medios digitales más avanzados para debatir y elaborar productos nuevos en colaboración con otros, que use herramientas colaborativas en el análisis de procesos de enseñanza-aprendizaje-evaluación o que participe en procesos de investigación sobre las prácticas matemáticas realizadas. Es decir, sí que se utilizan los medios digitales para establecer una comunicación entre colegas, pero sin la intención de debatir matemáticas usando dichas herramientas. Creemos que este hecho se produce por la presencia de algunas componentes negativas (miedo, preocupación, tensión, desorientación, confusión) en el aprendizaje cooperativo online. Destacamos la importancia de que el profesorado necesita una competencia emocional significativa en el ejercicio de los procesos cooperativos de enseñanza-aprendizaje en entornos virtuales.

En cuanto *lo ecológico*, los futuros profesores coinciden en que, si el centro educativo no está adecuado para trabajar con las TIC, muchas de las actividades implementadas a priori se tendrán que gestionar de forma diferente (por ejemplo, una actividad individual, si no hay suficientes equipos para todos los alumnos, se podría implementar en grupos de tres) perdiendo la intencionalidad con las que fueron creadas. De este grueso de futuros profesores también los hay que elaboran materiales de evaluación en los que intervienen los medios digitales (por ejemplo, mediante los ya citados cuestionarios tipo test). pero estos medios digitales son utilizados para evaluar actividades que no necesariamente se han trabajado a partir de medios digitales. Estos resultados coinciden con los de Drijvers (2013) que indica en varios de sus estudios cuan de importante es que el uso de la tecnología esté integrado en un contexto educativo que sea coherente y en el que el trabajo con tecnología se integre de forma natural. Para este autor existen tres factores que son decisivos en la integración exitosa de la tecnología en educación matemática: el diseño, el papel del profesor y el contexto educativo. En nuestra investigación prácticamente la mitad de los futuros profesores incide en la importancia del contexto educativo, principalmente, en el análisis de variables que influyen en la enseñanza de las matemáticas mediante la tecnología.

En cuanto *lo ético*, no hemos encontrado evidencias de ningún futuro profesor que esté en el nivel más alto de este indicador. Es decir, no hemos encontrado evidencias de ningún futuro profesor que no esté familiarizado con las normas de conducta en interacción en línea o virtuales. Tampoco hemos encontrado evidencias de ningún futuro profesor que las aplique al contexto profesional de forma que desarrolle estrategias para la identificación y reorientación de las conductas inadecuadas en la red. Por el contrario, la gran mayoría de los futuros profesores entiende las normas básicas de conducta que rigen la comunicación con otros mediante herramientas digitales y es capaz de aplicarlas al contexto profesional. Ahora bien, no sabemos qué hubiera pasado en el caso de que se hubiera producido alguna conducta inadecuada en la red y qué estrategias hubieran llevado a la práctica los futuros profesores para reorientar estos comportamientos.

Después de analizar las reflexiones sobre la práctica de los 40 futuros profesores, y asignar puntajes a las evidencias encontradas en su trabajo según los criterios establecidos, caracterizamos 4 niveles de la competencia que asociamos a 4 perfiles de futuro profesor.

Consideramos en el nivel 0 a quienes no han usado ninguna herramienta digital, o bien justifican que la escuela no estaba preparada, pero ellos tampoco. Pero también se han considerado en este nivel los que en dos de las cinco dimensiones o categorías no hay evidencias de llegar al nivel 1. Es decir que sólo dicen considerar lo que se ha hecho en su formación, pero no proponen nada con los estudiantes. Entre estos, alguno sólo ha usado actividades para graficar funciones o para calcular. Y en algún caso usan argumentos que han oído de sus profesores como «no aprenden nada más por usar el video o el ordenador».

En el nivel 1, los futuros docentes desarrollan contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos (Power Point, vídeos, *Smartphone, Socrative y GeoGebra,* incluso combinan herramientas digitales diferentes, pero sin llegar a producir elementos propios. En este nivel no se almacenan recursos digitales, aunque si se establecen diferencias entre el uso de mediadores (digitales o físicos) en función de un mejor aprendizaje. No se analizan configuraciones epistémicas con dispositivos digitales para mejorar prácticas matemáticas. Se habla de emotividad en el sentido de que se piensa que las actividades resultaron atractivas, pero no se muestran evidencias de los alumnos. En cuanto a lo interaccional, se mantienen en el uso tradicional de comunicación que facilita el programa de formación: correo electrónico, el Moodle y el teléfono móvil para comunicarse con sus tutores de práctica. En lo ecológico-ético, se asume el conocimiento de las normas básicas de conducta que rigen la comunicación con otros mediante herramientas digitales, pero no las aplica en el periodo de prácticas. Y en cuanto al análisis didáctico, los futuros profesores en este nivel, tan sólo usan información de artículos, pero dicen no considerar un trabajo con otros docentes.

En el nivel 2, donde se encontraba el futuro profesor que se aludió en lo metodológico, las características se pueden ver reflejadas en la Tabla 4.

Tabla 4. Características del nivel 2 de la competencia digital de los futuros profesores

Componentes	Descripción
Epistémico	Proponen actividades propias «ad hoc» con uso de herramientas digitales para conseguir afianzar objetos matemáticos, Almacenan información, pero no gestionan el uso de instrumentos como applets o programas para evaluar contenido matemático.
Cognitivo	Saben analizar el impacto de lo digital en la mejora de las matemáticas que se han enseñado, sin llegar a establecer una relación entre el contenido aprendido y el recurso mediacional correspondiente.
Interaccional	Usan elementos colaborativos digitales con consciencia de su valor, pero se restringe a lo que se ha mostrado en el programa de formación.
Afectivo-emocional	Explican evidencias de mejoras de los estudiantes debido al impacto emocional de lo digital.
Ecológico-ético	Reconocen aplicar criterios éticos y de difusión de información y valoran el contexto, sin profundizar en explicaciones.
Análisis didáctico	Usan información y dicen contrastarla, pero no comparan y discuten sobre el valor de dicha información para una mejora del análisis didáctico.

En un nivel más alto, se encontrarían los futuros profesores que hicieran aportes conscientes en todas las categorías. En las valoraciones realizadas y discutidas en el equipo investigador, se ha encontrado algún indicador en alto nivel, pero no en todos. Por ello, se constata que lo realizado en el programa de formación no ha sido suficiente para conseguir este nivel. Otro factor que puede haber impedido este nivel podría ser el no haber tenido suficientes experiencias vividas en el Practicum. De hecho, alguno de los futuros profesores de nivel 2, consideran que «*nadie nos ha contado nada sobre las normas éticas en cuanto el uso de herramientas digitales*».

En la Tabla 5, se resume el nivel de competencia digital de los 40 futuros profesores de la muestra una vez realizada la transformación de puntaje a nivel y también su equivalente porcentaje. Como se ve, nadie alcanza el nivel 3 global.

Tabla 5. Número de futuros profesores y porcentaje de cada uno de los niveles de competencia digital

N = 40	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Número de futuros profesores	3	20	17	0
Porcentaje	7,5 %	50 %	42,5 %	0 %

CONCLUSIONES

Una minoría de futuros profesores diseña tareas en las que los alumnos tienen que utilizar diferentes programas informáticos. Estos programas suelen ser el GeoGebra u hojas de cálculo (Excel, OpenOffice…) para trabajar contenidos de aritmética y funciones. Y mucho menos, se proponen tareas originales ad hoc. Este resultado sigue la misma línea de los resultados obtenidos por Font (2011) y Breda, Lima y Pereira (2015) con estudiantes en Brasil.

En muchas ocasiones, el futuro profesor pretende abrir un diálogo sobre el conocimiento previo, usando herramientas digitales. En algunos de estos casos, los conocimientos previos de los alumnos son almacenados en recursos digitales mediante cuestionarios online (plataforma Socrative, Kahoot, etc.) que los alumnos responden en tiempo real a través de sus dispositivos.

En nuestra investigación, se pone de manifiesto la necesidad de potenciar un trabajo colaborativo real entre alumnos y profesores cuando se trata de realizar una evaluación formativa mediante herramientas digitales, y no quedarse en búsqueda de respuestas mediante cálculos (Aldon et al., 2017).

Como consecuencia de lo observado, concluimos que el uso de las TIC en espacios de formación del profesor de Secundaria de Matemáticas no puede ser esporádico como ya apuntó Drijvers (2003). Y consideramos que los futuros docentes necesitan experiencias de trabajo colaborativo matemático en su formación que pueda suplir la ausencia de experiencias escolares.

Después de observar los resultados, nos parece que los futuros docentes de matemáticas necesitan saber del uso de recursos digitales para la evaluación formativa, y no sólo usar elementos reproductivos o automáticos. También la necesidad de usar herramientas de simulación, Y poder discutir algo el valor epistémico y cognitivo de los recursos. Consideramos que para poder valorar lo interaccional, en los procesos de formación, debemos incidir en el uso de tareas que promuevan la interacción digital conociendo al menos experiencias como las descritas por Royo, Coll y Giménez (2017).

Por otro lado, es importante que los futuros docentes de matemáticas conozcan las potencialidades de instrumentos de uso corriente como tabletas, para realizar trabajos de calidad matemática, y no sólo para realizar tareas de pregunta respuesta como los programas tipo Kahoot o Socrative, conociendo algunas de sus limitaciones (Arzarello, Bairral y Dané, 2017). Y reconocer que no sólo se trata de usar dichos programas sino ver cómo se gestiona su uso. Es importante que en la formación se muestren evidencias de construcción de modelos con los estudiantes usando herramientas digitales. Un ejemplo es el estudio de la salinidad (Pimentel, 2018), o bien el trabajo arqueológico para usar el modelo de Vitruvio con GeoGebra (Sala, Font, Giménez y Barquero, 2017).

Las dificultades ya observadas en procesos de formación de docentes en matemáticas parten tradicionalmente de que, en un primer año, los profesores están preocupados por la parte técnica de las redes y el manejo de las tabletas de forma pedagógicamente efectiva, y en un segundo año, se muestra la preocupación por los caminos de aprendizaje de los estudiantes (Aldon, Panero, Trgalova y Trouche, 2017). Eso nos hace pensar que los resultados obtenidos en nuestra experiencia son debidos precisamente al poco tiempo dedicado a lo digital en los cursos de formación. Y por lo tanto la necesidad de ampliarlo en la formación continuada.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido en parte apoyado por el Proyecto EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, EU) del Ministerio de Finanzas y Competitividad de España, y el grupo GREAV.

REFERENCIAS

Aldon, G., Cusi, A., Morselli, F., Panero, M., y Sabena, C. (2017). Formative assessment and technology: reflections developed through the collaboration between teachers and researchers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, y U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology: a C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 551-578). Bael, Suiza: Springer International Publishing.

Aldon, G., Panero, M., Trgalova, J. y Trouche, L. (2017). *Analysing MOOCs in terms of teacher collaboration potential and issues: the French experience*. En Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.

Arzarello, F., Bairral, M. y Dané, C. (2014). Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. *Teaching Mathematics and its Applications, 33*(1), 39-51. doi: 10.1093/teamat/hru002.

Breda, A., Lima, V. M. R. y Pereira, M. V. (2015). Papel das TIC nos trabalhos de conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional: o contexto do Rio Grande do Sul. *Praxis Educacional (Online), 11*(19), 213-230.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. y Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast, 2*(2), 125-143.

Da Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Boletim de Educação Matemática, 19*(25), 105-132.

de Guzmán, M. (2007). Y la matemática. *Revista iberoamericana de educación, 43*, 19-58.

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA, 8*(1), 1-20.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 26*(1), 9-25.

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. En XIII CIAEM-IACME, Recife.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113.

Hoyles, C. et al. (2010). *Improving mathematics at work - The need for techno-mathematical literacies*. Abingdon: Routledge.

Pimentel, T. (2018). Salinity study in the river Lima estuary: an interdisciplinary project at secondary level En F. Cerquetti y G. Aldon (Eds), *Pre-Proceedings CIEAEM 70*. Mostaganem.

Royo, M. P., Coll, C. y Giménez, J. (2017). e-Collaborative forums as mediators when solving algebraic problems. *In Mathematics and Technology* (pp. 395-408). Springer, Cham.

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Kaiser y W. Blum (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 313-325). Cham: Springer.

Seckel, M. J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional, 11*(19), 55-75.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Unión Europea. INTEF Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. (2013). Marco Común de Competencia Digital Docente v 2.0.

Unión Europea. INTEF Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. (2017). Marco Común de Competencia Digital Docente v 2.0.

Zabalza, M. (2003). *Las competencias del profesorado universitario.* Madrid: Narcea.

RESOLVER, PLANEAR, *MIRAR* Y DECIDIR: COMPETENCIAS FUNDAMENTALES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

RESOLVE, PLAN, NOTICE AND DECIDE: FUNDAMENTAL COMPETENCES OF THE MATHEMATICS TEACHER

Alicia Ávila
Universidad Pedagógica Nacional, México

RESUMEN

Se considera que la noción de competencia ha permeado la investigación sobre formación de profesores de matemáticas en la actualidad. Bajo esta consideración se analiza la noción de competencia matemática en el contexto educativo y se aborda la competencia docente para la enseñanza de las matemáticas. Posteriormente se exponen tres acercamientos vigentes en la práctica e investigación de formación de profesores de matemáticas que recuperan la noción de competencia: el enfoque sustentado en la resolución de problemas, el orientado al desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente», y el enfoque de análisis ontosemiótico de la práctica. Finalmente, se hacen algunas reflexiones en torno a las posibilidades de que los avances teóricos se conviertan en mejoras de la práctica.

Palabras clave: *competencia matemática, formación de profesores, enfoques de promoción y análisis de las competencias docentes.*

Ávila, A. (2019). Resolver, planear, mirar y decidir: Competencias fundamentales del profesor de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 307-324). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

It is considered that the notion of competence has permeated research on teacher training in mathematics. Under this consideration the notion of mathematical competence in the educational context is analyzed and the teaching competence for the teaching of mathematics is addressed. Subsequently, three approaches to the practice and research of mathematics teachers' training that recover the notion of competence are exposed: the approach based on the resolution of problems, the oriented to the development of the competence of «noticing», and the ontosemiotic analysis of the practice. Finally, some reflections are made about the possibilities that the theoretical advances become improvements of the practice.

Keywords: *mathematical competence, teacher training, teaching competence to teach mathematics, promotion approaches and analysis of teaching competences.*

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA: ALGUNAS PERSPECTIVAS

Muy probablemente fue Mogens Niss el primero en trabajar sistemáticamente la noción de competencia matemática. Como resultado de un proyecto de amplio alcance que encabezó en Dinamarca hacia el año 2000 –The Danish KOM Proyect–, Niss afirma que «poseer una competencia (ser competente) en algún dominio de la vida personal, profesional o social, es dominar (en un grado justo) aspectos esenciales de la vida en ese dominio» (Niss, 2003, p. 121). Con base en esta perspectiva propone la siguiente definición:

> Competencia matemática entonces significa la habilidad para comprender, juzgar, y usar matemáticas en una variedad de contextos intra- y extra-matemáticos en situaciones en las cuales las matemáticas juegan o pueden jugar un rol (Niss, 2003, p. 122).

En The Danish KOM Proyect[1], la idea fundamental fue precisamente pensar el currículo de matemáticas bajo la noción de «competencia matemática» y abandonar los syllabus consistentes en listas de temas, conceptos y resultados.

El proyecto KOM surgió como respuesta a la solicitud del Ministerio de Educación de Dinamarca de *explorar el terreno de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para buscar la mejora del estado de las cosas*. Se requería entonces plantear ideas y acciones tendientes a lograr en los alumnos un dominio de las matemáticas, considerado equivalente a la competencia matemática. En su planteamiento, Niss destaca la connotación de *competencia* (en singular) y *competencias* (en plural). *Una competencia* (acompañada del artículo indeterminado) es claramente distinta de *la competencia matemática*, es apenas una parte constitutiva de ésta. Habida cuenta de lo anterior, en el proyecto KOM, la *competencia matemática* se concretó en ocho

[1] KOM: Competences and the Learning of Mathematics.

competencias menores que se subdividieron en dos grupos. El primero relacionado con procesos matemáticos:

1) Pensar matemáticamente.
2) Plantear y resolver problemas matemáticos.
3) Modelar matemáticamente (elaborar modelos matemáticos).
4) Razonar matemáticamente.

El segundo grupo asociado al dominio y uso del lenguaje y las herramientas matemáticas:

5) Representar entidades matemáticas.
6) Manipular símbolos y formalismos matemáticos.
7) Comunicar con las matemáticas y acerca de las matemáticas.
8) Hacer uso de ayudas e instrumentos matemáticos (incluidas las TICS).

Niss señala que este listado de componentes no es un sistema cerrado e inmodificable. La competencia matemática –dice– podría ser conceptualizada mediante un conjunto diferente de componentes y justifica los que propone porque captan razonablemente bien los aspectos esenciales del dominio matemático (Niss, 2003).

Otros autores también han desarrollado ideas acerca de la competencia y las competencias matemáticas y su vinculación con el contexto educativo (por ejemplo, D'Amore, 2014; Fandiño, 2014; Godino, 2014b; Llinares, 2003).

Llinares desarrolla la idea de *ser competente matemáticamente* e incluye cinco dimensiones que han de desarrollarse para lograr tal competencia: a) comprensión conceptual; b) desarrollo de destrezas procedimentales; c) pensamiento estratégico: capacidad de formular, representar y resolver problemas; d) comunicar y explicar matemáticamente; e) actitudes positivas en el alumno en relación con sus propias capacidades (Llinares, 2003, p. 14). En la perspectiva de este investigador, el desarrollo de la competencia en matemáticas tiene en la base la comprensión de los conceptos matemáticos y el establecimiento de relaciones entre diferentes nociones y procedimientos. Desde su punto de vista, para el logro de la competencia matemática se hace necesario el desarrollo equilibrado de las diferentes dimensiones que la integran (Llinares, 2003).

En su trabajo sobre la noción, D'Amore (2014), considera que la competencia matemática es *el gran objetivo* de la educación. Para este investigador es relevante desarrollar la competencia matemática en la escuela, pero considera que la cuestión aún no ha sido formulada en términos de estrategias de enseñanza-aprendizaje por lo que propone elementos didácticos que –en su opinión– sintetizan metodologías que han privilegiado el espíritu *hoy formulado en términos de competencias*, como la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau. Algunos de esos elementos los expone Fandiño (2014, pp.50-51):

- Reconocer las concepciones que los estudiantes han elaborado en relación con la matemática;

- Trabajar con situaciones problemáticas que sean significativas a los estudiantes, que estimulen su imaginación y que impliquen tiempos a-didácticos.
- Proponer a los alumnos trabajo prolongable fuera del tiempo y del espacio escolar.

Con un acercamiento distinto –definido en el marco del Enfoque Ontosemiótico de su propia creación– Godino (2014a) plantea una noción de competencia que en un cierto sentido es disruptiva de lo hasta aquí descrito y de los planteamientos de muchos investigadores. Por una parte, coincide con los autores antes citados: la competencia matemática implica conocimiento matemático. Por otra parte, empero, identifica la noción de competencia con la de destreza, con el saber hacer tareas operativas que no implican comprensión ni justificación. De este modo la competencia (saber hacer) puede carecer de análisis y entendimiento. Esto, según palabras del autor, lleva «[…] a proponer el uso de los términos 'competencia' y 'comprensión' para referirnos a los componentes operatorios y discursivos, respectivamente, del conocimiento» (Godino, 2014a, p. 71).

Esta postura, examinada desde la teoría antropológica de lo didáctico, llevaría a afirmar que la competencia se entiende como una técnica sin un saber, como una praxis sin un logos. Siendo que la noción de competencia tiende precisamente a ser algo más que un simple conocimiento, o un simple saber hacer, implica el hacer con base en el saber. Es decir que Godino, en vez de integrar la comprensión a la competencia como uno de los elementos necesarios para que ésta exista, la plantea como complementaria, aunque con una vinculación estrecha debida a la necesidad de una dialéctica competencia-comprensión (Godino, 2014a).

A pesar de esta diferencia conceptual con otros autores, Godino explora las posibilidades de la noción y tiene ciertas coincidencias con D'Amore, en cuanto a que los componentes de la teoría de situaciones didácticas puestos en acto contribuyen al desarrollo de la competencia matemática (Godino, 2014b).

La noción de competencia incursionó con fuerza en el terreno de las políticas educativas. Desde comienzos de este siglo la noción se constituyó en la gran orientadora de los objetivos educativos en Europa. No solo en matemáticas sino en el conjunto de las materias consideradas en los distintos niveles educativos y los diferentes planes de estudio (Eurydice, 2002). Congruente con las ambiciones europeas de desarrollo de las competencias, la OCDE (2004) a través del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA por sus iniciales en inglés), orientó su tarea evaluativa a desarrollar indicadores para determinar:

> En qué medida los diferentes sistemas educativos de los países participantes han preparado a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel constructivo como ciudadanos dentro de la sociedad […] la evaluación se centra en determinar si los estudiantes son capaces de utilizar lo que han estudiado en situaciones similares a las que probablemente tendrán que enfrentar en su vida diaria (2004, p. 27).

En el área de matemáticas PISA evalúa la capacidad para analizar, razonar y comunicar ideas de un modo efectivo al plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones. La evaluación se enfoca en problemas del mundo real, yendo más allá de los que se plantean comúnmente en las aulas. Desde tal perspectiva, ya en los inicios del programa se definió la competencia matemática como:

> […] la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (2004 p. 28).

El logro de estas ambiciosas intenciones pone en el centro el papel de los docentes y les plantea desafíos importantes. Ya en el proyecto KOM, Niss admitía que muchos profesores de matemáticas en las sociedades occidentales no habían sido exitosos en dotar a sus alumnos con el conocimiento matemático, la comprensión y las habilidades definidas en los programas educativos. El Informe Eurydice (2012), mucho más actual, también reconoce que no se ha logrado lo suficiente y coincide con la visión de muchos investigadores respecto a que: las competencias del profesorado para atender a los alumnos son esenciales para mejorar el aprendizaje.

COMPETENCIA MATEMÁTICA Y COMPETENCIAS DOCENTES

Exigencias de la didáctica actual

Conforme a las expectativas planteadas para la formación en matemáticas en los documentos de política educativa, como los de la Comisión Europea o la OCDE, hoy el papel del profesor se ha reconocido como sustancial para el logro de los aprendizajes previstos por los sistemas educativos y a la vez ha de responder a retos quizás mayores que los planteados en los años noventa «cuando las reformas educativas ubicaron al alumno en el centro del sistema educativo» (Altet, 2005, p. 33).

Perrenoud (2007) llama la atención sobre dos factores que inciden directamente en la transformación de la profesión docente: la evolución de la didáctica y el énfasis en necesidades reconocidas socialmente, como el hacer frente a la heterogeneidad creciente de los públicos escolares. Estos elementos –dice– conducen necesariamente al desarrollo de nuevas competencias para desempeñar la labor docente.

En efecto, los profesores de matemáticas hoy trabajan en el marco de una didáctica que propone situaciones problemáticas abiertas, que promueve la interacción y el trabajo colaborativo, la diversidad de soluciones y la argumentación de las formas de resolver, todo lo cual la hace totalmente distinta de las didácticas tradicionales. Como señalan Wilson, Mojica y Confrey (2013):

> los reformadores imaginan aulas donde los maestros hacen surgir las ideas matemáticas de los estudiantes a través de tareas cuidadosamente seleccionadas, alientan a los estudiantes a intercambiar y dar sentido a las ideas, y utilizan la comprensión de los estudiantes para guiar su instrucción (p. 103).

Las propuestas curriculares que generan esta realidad imaginada plantean grandes exigencias y desafíos a los docentes y también a quienes los preparan para ejercer su profesión.

Elementos de la competencia para enseñar matemática

Dominar el contenido matemático, condición indispensable de la competencia docente

Niss (2011) afirmó que un profesor competente es aquel capaz de fomentar efectivamente el desarrollo de competencias matemáticas en sus alumnos. Siendo cierta, esta afirmación es también demasiado abstracta.

En términos más concretos, todos los autores que han estudiado el tema (incluido Niss) coinciden en que una condición indispensable para desarrollar competencias matemáticas en los alumnos es dominar las matemáticas que se enseñan (Blanco y Cárdenas, 2018; Díaz y Poblete, 2016; D'Amore, Godino, y Fandiño, 2014; Llinares, 2012; Niss, 2011). Blanco (2009) considera que: «[…] el dominio del contenido es directamente proporcional a la capacidad de gestión de la clase y condiciona las elecciones curriculares» (p. 24). Otros autores coinciden en que: «los profesores que no tienen suficientes conocimientos de la materia tienen dificultades para flexibilizar lo planeado, evitan enseñar los temas que no dominan, tienen inseguridad y falta de confianza y muy probablemente refuerzan los errores conceptuales de los alumnos» (Mellado, Blanco y Ruiz, 1998, en Blanco, 2009, p. 24). En cambio, «un profesor con conocimiento matemático suficiente da explicaciones conceptuales y no sólo procedimentales, establece más y mejores conexiones entre los conceptos y muestra mayor seguridad ante los alumnos» (Climent, Domínguez y Santiago, 1999, en Blanco, 2009, p. 24).

La competencia matemática no es suficiente para ser competente como profesor de matemáticas

Sin duda hay un sólido acuerdo acerca de que dominar el conocimiento matemático es indispensable para ser competente como profesor de matemáticas. No obstante, tener este conocimiento no basta para lograr dicha competencia. Según un principio aceptado desde hace tiempo por la comunidad de investigadores de la educación matemática, el profesor ha de tener también un conocimiento específico vinculado a sus estudiantes, especialmente en lo que refiere a su pensamiento matemático, y a las formas en que es posible ayudarles a aprender (Hill, Ball y Schilling, 2008). En cercana relación con lo anterior, Niss consideró las siguientes competencias como constitutivas de la competencia docente en matemáticas: competencia curricular, competencia para la enseñanza, competencia para descubrir el aprendizaje y competencia para evaluar[2].

Las reflexiones sobre qué necesita un docente para ser competente al enseñar matemáticas en el contexto actual han llevado a cuestiones que no son conclusivas pero que apuntan hacia algunos acuerdos.

Blanco (2009), en coincidencia con Perrenoud (2007), menciona que las competencias profesionales de los profesores están estrechamente vinculadas a los avances y desarrollos educativos; en el caso de matemáticas, los avances están definidos por el desarrollo de la didáctica de matemáticas. En esto también hay coincidencia con Penalva et al. (2006), para quienes «la competencia profesional, [...] está relacionada con el conocimiento específico de la Didáctica de la Matemática necesario para desarrollar las tareas profesionales» (Penalva et al., 2006, en Blanco, 2009), lo que la vincula más a la gestión de la enseñanza que al simple conocimiento de los temas del currículo.

Llinares (2004) –al igual que Penalva et al. (2006)– vincula las competencias del profesor con la actividad de enseñar matemáticas, que considera integrada por tres «sistemas de actividad»:

- organizar el contenido matemático para enseñarlo,
- analizar e interpretar las producciones de los alumnos y
- gestionar el contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje en el aula.

En una línea similar, Blanco (2009) considera que el objetivo que debe orientar la formación básica de los maestros es proporcionar a quienes se están formando para serlo las herramientas que los capaciten para analizar, comprender, diseñar, gestionar y evaluar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel educativo en que van a enseñar. Lo anterior teniendo como referencia las competencias básicas establecidas para dicho nivel.

PERSPECTIVAS PARA EL DESARROLLO Y ESTUDIO DE LAS COMPETENCIAS DOCENTES

Como se ve, más allá de los matices, hay coincidencia en que el profesor ha de saber organizar el contenido matemático, ha de saber planear las clases, ha de

[2] Niss agregó además dos competencias que sobrepasan los límites de la educación matemática y se convierten en competencias docentes más generales: competencia colaborativa y competencia para el desarrollo profesional.

saber gestionar la actividad y, finalmente, ha de saber evaluar el aprendizaje. Pero las perspectivas y estrategias consideradas para lograr tales aprendizajes han sido y son diversas. En lo que sigue se destacan tres: a) el énfasis en la resolución de problemas, b) el mirar con sentido y c) el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), enfoque desde el cual se configuró el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas.

El énfasis en la resolución de problemas

Para muchos investigadores, las habilidades necesarias para enseñar matemáticas han de desarrollarse considerando el aprendizaje a través de la resolución de problemas (p. ej. Blanco, 1996, 2009; Blanco y Cárdenas, 2018; Bohórquez y D'Amore, 2018; Choy y Dyndial, 2018; Díaz y Poblete, 2016; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), ya que esta actividad es reconocida como esencial en la construcción del conocimiento matemático. Y es que, entre los retos que la didáctica de las matemáticas ha planteado a los docentes en las últimas décadas, está el de organizar la enseñanza a través de la resolución de problemas, cualquiera que sea el significado que se le asigne a dicha frase. Bajo tal idea, ya hacia 1990 –en el contexto de reformas que promovían la resolución de problemas como vía idónea del aprendizaje– se ensayaban experiencias de formación inicial de maestros (Blanco, 1996) y de maestros de educación primaria en servicio (Block, Dávila y Martínez, 1995). En esto sin duda influía el National Council of Teachers of Mathematics de EUA (NCTM), que recomendaba: formar a los futuros profesores mediante estrategias similares a las que ellos habrían de utilizar para enseñar (NCTM, 1989).

Block y sus colegas pusieron de relieve los cuestionamientos docentes a sus propias formas de enseñar, a la vez que las dificultades enfrentadas al tratar de aplicar la resolución de problemas como forma de trabajo. Desde entonces, Blanco ha destacado que el centro de la formación de docentes ha de ser la resolución de problemas (Blanco, 2009; Blanco y Cárdenas, 2018). Con una orientación similar, Díaz y Poblete (2016) elaboraron el Modelo de Competencia Profesional Matemática (MCPM), con base en el cual introducen y experimentan algunas ideas específicas sobre la formación de docentes, dando un lugar prominente a la resolución de problemas. Díaz y Poblete (2016) consideran que favorecer el aprendizaje de los alumnos mediante tal estrategia es una habilidad esencial para enseñar matemáticas en el marco de la didáctica actual, como también lo es el saber evaluar con técnicas afines a dicho enfoque. De manera optimista, estos investigadores señalan avances en la competencia docente en matemáticas cuando se trabaja a través de problemas, aunque destacan a la vez que son indispensables intervenciones de largo aliento para que dichos avances tengan lugar.

En un trabajo reciente, Choy y Dyndial (2018) han abordado la resolución de problemas en la formación de docentes desde otro ángulo. En consideración de estos autores los problemas típicos están permanentemente presentes en las clases de matemáticas, por lo que su variación con fines de profundización o ampliación del conocimiento es una fuente potencial de mejora de los aprendizajes matemáticos. Los resultados obtenidos por estos investigadores subrayan el beneficio de apoyar a los profesores para que perciban y aprovechen variaciones de los problemas típicos con el fin de profundizar o ampliar los aprendizajes de sus alumnos. Esta idea, obviamente, tendría implicaciones en la formación inicial y continua de profesores.

Saber las matemáticas suficientes, saber resolver problemas, saber planear, gestionar y evaluar lo realizado en el marco de la resolución de problemas y las nuevas didácticas, son elementos pertinentes para orientar la formación y el desarrollo de las competencias de los profesores y los profesores en formación. Pero, ¿estos elementos bastan para una docencia competente en matemáticas? Conforme a algunos planteamientos recientes, la respuesta sería no. La incorporación de la competencia *mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje* y los desarrollos desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, han tomado fuerte presencia y permiten ver nuevos ángulos en la formación de los docentes y el desarrollo de la competencia para enseñar matemáticas.

Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje: algunos acercamientos y recursos

En años recientes, diversos investigadores han incorporado en sus análisis un elemento que Mason (2002) hizo notar como indispensable para lograr las competencias deseables en el docente, cualesquiera que fuese la materia a enseñar: *mirar profesionalmente***.** Esta cuestión fue acogida con entusiasmo por distintos grupos que trabajan en la formación de profesores de matemáticas, y hoy parece considerarse una competencia fundamental en la formación y desarrollo de estos profesionales.

La noción mirar profesionalmente fue desarrollada por Mason (2002), en opinión de quien la necesidad de ser sensible a la experiencia de los interlocutores es central en muchas profesiones, incluida la de enseñar. Mason afirma que, para llevar a cabo una práctica profesional, cualquiera que ésta sea, es necesario desarrollar primero cierto tipo de sensibilidad y conciencia, ya que el mirar profesionalmente es lo que permitirá actuar apropiadamente en el conjunto de tareas que implica la profesión.

Siguiendo aún el pensamiento de Mason, lo que distingue a los expertos de los que no lo son, es el desarrollo de una sensibilidad respecto a las situaciones profesionales que permite notar cosas que los novatos no ven. Es por eso que, según el autor, una forma de volverse experto es desarrollar la mirada profesional. Esta idea –compartida actualmente por muchos investigadores de la educación matemática– ha alimentado otra: formar docentes competentes implica desarrollar en los estudiantes para maestro la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje. De tal idea han derivado distintas estrategias y metodologías de investigación y formación que han sido experimentadas o están siéndolo; por ejemplo, el análisis de video-grabaciones de clase.

El video como recurso para analizar la actividad en clase

Entre los primeros escritos en lengua hispana que mencionan la idea de mirar profesionalmente está el de Fortuny y Rodríguez (2012), quienes exponen su convicción de que:

> […] los actuales programas de formación del profesorado, a menudo, no se centran en ayudar a los profesores a interpretar las interacciones en el aula. En su lugar, se concentran en ayudar al profesorado en formación a actuar, y solo se les proporcionan nuevas técnicas pedagógicas, tecnología y nuevas actividades que pueden utilizar (p. 21).

Como señalan más adelante estos autores, aunque aprender técnicas nuevas es sin duda importante en la formación para la enseñanza, tal aprendizaje no garantiza que los estudiantes interpreten lo que ocurre en el aula de manera que les sea útil para planear y ajustar de manera adecuada sus actividades de enseñanza. Por ello, Fortuny y Rodríguez consideran que en la formación de los docentes ha de promoverse el análisis de lo que ocurre durante las clases de matemáticas como requisito indispensable para hacer bien el resto de la tarea, e instrumentan la idea utilizando video-relatos (Fortuny y Rodríguez; 2012). Pero, ¿qué es lo que ha de mirarse en una clase de matemáticas? Esto depende del objetivo previsto o de la teoría desde la cual se mire la actividad. Para Fortuny y Rodríguez, los siguientes tres aspectos son elementos básicos para mirar profesionalmente una clase de matemáticas:

- Determinar lo que es importante o significativo de una situación de clase.
- Establecer las conexiones entre los aspectos específicos de las acciones de clase y los principios generales de la enseñanza y el aprendizaje que representan.
- Razonar acerca de las interacciones en el aula, tomando decisiones de acción.

Análisis de tareas

El uso de videos para analizar y discutir las prácticas ha sido y es utilizado como estrategia para favorecer la mirada profesional. Otra estrategia utilizada con estos fines es el análisis de tareas que los profesores en formación habrán de enfrentar en su práctica profesional. Al respecto, algunos autores (Llinares, 2012; Penalva, Roig y Del Río, 2009) argumentan que los formadores de docentes tienen como uno de sus compromisos esenciales identificar y diseñar tareas que –vinculadas a la práctica real que desarrollarán como profesionales– articulen diversos conocimientos y oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

Desde esta perspectiva, según Llinares (2012), interpretar producciones matemáticas de los estudiantes y analizar las propuestas de libros de texto son dos actividades relevantes en la práctica de los docentes y útiles en su formación. Con este tipo de actividades –se considera– se contribuirá a refinar la mirada profesional de quien las realiza. Al respecto, hay coincidencia en cuanto a que el análisis de las tareas deberá tener al centro la práctica matemática implicada (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), o las ideas matemáticas que configuran y dan sentido a las actividades (Llinares, 2012).

Las trayectorias de aprendizaje: un recurso para ampliar, centrar y estructurar la mirada profesional

El análisis de tareas como recurso para afinar la mirada profesional, parece haber encontrado algunos límites: una tarea o actividad puede verse de manera aislada, sin conexiones que favorezcan un aprendizaje más allá del referido a dicha tarea. Probablemente por ello, esta línea de trabajo se vio opacada por la que se aborda en este inciso. En efecto, un enfoque introducido más recientemente, y que permite favorecer y analizar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente en una perspectiva más amplia, se basa en la incorporación de trayectorias de aprendizaje.

Aunque existen diferentes interpretaciones de la idea de trayectoria de aprendizaje (Battista, 2011), una característica comúnmente reconocida es que proporciona un modelo de la progresión en el aprendizaje de conceptos matemáticos específicos (niveles de progresión en el pensamiento matemático cada vez más sofisticados) vinculados a un objetivo de aprendizaje sustentado en resultados de investigaciones previas y un conjunto de posibles actividades que pueden apoyar dicha progresión de aprendizaje (Ivars, Buforn y Llinares, 2016).

Según Wilson et al. (2013) el uso de una trayectoria de aprendizaje «apoya a los profesores para conocer y entender el pensamiento matemático de los estudiantes y para restructurar su propio entendimiento de las matemáticas» (p. 103). La pertinencia y potencia de este enfoque como recurso para desarrollar la mirada profesional, en opinión de quienes lo han utilizado, radica en que al centrar la atención en el pensamiento de los estudiantes y su desarrollo ofrece referentes específicos para la toma de decisiones de enseñanza a lo largo del tratamiento de un tema.

Siguiendo tal idea, Ivars et al. (2016), así como Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo (2018), sostienen que incorporar la trayectoria de aprendizaje como instrumento de formación, ayuda a los estudiantes para maestro a lograr una mirada más estructurada sobre la comprensión alcanzada por los alumnos. Esta mirada –sostienen los autores– permitirá además proponer nuevas actividades útiles para hacer progresar a los estudiantes en su nivel de pensamiento sobre el tema matemático que se esté tratando.

Todos los autores referidos en este inciso consideran también que el lenguaje es fundamental en este proceso de estructuración de la mirada; sostienen que ha de producirse un lenguaje que relacione de manera adecuada lo general (lo teórico) con lo específico que se refleja en el pensamiento matemático de los alumnos.

Los temas matemáticos que se han trabajado desde este enfoque son diversos, por ejemplo, fracciones, generalización de patrones, clasificación de cuadriláteros, proporcionalidad, límite de una función y el concepto de derivada (Fernández et al., 2018); en este libro, la trayectoria de aprendizaje se utiliza para trabajar la magnitud longitud en educación infantil (Sánchez-Matamoros, Valls, Moreno y Pérez-Tyteca, 2019).

Los autores que han utilizado la trayectoria de aprendizaje en la formación docente informan de ciertos logros (Fernández et.al. 2018; Ivars et al., 2016; Sánchez-Matamoros, Valls y Pérez-Tyteca, 2019; Wilson et al., 2012) pero concluyen que su uso como instrumento de análisis del pensamiento matemático de los alumnos por parte de los estudiantes para maestro no resulta fácil. Más difícil resulta a los profesores o estudiantes para profesor proponer nuevas actividades de aprendizaje a partir de los elementos identificados en el pensamiento de los niños (Ivars et al. 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2019).

Coincido con las opiniones que resaltan las bondades potenciales de la trayectoria de aprendizaje como instrumento de apoyo para afinar la mirada profesional y, por lo tanto, para mejorar la formación de docentes de matemáticas. Sin duda es un andamiaje poderoso en el proceso de aprender a enseñar. No obstante, en la práctica su uso refleja la complejidad de integrar el conocimiento teórico con hechos reales y más todavía, con exigencias de acción. (Fernández et al., 2018).

El análisis ontosemiótico de la práctica

Otro enfoque orientado al análisis y desarrollo de las competencias docentes para la enseñanza de las matemáticas, es el creado por Godino y sus colaboradores en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009).

El EOS es un sistema teórico que adopta como elemento central la actividad de resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático y trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática (Godino, Batanero y Font, 2017). Desde tal enfoque se configuró el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas. Este modelo define un conjunto de categorías para el análisis de los conocimientos y las competencias del profesor para la enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

En su vinculación con la docencia, el EOS se orienta a que los profesores desarrollen la *competencia general para enseñar matemáticas* denominada *análisis e intervención didáctica* (Godino et al., 2017). Dicha competencia se compone de cinco sub-competencias que lo autores vinculan a otros tantos aspectos relacionados con la acción de enseñar matemáticas: a) gestión de configuraciones didácticas, b) análisis de la idoneidad didáctica, c) análisis de los significados globales, d) análisis ontosemiótico de las prácticas, y e) análisis normativo.

Un aspecto central en el EOS, vinculado a su vertiente epistémica, es el reconocimiento de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver tareas o problemas matemáticos, así como los objetos matemáticos y procesos implicados en dichas prácticas (Godino et al., 2009). Dada la relevancia de este aspecto en el EOS, se plantea como fundamental desarrollar en los profesores la competencia para lograr dicho reconocimiento a través del análisis ontosemiótico de las prácticas, que es una sub-competencia de la competencia análisis e intervención didáctica. En la visión de sus autores, esta competencia es relevante porque «tal reconocimiento permitirá [a los docentes] comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos» (Godino et al., 2017, p. 99). También es importante porque permitirá al profesor entender la complejidad implicada en la resolución de las tareas que plantea a sus alumnos y, con ello, comprender las posibles dificultades de aprendizaje que enfrentarán. El supuesto es que, a partir de lo anterior, el docente estará en posibilidad de planificar intervenciones educativas idóneas para promover el aprendizaje.

En este volumen, la contribución de Godino y sus colegas (Burgos, Giacomone, Godino y Neto, 2019) trata precisamente del desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, así como de un análisis de los niveles de algebrización identificados en las prácticas matemáticas vinculadas a un problema de proporcionalidad. El análisis de las prácticas matemáticas implicadas en las tareas planteadas se promueve mediante las preguntas: ¿Qué matemáticas se ponen en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemáticas ha puesto en juego el alumno? Estas interrogantes tienen bondades como herramienta de indagación en el análisis de la práctica, ya que permiten a los profesores o estudiantes para profesor identificar la distancia entre lo que la institución demanda y lo que comprenden y logran sus alumnos. De la identificación de dicha distancia derivarán –según previsiones teóricas– acciones pertinentes para continuar de manera adecuada la enseñanza. Por supuesto, aquí media la capacidad de mirar la práctica en el sentido adecuado.

La experimentación de este enfoque en relación con temas como fracciones, semejanza de triángulos, ecuaciones cuadráticas, y proporcionalidad, llevada a cabo por estos investigadores, informa de las posibilidades del modelo (Burgos et al., 2019; Giacomone y Godino, 2016; Posadas y Godino, 2017). Al igual que en otros trabajos reportados en este libro, la instrumentación de la propuesta –en voz de sus propios autores– arroja resultados modestos e implica tiempos más prolongados que los considerados por los investigadores para obtener mayores logros.

REFLEXIONES FINALES

La idea de formar a los profesores o promover su desarrollo profesional mediante el aprendizaje de métodos de enseñanza, parece haber perdido vigencia. Los trabajos de investigación sobre la formación de docentes realizados recientemente, se vinculan con la actividad de resolver problemas y, principalmente, se orientan al análisis de los sucesos que tienen lugar durante las clases de matemáticas. Se han utilizado diversos recursos y estrategias para realizar dicho análisis, pero la noción de competencia está presente en todos ellos.

Al respecto Sanhueza, Penalva y Torregrosa (2009) han señalado que, teóricamente, un programa de formación de maestros basado en competencias contribuiría a transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la medida que se consiga articular la teoría con la práctica. Pero esto no es fácil; dicen estos autores que el uso pertinente de los conocimientos no es algo automático, sino producto de la construcción de nuevos conocimientos al enfrentar y tratar de responder a las situaciones que se presentan.

Investigadores y formadores de profesores han realizado esfuerzos en distintas direcciones y en tal sentido los avances de investigación son relevantes. Sin embargo, en la práctica, los resultados no son tan alentadores como promete la teoría. Caben entonces las preguntas:

- ¿La noción de competencia, será un enfoque que guíe las acciones educativas en una buena dirección?
- ¿La noción de competencia logrará trascender las condiciones y restricciones que imponen los sistemas educativos?

Respecto de lo primero, los conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico autorizan a afirmar que la noción de competencia tiene una virtud como guía de la acción educativa: pretender la integración de *logos* y *praxis*, la intención de generar una *praxis* con *logos* en la formación y la práctica de los profesores, donde lo que se aprende es algo más que simples conocimientos, pero también algo más que simples habilidades.

Sin embargo, los trabajos que abordan la formación docente teniendo como eje la resolución de problemas enfrentan dificultades de distinto orden, entre otras la lentitud de los procesos de asimilación y cambio. En los casos en que la formación introduce como recurso una trayectoria de aprendizaje, se reflejan dificultades para que los instrumentos conceptuales se comprendan y se inserten adecuadamente en la práctica. El trabajo basado en el análisis ontosemiótico parece correr una suerte similar. Sus promotores concluyen señalando la necesidad de profundizar en el diseño y experimentación de dispositivos de formación adecuados y ampliar el tiempo de trabajo con los estudiantes para lograr el desarrollo de esta competencia; su incorporación en el pensamiento y la acción de los profesores, siendo posible, resulta compleja.

Me parece que se necesita más investigación para saber si la idea de competencia –y sus implicaciones– es un sustento viable de la formación de maestros y el desarrollo de las competencias matemáticas que dichos profesionales han de impulsar en su acción de enseñanza. Los avances teóricos, los esfuerzos en la formación de docentes y el nutrido trabajo de investigación realizado con miras a lograr este tipo de formación, alimentan la hipótesis de que algo se logrará. Pero por ahora, ni todo está hecho, ni todo está ganado.

REFERENCIAS

Altet, M. (2005). La competencia del maestro profesional o la importancia de saber analizar las prácticas. En L. Paquay, M. Altet, E. Charlier y Ph. Perrenoud (Eds.), *La formación profesional del maestro. Estrategias y competencias* (pp. 33-48). México, Cd. De México: Fondo de Cultura Económica.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 507-570.

Blanco, L. (1996). Resolución de problemas aritméticos y formación práctica de los maestros. *Educación Matemática*, *8*(1), 53-64.

Blanco, L. (2009). *Proyecto docente e investigador para optar por una plaza de catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática*. Documento inédito. Badajoz. España: Universidad de Extremadura. Disponible en https://maniasmatematicas.blogspot.com/.

Blanco, L. y Cárdenas, J. (2018). La resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la educación matemática* (pp. 208-226). Ciudad de México, México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

Block, D., Dávila, M. y Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática*, *7*(3), 5-26.

Bohórquez, L. A. y D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 85-103.

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D. y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Comisión Europea/Eurydice. (2002). *Las competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria.* Comisión Europea (Dirección General de Educación y Cultura). Disponible en http://eurydice-org.

Comisión Europea/Eurydice. (2012). *El desarrollo de las competencias clave en el contexto escolar en Europa: desafíos y oportunidades para la política en la materia.* Informe de Eurydice. Luxemburgo: Oficina de Publicaciones de la Unión Europea.

Choy, B. H. y Dyndial, J. (2018). An approach to teach with variation: using typical problems. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 21-38.

D'Amore, B. (2014). «Competencias»: objetivo de quien construye su propio saber. En B. D'Amore, J. Díaz Godino y M. I. Fandiño (Eds.), *Competencias y matemática* (pp. 27-37). Edo. De México, México: Magisterio Editorial/Nueva Editorial Iztaccíhuatl.

D'Amore, B., Díaz Godino, J. y Fandiño, M. I. (2013). *Competencias y matemática*. Edo. De México, México: Magisterio Editorial/Nueva Editorial Iztaccíhuatl.

Díaz, V. y Poblete, L. A. (2016). Modelo de competencias profesionales de matemáticas (MCPM) y su implementación en profesores de enseñanza primaria en Chile. *Bolema. Boletim de Educaçao Matemática*, *30*(55), 786-807.

Fandiño, M. I. (2014). «Ser competente», un desafío con raíces antropológicas. En B. D'Amore, J. D. Godino y M. I. Fandiño (Eds.), *Competencias y matemática* (pp. 39-58). Edo. De México, México: Magisterio Editorial/Nueva Editorial Iztaccíhuatl.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13,* 39-61.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: Facilitar la interpretación de la interacción en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 23-37.

Giacomone, B y Godino, J. D. (2016). Experiencia formativa para desarrollar una competencia didáctico matemática de futuros profesores. En *Actas del XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Matemáticas, ni más ni menos* (pp. 1-10). Jerez de la Frontera: CEAM.

Godino, J. D. (2014a). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. En B. D'Amore, J. D. Godino y M. I. Fandiño (Eds.), *Competencias y matemática* (pp. 59-76). Edo. De México, México: Magisterio Editorial/Nueva Editorial Iztaccíhuatl.

Godino, J. D. (2014b). Competencia y comprensión matemática ¿Qué son y cómo se consiguen? En B. D'Amore, J. Díaz Godino y M. I. Fandiño (Eds.), *Competencias y* *matemática* (pp. 77-95). Edo. De México, México: Magisterio Editorial/Nueva Editorial Iztaccíhuatl.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Bolema. Boletim de Educaçao Matematica*, *31*(57), 90-113.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Ivars, P., Buforn, A. y Llinares S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente». *Acta Scientiae. 18*(4). Ed. Especial, 48-66.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En C. Chamorro. *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 3-29). España, Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Llinares, S. (2004). La actividad de enseñar matemáticas como organizador de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Seminario sobre «Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas». Disponible en http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/ Universidad de Granada.

Llinares, S. (2012). Del análisis de la práctica al diseño de tareas matemáticas para la formación de maestros. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 99-115). Barcelona: Graó.

Mason, J. (2002). *Researching your Own Practice. The discipline of Noticing*. London/New York: Routledge, Taylor & Francis Group.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards*. Reston. Virginia: NCTM.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education.* (pp. 116-124). Athens: Mathematical Society.

Niss, M. (2011). The Danish KOM Proyect and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 6*(9), 13-24.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas /OCDE*. España. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

Penalva, M. C. et al. (2006). Conclusiones. Investigación sobre la formación de profesores responsables de la educación matemática. En M. C. Penalva, I. Escudero y D. Barba (Eds.), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemática.* (pp. 157-159). Granada: Proyecto Sur.

Penalva, M. C., Roig, A.I., y Del Río, M. (2009). Experimento de enseñanza: Tareas de aprendizaje de la geometría en la formación de maestros de Educación Infantil. En T. Tortosa, J. D. Álvarez Teruel y N. Pellín (Eds). *La calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio. VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* (pp. 130-136). Alicante: Universidad de Alicante.

Perrenoud, Ph. (2007). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Ciudad de México. México: Graõ/Colofón.

Posadas, P. y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*. 1, 77-96.

Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., Moreno, M. y Pérez-Tyteca, P. (2019). Relación entre la mirada profesional de los estudiantes para maestro de una situación de aula y la planificación de una lección. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 219-239). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Sanhueza, S., Penalva, M. C., y Torregrosa G. (2009), Evaluación de competencias matemáticas y profesionales relativas a la educación infantil. En T. Tortosa, J.D. Álvarez Teruel y N. Pellín (Eds), *La calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio. VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* (pp. 122-129). Alicante: Universidad de Alicante.

Wilson, P. H., Mojica, G. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior. 32,* 103-121.

DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR Y DOMINIO AFECTIVO

TEACHER'S PROFESSIONAL DEVELOPMENT AND AFFECTIVE DOMAIN

González, M.T.
Universidad de Salamanca

El desarrollo profesional es una temática de interés internacional que ha tenido su reflejo en las investigaciones realizadas por los grupos de investigación de la RED8 de Educación Matemática y Formación de Profesores. Dada la importancia que está adquiriendo la formación matemática tanto en la adquisición de conocimientos para otras áreas, como para la innovación y la investigación, el desarrollo profesional del profesor de matemáticas debe ser uno de los centros de atención de las investigaciones realizadas en educación matemática que den pautas y guíen la formación de los profesores.

Para Ponte (2011) el desarrollo profesional y el aprendizaje del profesor son expresiones equivalentes. Esta dualidad incluye numerosos aspectos relativos a la formación de los docentes de matemáticas como son: el conocimiento del profesor, su práctica, la reflexión profesional o la identidad profesional. Aunque el desarrollo profesional se inicia durante la formación inicial es un aprendizaje a lo largo de la vida que implica una revisión constante de conocimientos y prácticas profesionales. Para Cochran-Smith y Lytle (1999) son tres las concepciones sobre el aprendizaje del profesor: conocimiento para la práctica, conocimiento en práctica y conocimiento

González, M.T. (2019). Desarrollo profesional del profesor y dominio afectivo. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 325-327). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

de la práctica. Day y Sachs (2004) añaden el conocimiento de uno mismo, es decir, los valores, propósitos, emociones y relaciones. De una u otra manera los capítulos que conforman esta sección están relacionados con una u otra de estas concepciones. Los tres primeros capítulos abordan algunas de las tres primeras concepciones a través de la reflexión sobre la propia práctica, el uso de la evaluación para la mejora del conocimiento matemático y didáctico y la resolución de problemas como medio para el diseño de tareas de formación de docentes. Los dos últimos pueden considerarse más centrados en la última concepción pues abordan el conocimiento de las actitudes hacia las matemáticas y la docencia de las matemáticas, y las propias concepciones acerca de la enseñanza del concepto de demostración.

En el primer capítulo de esta sección, Moreno, Flores y Ramos presentan el proceso de reflexión docente ligado al desarrollo profesional en un contexto de formación inicial de futuros profesores. Se considera la reflexión docente como un proceso que implica una mirada retrospectiva sobre las propias acciones y concepciones para transformar la enseñanza de manera consciente. Esto implica la coordinación de un conocimiento práctico con un conocimiento más teórico. El modelo reflexivo ALaCT sirve de guía para realizar las diferentes fases de reflexión: desde la consideración de una situación problemática, la toma de conciencia de los elementos implícitos y explícitos del problema formulado, hasta la búsqueda de soluciones valiéndose de informaciones teóricas consultadas. Este trabajo se centra en las tres primeras fases del ciclo reflexivo y a través de los datos recogidos se analiza la naturaleza del problema formulada por cada futuro profesor, las creencias que subyacen a la formulación del problema y la toma de conciencia de algunos elementos teóricos para la reformulación del problema.

En el capítulo 2, Chamoso y Cáceres se centran en la formación de los maestros de educación primaria a partir de la evaluación. Para ello proponen a los alumnos de esta titulación la realización de un proyecto estadístico de forma colaborativa. Los avances realizados por cada grupo de alumnos fueron sometidos a una autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación mediante una rúbrica elaborada a partir de las fases de un proyecto estadístico. Posteriormente cada grupo modificó su proyecto en función de los resultados de las evaluaciones. Se analizaron estadísticamente la consistencia y discrepancias entre las tres formas de valoración de cada grupo así como las consistencias entre los avances presentados por los grupos y las discrepancias entre las valoraciones de los avances de cada grupo. Estas últimas están ligadas a la evaluación realizada por el profesor lo cual puede deberse a una sobrevaloración de los alumnos de los proyectos o a una interpretación inadecuada de la rúbrica.

En el capítulo de Camacho, Perdomo y Hernández se presenta la generación de tareas para la formación de docentes de matemáticas en la educación secundaria. El modelo teórico MUST sobre la comprensión matemática establece tres perspectivas interrelacionadas que contribuyen a la comprensión: *Competencia Matemática, Actividad Matemática y Contexto de la Enseñanza.* En este caso la investigación está centrada en la actividad matemática desarrollada a partir del uso de software de geometría dinámica para resolver un problema en parejas. La comprensión permite una construcción en GeoGebra de las condiciones del problema y por lo tanto una familiarización con el mismo. La exploración permite a los estudiantes la identificación de las propiedades matemáticas que son necesarias para resolver el problema. Y en la búsqueda de múltiples aproximaciones se aborda la demostración de algunas de estas propiedades. A partir de los datos obtenidos se formulan tres tareas fruto de la identificación previa de propiedades matemáticas.

En el capítulo de Chacón y Marbán se presentan sendas investigaciones que tienen como foco principal el concepto de actitud. En el primero se abordan las actitudes hacia las matemáticas de 983 alumnos de Bachillerato de tres centros educativos para los que se establecen variables binarias en torno a tres categorías: disposición emocional, percepción de competencia y visión de matemáticas. En este estudio se resalta que la actitud de los alumnos hacia las matemáticas no viene determinada exclusivamente por la disposición emocional hacia ellas sino también por su visión de las matemáticas o sus creencias respecto a la disposición emocional. En el segundo estudio se pone a prueba un modelo predictivo de actitudes hacia las matemáticas y la docencia en matemáticas de futuros maestros de educación primaria. Mediante un análisis factorial confirmatorio se comprobó la existencia de dos factores que organizan las actitudes: *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática* y *Gusto por la docencia de las matemáticas*.

En el último capítulo, Arce, Conejo, Ortega y Pecharroman abordan las concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración, teniendo como origen las investigaciones previas realizadas por el grupo de investigación. A partir de sendos cuestionarios y dos entrevistas realizadas a profesores en ejercicio, se clasifican las concepciones de estos profesores en diversas temáticas organizadas en función de los ítems del segundo cuestionario. Además, se han determinado tres perfiles docentes para cada una de las temáticas que exigen posteriores indagaciones acerca de la relación entre las concepciones, los conocimientos y las creencias de los profesores.

A lo largo de esta sección se vislumbra la importancia del desarrollo profesional del profesor ligado a su aprendizaje así como la amplitud de aspectos que derivan de la investigación realizada en España hasta el momento que está en línea con la investigación internacional.

Cochran-Smith, M. y Lytle, S.L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teaching learning in communities. *Review of research in Education, 24*(2), 351-307.

Day, C. y Sachs, J. (2004). Professionalism, performativity and empowerment. Discourses in the politics, policies and purposes of continuing professional development. En B.K. Hofer y P.R. Pintrich (Eds.) *International Handbook on the continuing professional development of teachers* (pp. 297-320). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ponte, J.P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of mathematics teacher education*, 14, 413-417.

REFLEXIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DURANTE UN CURSO SOBRE DESARROLLO PROFESIONAL

REFLECTION OF MATHEMATICS TEACHERS DURING A COURSE ON PROFESSIONAL DEVELOPMENT

MORENO VERDEJO, A.[1], FLORES MARTÍNEZ, P.[1], RAMOS RODRÍGUEZ, E.[2]
[1]*Universidad de Granada,* [2]*Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*

RESUMEN

Los participantes en el curso «Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas», de un Máster de Didáctica de la Matemática, esperan mejorar su formación docente y aprender a investigar en educación matemática. Tratar conocimiento y desarrollo profesional requiere promover actitudes metacognitivas. Conscientes de ello, una parte del curso consiste en un taller de reflexión docente, para abordar los conceptos de «desarrollo profesional» y «profesor reflexivo». Este capítulo describe el taller mediante un estudio de casos, donde se analizan los procesos de reflexión que llevan a cabo dos participantes de últimas ediciones, relacionándolos con su propio desarrollo profesional. Observamos que ambos casos, evolucionan en su mirada de las problemáticas de la práctica, partiendo con una visión técnica hasta avanzar a una postura crítica o práctica.

Palabras clave: *Desarrollo profesional, reflexión, didáctica, matemáticas, profesores*.

Moreno, A., Flores, P. y Ramos, E. (2019). Reflexión de profesores de matemáticas durante un curso sobre desarrollo profesional. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 329-350). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The teachers and recent graduates, participants in the course «Knowledge and Professional Development of the Mathematics Teacher» of a Master's Degree in Didactics of Mathematics, expect both to improve their teacher training and to learn to investigate in mathematical education. Treating knowledge and professional development requires promoting metacognitive attitudes of the participants in the course. Aware of this, part of the course takes the form of a teacher reflection workshop, to address the concepts of «professional development», in general, and «reflective teacher», in particular. This chapter describes the workshop through a case study, which analyzes the processes of reflection carried out by two participants of recent editions, relating them to their own professional development. We observe that both cases evolve in their view of the problems of the practice, starting with a technical vision until advancing to a critical or practical position.

Keywords: *Professional development, reflection, didactics, mathematics, teachers*.

El propósito de este capítulo es examinar la ayuda que supone un taller de reflexión docente para el desarrollo profesional de los participantes, identificando si los profesores realizan un proceso de reflexión. Para ello nos apoyamos en los problemas profesionales que los docentes manifiestan en un curso dentro de un Máster de Didáctica de la Matemática, donde los formadores promueven procesos de reflexión en sus participantes, relacionándolos con su propio desarrollo profesional. Para abordar este fin, es necesario partir posicionándonos respecto a los constructos desarrollo profesional, problemas profesionales y reflexión docente para definir el modelo de reflexión que empleamos en este estudio.

DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El desarrollo profesional es un proceso de crecimiento que se caracteriza por la evolución continua, marcada por momentos y procesos de reflexión (Ponte y Chapman, 2008). Durante este desarrollo se amplía el conocimiento que el profesor de matemáticas utiliza para su trabajo docente y va construyendo durante su carrera profesional (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001; Chamoso, Caceres y Azcárate, 2012).

El concepto de desarrollo profesional está vinculado con la consolidación de la responsabilidad profesional. Podemos interpretarlo como el cambio que refleja el profesor a partir de su experiencia, al transitar con éxito por las situaciones y fases de la realidad impuesta por la profesión docente. El cambio lo constituye el sentido que los profesores dan, de manera autónoma, a las experiencias de su práctica. Como señala Climent (2002), el desarrollo profesional del profesor es «el proceso de aprendizaje continuo como profesional reflexivo y crítico de su práctica» (p.

120). Esto supone considerar de manera progresiva la complejidad de dicha práctica y su análisis desde un número cada vez mayor de elementos.

El desarrollo profesional se entiende pues como un proceso gradual y continuo con inicio en la formación inicial, en que el sujeto va creciendo y madurando al enfrentar diferentes problemas y logra confianza, se enriquece de nuevas perspectivas, incrementa su conocimiento y asume nuevos retos (Jaworsky, 1993). Por esta razón, Ponte (2002) sitúa desarrollo profesional en dos campos profundamente interrelacionados. Por un lado, como crecimiento del conocimiento y competencia profesional, habilitando al profesor a resolver problemas complejos en una variedad de dominios. Por otro, como formación y consolidación de su identidad profesional, entendida como el producto del aprendizaje vinculado con la práctica situada (Chávez y Llinares, 2012), como un proceso continuo de interpretación y reinterpretación de experiencias que destaca la idea de que el aprendizaje es permanente (Beijaard, Meijer y Verloop, 2004).

En resumen, el desarrollo profesional abarca la ampliación de conocimiento, la consolidación de la responsabilidad profesional y la construcción progresiva de su identidad profesional.

REFLEXION DOCENTE

Los cursos de formación continua de profesores pretenden estimular el desarrollo profesional. En la asignatura Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas, dentro del Máster de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, hemos propuesto un taller de «reflexión docente», con vistas a que los participantes comprendan el concepto de desarrollo profesional, y a la vez reflexionen para relacionar conocimiento teórico en didáctica de las Matemáticas con el conocimiento práctico del profesor.

Reflexión es un término con numerosas acepciones por lo que conviene aclarar el significado que le atribuimos en este trabajo. Dewey (1989) utiliza el término acción reflexiva porque «implica la consideración activa, persistente y cuidadosa de cualquier creencia o práctica a la luz de las razones que la sustentan y de las consecuencias a las que conduce» (p. 6).

Schön (1983) se inspira en el concepto de acción reflexiva de Dewey, para caracterizarla como una continua interacción entre el pensamiento y la acción. De este modo, la acción reflexiva describe la actuación de los profesionales para comprender y transformar su práctica. Distingue entre racionalidad técnica (solución de los problemas, selección de los medios técnicos más idóneos para determinados propósitos) y práctica reflexiva, que supone comprender y perfeccionar la práctica, la enseñanza o la acción (Zeichner, 1993).

La reflexión pretende la comprensión y búsqueda de acciones para ejecutar la práctica docente de manera más fundamentada (Tzur, 2001; Climent, 2002). Por su naturaleza, requiere de acciones y condiciones (fases, instrumentos, conocimientos, disposiciones) para ser puesta en marcha. En consecuencia, la reflexión contribuye a llevar a cabo procesos de desarrollo profesional que den significado al conocimiento profesional (Korthagen et al., 2001; Rico, 2015).

El proceso arranca de una situación de inquietud, tensión o interés por hechos de la propia práctica (Climent, 2002; Flores, 2007). Los englobamos en lo que se denomina problemas profesionales.

La reflexión implica un distanciamiento de la situación práctica en la que surge la inquietud (Jaworski, 1993). Esto conlleva que «una persona reflexiona cuando está mirando hacia atrás sobre sus experiencias y/o conocimiento y se dedica a establecer por sí mismo una nueva estructura o evaluación de esas experiencias y/o conocimiento» (Korthagen y Verkuyl, 1987, p. 4). El profesor reflexivo está dispuesto a analizar su práctica a fin de comprenderla o mejorarla (Zeichner, 1993).

Desde la visión del desarrollo profesional del profesor y extendiendo la idea de Flores (2007), Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte (2017) añaden nuevas disposiciones que han sido contempladas por otros autores: a) traspasar los límites de su zona de bienestar; b) dar significado a su acción, tomando conciencia de la complejidad de la práctica y del aprendizaje de sus alumnos, otorgándole sentido a su práctica profesional; c) adaptar su actuación práctica a las condiciones del contexto y d) tener apertura hacia las matemáticas y disposición a transformar sus concepciones sobre ella, al tiempo que tomar conciencia de la complejidad del conocimiento matemático para su enseñanza.

Con todas estas características, el proceso reflexivo que pretendemos que emprenda un profesor, implica una representación activa de la realidad de su práctica, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones implicadas, confrontar con otros y tomar en consideración las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas o decisiones fundamentadas sobre futuras lecciones. Las posibilidades para concretar acciones reflexivas que favorezcan dicho proceso en un curso de formación inicial, también se ven afectadas por la realidad de la práctica docente; el éxito de dichas acciones infiere favorablemente en la evolución del profesor.

LOS PROBLEMAS PROFESIONALES

La reflexión arranca de definir problemas profesionales, que mueven al profesor a coordinar conocimiento práctico con conocimiento teórico.

Schön (1992) recupera de Dewey el término problemática y manifiesta que «el práctico define un problema cuando lo elige y denomina aquello en lo que va a reparar» (p. 18). El docente profesional selecciona sus puntos de atención y los organiza orientado por el sentido de la situación y la coherencia que guía el conocimiento. La Tabla 1, resume las ideas de Schön (1992), estableciendo una tipología para clasificar situaciones problemáticas percibidas y formuladas por los profesionales.

Tabla 1. *Tipología para clasificar el origen de las situaciones problemas*

Situaciones problemáticas	Descripción según la percepción de la resolución y el conocimiento del objeto.
Poco definidas, inciertas y desordenadas	Proceden de hechos poco definidos, por lo que se espera una resolución limitada o poco evidente.
Se centran sobre formas variadas, de un mismo tópico	Involucran hechos referentes a objetos variados y requieren para su resolución diversas interpretaciones de los objetos.
Incluyen conflictos éticos y de valores	Exhiben un dilema personal/cultural entre el objeto y las posibles opciones a tomar para buscarles solución.
Amplias que incluyen variados tópicos	Tienen su origen en hechos que se perciben desde múltiples perspectivas. La resolución involucra varios significados, dentro de un amplio campo conceptual.
Limitadas y únicas	La resolución busca exactamente esa alternativa que responde a un hecho particular.

La situación problema también se ve afectada por la expectativa que se tiene sobre la racionalidad de su solución. Para clasificar el tipo de problema y el proceso de reflexión, recurrimos a la caracterización que hace Van Manen (1977) sobre la racionalidad que impera en el planteamiento y en la expectativa de validez de la solución. Consideramos que una situación tiene racionalidad técnica cuando espera una solución que lleve a la aplicación eficaz en la práctica, de habilidades y conocimientos técnicos, incluyendo la selección y uso adecuado de estrategias específicas. Una situación pretende la acción práctica, cuando presta atención a la lógica de la interacción entre los individuos y el medio en el contexto de la práctica profesional. Por último, Van Manen (1997), señala que una situación se presta a la reflexión crítica, cuando predispone al cuestionamiento de los criterios morales, éticos y normativos relacionados directa o indirectamente con la actuación práctica y sus consecuencias sociales.

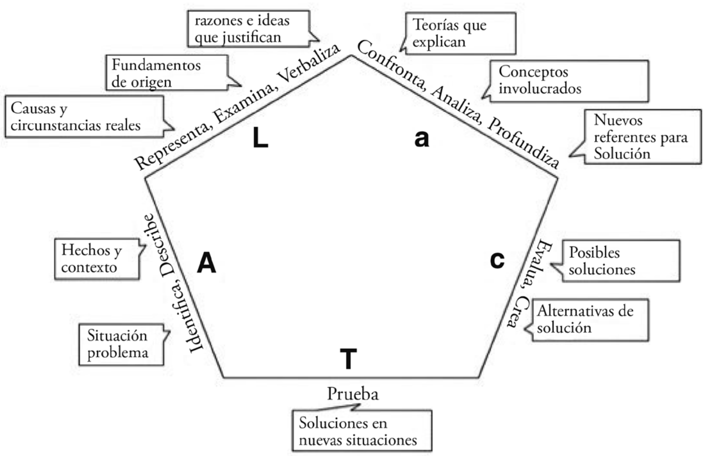
El proceso de reflexión puede arrancar de los distintos tipos de cuestiones profesionales señaladas anteriormente. Tal como reflejamos en Peñas y Flores (2005), consideramos que la actuación reflexiva se ve acrecentada cuando se manifiesta la capacidad de distanciarse del problema y de buscar diversas perspectivas, estableciendo relaciones entre los diversos niveles en que se formulen las situaciones problemas (técnica, práctica y crítica).

Consideramos la existencia de evidencias de reflexión del profesor cuando, aunque formule la cuestión *¿cómo enseñar a traducir enunciados verbales en ecuaciones?* (de tipo amplio, según las categorías derivadas de Schön (1992) y de nivel técnico, según la de Van Manen (1977)), la relacione con cuestiones más precisas y de otro nivel, como *¿qué destrezas requiere traducir enunciados verbales?* (de nivel didáctico), o *¿para qué enseñar álgebra?* o *¿qué efecto emancipador tiene el empleo del álgebra?* (de nivel crítico, según las categorías de Van Manen, 1977). Por tanto, las categorías establecidas para los problemas, aun guardando cierta jerarquía, pueden variar según las relaciones que establezcan en el curso de su proceso de profundización y reformulación de los problemas.

EL MODELO DE REFLEXIÓN EN EL ESTUDIO

En este estudio elegimos el modelo reflexivo ALaCT (Korthagen et al., 2001) en el que se identifica la reflexión como un proceso que de manera cíclica involucra cinco fases. En la Figura 1 se especifica cada fase, en las que con el propósito de estimular la reflexión docente, se incluyen preguntas que orientan las acciones reflexivas (Korthagen et al., 2001). Su notación se identifica con las siglas de las iniciales de su definición (Action, Looking back on the action, awareness of essential aspects, Creating alternative methods of action y Trial).

Figura 1: Ciclo de reflexión ALaCT, de Korthagen et al. (2001)



El modelo se centra en una situación problema detectada por el docente y expresa las acciones previstas para llevar a cabo el proceso de reflexión en relación con dichas situaciones, los conocimientos del docente, sus actuaciones y sus fundamentaciones. A continuación, describimos las cinco fases:

Acción o experiencia: Se identifica y plantea una problemática, describiendo los hechos conflictivos y de duda observados en la práctica, y se da sentido al objeto de reflexión concretándose en una cuestión.

Mirar hacia atrás en la acción: Consiste en esbozar una «imagen» de los acontecimientos que han dado lugar a la problemática. En esta fase se revelan los hechos sucedidos. Examinar y exteriorizar el significado de los objetos de reflexión conduce a la mirada distante de la realidad.

Conocimiento de puntos importantes o esenciales: Supone tomar conciencia de la acción. En esta fase se resaltan los elementos relevantes de la situación inicial que conducen a la concienciación sobre el conocimiento y profundización del objeto de la problemática.

Crear, buscar y preparar alternativas para acción: Consiste en proponer una solución a la problemática, fruto de las fases anteriores. En esta fase se buscan estrategias para reformular el plan de acción para eventos posteriores.

Comprobar en una nueva situación: Se trata de aplicar la solución en una nueva situación e iniciar un nuevo ciclo con la problemática redefinida a partir de esta aplicación.

EL TALLER DE REFLEXIÓN

El curso sobre conocimiento y desarrollo profesional pretende iniciar a los participantes, profesores con experiencia docente y graduados recientes, en esta línea de investigación. Comprende tres módulos, el primero de introducción a la investigación en la línea, el segundo que profundiza sobre el constructo conocimiento profesional del profesor de matemáticas, y el tercero que trata sobre desarrollo profesional. Este tercer módulo tiene forma de taller de reflexión, ya que se pretende que los estudiantes lleven a cabo un proceso de reflexión de manera colectiva. El taller tiene una duración de un mes, con reuniones semanales en las que se presentan reactivos para que los participantes realicen las fases de reflexión, a partir de una problemática de su práctica, considerando las etapas del modelo reflexivo ALaCT (Korthagen et al., 2001).

La fase A de *acción o experiencia* se realiza en la primera sesión del taller, tras presentar el concepto de desarrollo profesional y la idea de reflexión del profesor para fundamentar su conocimiento profesional, sin perder de vista la percepción de la enseñanza que se tiene desde el desempeño práctico. Consiste en identificar, describir y plantear una situación que ha constituido un problema durante su práctica docente.

Esta experiencia es ajena al taller, es decir, ocurrió en algún momento de su práctica. Los participantes tienen que relatarla identificando el sujeto que se ve afectado (generalmente el alumno o el profesor), la acción a la que afecta (generalmente aprender, enseñar, gestionar, etc.) y el contexto en que se ha presentado. Finalmente la formulan en forma interrogativa y la exponen a sus compañeros, quienes juzgan y sancionan si está planteada de manera comprensible o necesitan información complementaria, hasta llegar a la formulación definitiva. Al llevar a cabo esta actividad, los participantes comienzan a tomar cierta distancia de su práctica para concretarla y compartirla.

La segunda sesión emplea el concepto de creencia y su influencia sobre la actuación docente. Para introducir a los participantes en la siguiente fase, *distanciamiento del problema*, el formador solicita a los estudiantes que se pongan en el lugar de los demás compañeros, y expresen algunas ideas que piensan que está influyendo en el compañero, para apreciar la cuestión seleccionada como problemática. El formato de estas ideas es del tipo: *Yo creo que ... cree que ...*

De esta forma comienza la tercera fase del proceso ALaCT, favoreciendo *tomar conciencia de elementos fundamentales del problema* a partir de dos aspectos: a) la recogida de las ideas expresadas por los demás compañeros, referentes a su posición para formular el problema y b) la organización y posicionamiento frente a estas ideas. Para ello, los estudiantes deben completar la identificación de creencias de sus compañeros, colocando una suposición de creencia en una línea del foro abierto en la plataforma de la asignatura. De este modo, cada participante toma conciencia de ciertos elementos implícitos o explícitos en su problema. En la tercera sesión del taller se comienza en clase una comunicación de ayuda a los demás, describiendo experiencias similares que han tenido otros participantes, o recomendando lecturas que han sido interesantes para afrontar problemas parecidos.

Se está con ello preparando la cuarta fase del ciclo, pues el participante recibe informaciones y documentos que, a juicio de los compañeros, ayudan a analizar su problema. La lectura de estos documentos orienta al estudiante a examinar nuevas teorías que subyacen al problema que ahora se hace explícito.

A partir de estas tres fases reconocen de manera progresiva la complejidad de la práctica y en su análisis consideran cada vez más elementos. Así avanzan en su desarrollo profesional, como menciona Climent (2002).

En la cuarta fase del proceso ALaCT, el formador insta a los estudiantes a *crear, buscar y preparar comportamientos alternativos para la acción*. En este momento, el participante debe de ser capaz de buscar estrategias o soluciones de cómo abordar posteriormente su problemática para aplicarlas en un nuevo evento escolar valiéndose, de las experiencias relatadas, los textos recomendados o los que pueda extraer de ellos, atendiendo a la bibliografía que suele acompañar estos textos.

Por último, para apoyar a los estudiantes a transitar por la última fase del proceso ALaCT, *comprobar en una nueva situación*, el formador les solicita que reformulen el problema y/o propongan soluciones. Para favorecer la identificación de los elementos metacognitivos que acarrea la reflexión, se pide un escrito final, donde cada participante formalice todo el proceso, explicitando una conclusión sobre el proceso llevado a cabo, es decir, una meta-reflexión.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, describimos el estudio de casos (Flick, 2004) de dos profesoras participantes en el taller de reflexión a las que llamaremos Virginia y Carla. Virginia es una docente chilena que imparte clases en enseñanza primaria, con especialidad en pedagogía matemática, ha colaborado en la formación inicial de profesores y en la elaboración de libros de texto de matemáticas; tiene 10 años de experiencia. Carla es española, graduada en matemáticas, con 5 años de experiencia como profesora de secundaria.

Describimos el proceso de reflexión llevado a cabo por Virginia y Carla, examinando si se han puesto de manifiesto elementos que indiquen reflexión durante este proceso de formación.

Para la realización de estos estudios de caso vamos a emplear los datos a partir de las formulaciones realizadas en el primer seminario, algunas intervenciones en los foros durante el proceso y, especialmente, los trabajos finales de las estudiantes.

Fase A: Identificación y descripción del problema

El caso de Virginia

Virginia inició el proceso de reflexión situándose en el contexto de su práctica docente: «la problemática de los números primos surge en el contexto de la educación primaria chilena, en el quinto y sexto curso, donde me desempeñé como docente». Virginia presentó de modo amplio el contexto de la práctica (educación primaria).

Continuó describiendo la situación problemática en tres niveles: la generalidad del problema de enseñanza que se va a abordar, el concepto matemático objeto de conflicto y el conjunto de tareas que se seleccionan para su enseñanza y que provocan el conflicto.

> «La enseñanza se basó en las actividades propuestas en los textos escolares y programas de estudio oficiales. Estos introducen la idea de número primo en

contraposición a los números compuestos aplicando la Criba de Eratóstenes. Luego los definen y continúan con actividades en las que deben clasificar una lista de números en primos o compuestos, o en las que deben centrarse en características de los números para clasificarlos, por ejemplo: ¿todos los números cuyo dígito de la unidad es 1 es un número primo?, ¿todos los números impares son primos?, etc. En cuanto a las situaciones problemas, algunas aluden a repartos preguntando cuántos grupos se pueden realizar y cuáles son las combinaciones posibles, esperando que respondan que, dado que la cantidad es un número primo X, las opciones son hacer un grupo con X elementos o X grupos con un elemento».

(Descripción 1 del contexto del problema en 1º sesión taller, por Virginia)

La definición de la situación problemática requiere la identificación de los hechos conflictivos y las dudas del sujeto fruto del conflicto. Virginia, a medida que describía el problema, extrajo aquellos aspectos que entran en conflicto con sus creencias:

«En respuesta a la propuesta descrita, la primera interrogante de los y las estudiantes siempre era sobre su nombre "primos" y preguntaban si también existían los números "hermanos", "amigos" u otros, focalizando su atención en lo que evocaba la palabra, la relación de parentesco. Otro fenómeno común era asociar los números primos con los números impares y los números compuestos, con los pares. Aunque lograban realizar las actividades la pregunta final era ¿y para qué sirven?»

(Descripción 2 del contexto del problema en 1º sesión taller, por Virginia)

Identifica por tanto tres elementos conflictivos:

a) La semántica del término asociado al concepto matemático, «primo».
b) La profundización en el trabajo de los números pares e impares se convierte en un obstáculo que provoca errores al asociar los números primos con los impares y los compuestos con los pares. Virginia lo plantea como un «fenómeno común».
c) Virginia estaba sorprendida porque al final del proceso de enseñanza los estudiantes reclamaban ver «utilidad» a los conceptos estudiados.

Los tres elementos conflictivos señalados por la profesora están asociados al proceso de enseñanza. Eso condicionará la definición final del problema:

«Por lo anterior, es que me centré en las actividades de enseñanza, es decir, el sujeto es el profesor y me planteo lo siguiente: ¿Cómo enseñar los números primos para que los estudiantes le otorguen sentido, comprendan qué son y cuál es su utilidad?»

(Formulación del problema de Virginia en forma interrogativa)

Se trata de un problema que, según la clasificación de Schön (1992), tiene su origen en un conflicto ético. La profesora considera que los planteamientos curriculares y de los libros de texto no responden a lo que cree que son las necesidades educativas de los estudiantes: aprender con sentido y la utilidad de los conceptos matemáticos.

Por otro lado, el problema planteado se basa en la aplicación eficaz de habilidades y conocimientos técnicos en el aula. Se trata de un problema de racionalidad técnica, de acuerdo con los tipos de reflexión planteados por Van Manen (1977).

El caso de Carla

Carla definió el problema en su primera intervención de una manera muy directa:

> El otro día, dando clase en 2º E.S.O. estuve explicando la suma, resta y multiplicación de polinomios y unos alumnos me preguntaron que para qué se usaba esto en la vida real y realmente, en ese momento, no supe que contestarles. Me preocupa no saber poner ejemplos de situaciones reales en los que se utilice cualquier contenido matemático.
>
> ¿Cómo puedo proponer a los alumnos situaciones reales en las que se utilicen las operaciones con polinomios?
>
> (Definición problema de Carla en primera sesión)

Posteriormente, en su trabajo final comenzó por hacer explícita una preocupación profesional antes de comenzar a definir el problema:

> «En mi labor como profesora me preocupa no saber poner ejemplos de situaciones reales en los que se utilice cualquier contenido matemático».

El problema por tanto surgió de la práctica y de una preocupación personal que pone de manifiesto su inseguridad sobre su formación y conocimiento: «me preocupa no saber poner ejemplos». Esta idea se reafirma cuando leemos la descripción del contexto en el primer texto.

El contexto está definido en este caso en términos específicos (una vez en una clase de 2º de ESO…). El origen del problema está en la búsqueda a la respuesta de un hecho particular.

Siguiendo la clasificación de las situaciones problemáticas de Peñas y Flores (2005), vuelve a plantearse un problema basado en la racionalidad técnica de Van Manen (1977).

Fase L. Distanciamiento del problema

En esta fase, el proceso de reflexión supone que el profesor mira hacia atrás buscando las variables que intervienen en el problema. Nuestro caso se trata de formación inicial y, al no existir una práctica diaria de la que surgen los problemas, hemos realizado una adaptación del modelo quedándonos con los elementos de esta fase que ayudan a objetivizar el problema. De ahí que hayamos cambiado el nombre de la fase por la de «Distanciamiento del problema».

En esta fase el docente se distancia del problema planteado, mirando los demás problemas con visión analítica, pero sin poder juzgarlos. Para ello, en el taller se les pide que hagan hipótesis sobre qué principios de acción subyacen a los problemas planteados por los compañeros, expresándolas mediante una frase que muestra el carácter subjetivo de su apreciación: «Yo creo que ... cree que....». La necesidad de buscar qué creencias están presentes en los problemas de los demás ayuda a distanciarse de la formulación de los problemas, para contemplarlos con cierta perspectiva.

El caso de Virginia

Virginia fue prudente al emitir creencias que subyacen en los problemas de sus compañeros. De los 16 participantes (Virginia sólo podría enunciar de los otros 15), emite 4, sólo aquellos que encierran temas que conoce, por estar relacionados con las matemáticas de Primaria (sentido y operaciones con los enteros, uso del mínimo común múltiplo en la suma de fracciones, y significado del Teorema de Pitágoras). En todos estos casos enunció una creencia de tipo didáctico, relativa a su enseñanza, tratando de reflejar una dificultad que aprecia el emisor del problema de manera explícita o implícita.

Tabla 2: Creencias emitidas por Virginia que subyacen a problemas de compañeros

Problema	**Virginia:** Yo creo que .. cree que
A: ¿Qué falta por comprender sobre números enteros para resolver operaciones combinadas?	– comprender jerarquía de operaciones y reglas de signos en enteros son conocimientos previos necesarios para no cometer errores en operaciones combinadas.
B: ¿Qué estrategias metodológicas son más convenientes para enseñar a sumar y restar números enteros?	– Números naturales son obstáculo en aprendizaje de enteros.
D: ¿Cómo convencer a alumnos de que es mejor usar el mcm para calcular denominador común en suma de fracciones?	– si sus alumnos utilizan el mcm para suma y resta de fracciones en lugar de multiplicación de denominadores, realizarán operaciones combinadas de manera más sencilla al no incrementarse numeradores y denominadores.
E: ¿Cómo comprenden alumnos Teorema de Pitágoras?	– utilización de recursos es necesario para comprender y aplicar correctamente fórmula asociada a Teorema Pitágoras

En todas las creencias emitidas por Virginia se apreció que incorporaba elementos no recogidos directamente en los enunciados de los problemas de sus compañeros, aportando causas posibles, de conocimientos de didáctica del contenido correspondiente (las dificultades ligadas a la jerarquía de operaciones para operaciones combinadas y el obstáculo epistemológico que suponen los naturales sobre los enteros, en las dos primeras), o de razones prácticas.

El caso de Carla

Carla formuló 12 creencias implícitas en la definición de los problemas de sus compañeros. En general, estas creencias resaltaban algo que se indicaba en el enunciado del problema. En la tabla 3 se recogen los correspondientes a las cuestiones que se presentaban en la tabla 2, así como la creencia que asignó a Virginia:

Tabla 3: Creencias emitidas por Carla que subyacen a problemas de compañeros

Problema	**Carla:** Yo creo que … cree que
A ¿Qué falta por comprender sobre números enteros para resolver operaciones combinadas?	– alumno conoce operaciones con enteros, pero las confunde al hacer una combinación de todas ellas.
B: ¿Qué estrategias metodológicas son más convenientes para enseñar a sumar y restar números enteros?	– como alumnos no están familiarizados con uso de números enteros, cometen errores cuando suman o restan.
E: ¿Cómo comprenden alumnos Teorema de Pitágoras?	– aunque alumnos han memorizado Teorema de Pitágoras no saben cuándo usarlo.
Virginia: ¿Cómo enseñar números primos para que otorguen sentido, comprendan qué son y su utilidad?	– es importante que alumnos, además de saber cuáles son números primos, conozcan sus utilidades.

Carla, al formular creencias asignadas a sus compañeros, o bien expresó la misma idea de manera diferente (otorgar sentido, en Virginia, lo específica como «saber cuáles son .. y conocer utilidades), o enunció posibles causas de los problemas (confundirse en operaciones, falta de familiaridad, sólo memorizar sin saber cuándo usar).

Fase a. Toma de conciencia

En esta fase cada participante aprecia su problemática tras verse obligado a mirar con cierta perspectiva la de los demás compañeros, y mirar las apreciaciones que le han asignado los demás. Con ello está en mejores condiciones de contemplar los acontecimientos que han dado lugar a su problemática, pudiendo tomar conciencia de haber empleado determinados aspectos del significado de los objetos y comenzar a objetivarlos.

El caso de Virginia

Las creencias relativas al problema de Virginia fueron redactadas por nueve compañeros. Una muestra de que Virginia se distanció se aprecia en el trabajo final, en el que señaló para esta fase:

> «Las nuevas cuestiones evidencian que los comentarios de los docentes, en algún grado, me identifican y me hicieron dar cuenta que hay tres focos en mi problema inicial».

La profesora estableció tres categorías para agrupar las creencias que los compañeros del taller le indican (tabla 4).

Tabla 4: Organización de Virginia sobre las apreciaciones de sus compañeros

Categorías	Creencias
La utilidad es importante en el aprendizaje	Se fijan en lo anecdótico porque no conocen su utilidad. Deben ser conscientes de la importancia de los números primos antes de su uso en distintos contextos. La utilidad de los números primos en diversos campos justifica su inclusión en la Educación Primaria. Además de saber qué son los números primos es necesario conocer su utilidad. No existe una forma clara que transmita la utilidad de los números primos a los estudiantes.
Ideas ingenuas reflejan un problema en el aprendizaje	Generan ideas ingenuas de números primos por no atender a su utilidad. No comprenden lo que son los números primos y solo retienen concepciones superficiales y anecdóticas. Es un problema que los alumnos busquen asociar los números primos con algo distinto de lo que se pretende.
Propuestas clásicas pueden ser el problema	Las propuestas clásicas no son útiles para el aprendizaje de este tópico. Las propuestas clásicas no consiguen motivar el aprendizaje de los números primos y no justifican su necesidad. Criba de Eratóstenes no permite darle sentido a los números primos. La propuesta clásica no profundiza en su utilidad y significado.

Virginia apreció que, para varios de sus compañeros, su problema se centra en la utilidad de los números primos, para otros en la comprensión que los alumnos tienen sobre los números primos, pero otras creencias identifican en su problema una visión crítica de lo que ella llamó «propuestas clásicas (de enseñanza de los números primos)», que utilizó para contextualizar el problema detectado, pero que evitó denostar en su formulación inicial.

El caso de Carla

En esta fase solo tres compañeros y el profesor emitieron ocho creencias para Carla que influyen en su problema. Carla no estaba de acuerdo con todas las creencias que sus compañeros identificaron en ella. Organizó las creencias según atendieran a caracterizar qué entienden los alumnos por «utilidad», o a buscar la utilidad de los conceptos algebraicos. Posteriormente mostró su posición, agrupando las creencias por «estar de acuerdo» y «estar en desacuerdo», añadiendo una justificación a su postura, tal como se aprecia en el ejemplo de la tabla 5. Lo más interesante es cómo se posiciona respecto a las creencias, especialmente por sus justificaciones.

Tabla 5: Organización que hace Carla de las creencias que le asignan sus compañeros (ejemplos)

Posición	Creencia	Justificación
De acuerdo	Proponer relaciones con la vida real motivará a los alumnos	Si es cierto que cuando los alumnos vean la utilidad de algún contenido, están más motivados para aprenderlo
En desacuerdo	Los alumnos se sentirán satisfechos si les presentan situaciones científicas en las que se aprecie utilidad	Creo que además de situaciones científicas, se deben proponer a los alumnos otro tipo de situaciones en las que se utilicen los polinomios

Se aprecia que Carla se reafirmó en que los polinomios tienen utilidad, en algo más que en las ciencias, y que los alumnos deben conocer esta utilidad, aunque esto no es suficiente para lograr el aprendizaje. También, en que mostrar la utilidad favorecerá el aprendizaje de los alumnos.

Fase C. Confrontación

La transición de la fase L a la fase a es una parte importante del proceso de reflexión. Siguiendo la idea de que los problemas en la enseñanza están causados generalmente por discrepancias entre el pensamiento, el sentimiento, el deseo y la actuación de una persona, y/o por discrepancias entre dichos aspectos y los mismos aspectos en los alumnos, el formador anima a los estudiantes a que exploren dichas discrepancias. La salida a estas tiene que producirse por incorporación de nuevas formas de contemplar el problema, siempre que estas formas encajen en la disposición del que la recibe.

Para lograr este fin, se dedica una sesión del taller a relatar situaciones prácticas similares a las vividas por el participante que ha detectado cada problema. Si no se tienen experiencias relacionadas, se les sugiere que recomienden textos para profundizar en el estudio de los problemas. La recomendación se continúa posteriormente, a través del foro del curso. El receptor deberá escuchar y pensar en las soluciones propuestas por sus compañeros, y consultar los textos recomendados, o nuevos documentos que él mismo encuentre, para profundizar en aquel conocimiento teórico que le sea significativo para apreciar mejor su problema profesional.

El caso de Virginia

La profesora expresó que recurre a pares para caracterizar su problema profesional: «en el proceso de reflexión conté con los aportes realizados por otros docentes quienes tuvieron la oportunidad de leer y reflexionar sobre la problemática expuesta en la fase anterior». Se le aportaron sugerencias sobre libros de profesor, como los de la colección Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, de la editorial Síntesis (Sierra et. al, 1989), un artículo de propuestas innovadoras en la enseñanza del número primo (Peñas y Madrid, 2015), y dos libros de divulgación matemática sobre los números primos (Corrales, 2016 y Gracián, 2010).

En el caso de Virginia, la toma de conciencia la manifestó organizando los focos de su problema, y posteriormente, posicionándose sobre los textos recomendados, relativos a estos focos:

> (...) me hicieron dar cuenta que hay tres focos en mi problema inicial. Sobre la utilidad, (…), Sobre las ideas ingenuas, (..) y Sobre las propuestas clásicas (..).
>
> «Al leerlos y clasificarlos me surgieron nuevas interrogantes como: ¿Qué entiendo por utilidad?, ¿por qué enfatizo tanto en ella? ¿La propuesta de enseñanza tradicional acaso no es un modo de aplicación? ¿Cuál es el elemento que espero introducir en la enseñanza de modo que pueda mejorar la comprensión? ¿De qué modo se puede trabajar sobre las ideas ingenuas de los y las estudiantes?»
>
> (Extractos del trabajo final de Virginia)

Aquí se manifiesta la Fase 3, acompañada de acciones como aceptación, empatía, autenticidad, concreción, confrontación, generalización, utilización del aquí y ahora, ayudar en hacer cosas, ayudar en explicitar.

Virginia llevó a cabo una confrontación: «Para responder las nuevas preguntas y aclarar los supuestos que me llevaron a plantear la problemática realicé una confrontación». Esta acción, como ella misma indica, permite mirar la enseñanza no solo como un conjunto aislado de procedimientos técnicos sino como aspectos que se van construyendo basándose en valores y actitudes.

Por ello, la profesora revisó «literatura sugerida por los docentes y otras que busqué en base a los tres focos definidos». Organizó la revisión de la literatura según las categorías de creencias establecidas en la fase anterior. Gracias a ello llega a las siguientes conclusiones, que hemos resumido:

> Su definición y utilidad.
>
> – Relacionados con el Teorema fundamental de la aritmética (un número cualquiera se puede expresar de forma única como el producto de números primos).
>
> – Elementos primordiales con los que se construyen todos los números (palabra primo, quiere decir primero, ya que todos los números pueden obtenerse a partir de ellos, Gracián, 2016, p.16).

– Utilidad en criptografía, pues no siguen un patrón de comportamiento claro, son un conjunto caótico, se distribuyen de manera aleatoria por la serie de números naturales.

Las propuestas clásicas.

– La Criba de Eratóstenes para generar números primos.

– Otro método permite encontrar más números primos y demostrar que son infinitos, planteado Euclides, consiste en tomar una cantidad sucesiva de primos, multiplicarlos y añadir 1 al producto, lo que resultará un número primo o que se puede escribir como productos de primos que no se conocían.

Ideas y problemas en el aprendizaje.

– Evidencia de dificultades en aprendizaje de números primos y otros conceptos relacionados con la divisibilidad, que se deben a la mínima conexión entre contextos de la teoría de números. (Zazkis, 2001)

(Extracto trabajo final de Virginia).

El caso de Carla

Del mismo modo, Carla realizó la confrontación «mediante la revisión de la literatura y experiencias sugeridas en relación a la utilidad de los polinomios en la vida real». Los compañeros le recomendaron un artículo de innovación en una revista latinoamericana (Soto, Mosquera y Gómez, 2005), obtenido en internet libre, que, como indican los autores «ilustra la utilización de una herramienta didáctica para la educación básica denominada La Caja de Polinomios la cual permite el desarrollo del álgebra de polinomios. Esta herramienta fue construida a partir de la idea de homogeneización de polinomios cuadráticos introducida por el matemático árabe Tabit ibn Qurra al-Harrani en el siglo IX» (op. cit., p. 83).

El formador recomienda el informe Cokcroft (1985), el manual de Ortega (2005) y el capítulo Davis y Hersh (1989) sobre utilidad, además de libros de matemática recreativa. Carla revisa todos estos documentos y organiza la revisión bibliográfica basándose en las recomendaciones de los compañeros y descubriendo la «utilidad de las matemáticas, posibilidad de realizar distintas tareas para que los alumnos observen esta utilidad y así motivarlos a aprender y trabajar los contenidos, oportunidad de realizar operaciones con polinomios de una forma más lúdica y tal que los estudiantes desarrollen su inteligencia…».

Carla resumió información sobre la idea de utilidad, de Davis y Hersh (1989) (aprecia que la utilidad de las matemáticas no tiene por qué ser inmediata), y sobre la repercusión de la utilidad en la enseñanza de las matemáticas (del Informe Cockcroft, 1985, extrajo algunas directrices sobre adaptación de la enseñanza a cada alumno y de Ortega, 2005, el interés en enseñar a través de situaciones cotidianas). Los textos de matemática recreativa (Perelman, 1989), le mostraron problemas curiosos que requieren aplicar polinomios. El texto de Gómez, Mosquera y Soto (2005) le animaron a buscar soportes históricos que contribuyan al desarrollo de nuevas alternativas y estrategias didácticas basadas en lo lúdico y suministrando un recurso que posibilita el cálculo de suma, resta, multiplicación, división y factorización de polinomios de grado 2; además de poder realizar operaciones con polinomios de grado mayor que 2.

Fase T: Reformulación para comprobar una nueva problemática

Como consecuencia de la fase de confrontación, y no pudiendo realizar una comprobación práctica de sus estudios y propuestas, en el taller se les promueve a que reformulen el problema planteado, teniendo en cuenta el máximo de informaciones previas. Estas reformulaciones se recogen en los trabajos finales, posteriores al taller.

El caso de Virginia

La revisión de la literatura llevó a Virginia a reformular el problema de la siguiente manera:

> «¿cómo articular los conceptos relacionados con la teoría de números para darle sentido al aprendizaje de los números?».
>
> (Extracto trabajo final de Virginia)

Ahora podemos considerar que el tipo de problema es fundamentalmente de reflexión didáctica («articular conceptos», «dar sentido al aprendizaje»), concretada en matemáticas, y con cierta preocupación crítica. El problema encierra un cuestionamiento de los criterios curriculares al indicar el origen de la solución (ampliar conceptos de la teoría de números) y el fin de la solución (aprendizaje con sentido), ambos contrapuestos con el origen curricular del problema inicial (propuestas de los libros de textos) y el fin (encontrar números primos).

El caso de Carla

El nuevo conocimiento que ha adquirido y que resume en su trabajo final, supone una confrontación tal con el antiguo que la reestructuración del problema implica tener en cuenta algo que hasta ese momento no entraba en su consideración, la metodología: «¿Cómo puedo conseguir que los alumnos vean la utilidad de las operaciones con polinomios y además motivarlos para que aprendan este contenido?». Carla en este caso, descubrió en los libros consultados propuestas curriculares que desconocía y que considera que deberían formar parte de la solución, por lo que hace una reformulación didáctica, añadiendo al problema inicial la idea de motivación para aprender.

CONCLUSIONES

El objeto de este capítulo es examinar la ayuda que supone un taller de reflexión docente para el desarrollo profesional de los participantes, identificando si los profesores realizan un proceso de reflexión. Se observa este proceso apreciando que los profesores que participan en el taller recorren las etapas de un ciclo reflexivo y estructuran o reestructuran una experiencia, un problema o conocimiento existente o sus percepciones (Wubbles y Korthagen, 1990).

El taller fue diseñado arrancando de trabajos previos (Flores, 2000 y Peñas y Flores, 2005) con el fin de promover la reflexión y siguiendo las etapas del ciclo reflexivo de Korthagen (Korthagen et al., 2001).

El estudio de casos expuesto presenta dos profesores que logran diferentes niveles de reflexión si atendemos tanto a la definición de reflexión de Wubbles y Korthagen (1990) como a la caracterización de reflexión que se recogen en Peñas y Flores (2005).

La tabla 6 recoge la definición de los problemas de cada uno de los casos estudiados en dos fases diferentes del ciclo reflexivo.

Tabla 6: Definición de problemas de las profesoras

Caso	Fase 1. Acción	Fase 3. Toma de conciencia
Virginia	¿Cómo enseñar los números primos para que los estudiantes le otorguen sentido, comprendan qué son y cuál es su utilidad?	¿Cómo articular los conceptos relacionados con la teoría de números para darle sentido al aprendizaje de los números?
Carla	¿Cómo puedo proponer a los alumnos situaciones reales en las que se utilicen las operaciones con polinomios?	¿Cómo puedo conseguir que los alumnos vean la utilidad de las operaciones con polinomios y además motivarlos para que aprendan este contenido?

El resumen de lo ocurrido en el taller durante la reformulación del problema puede verse en la tabla 7.

Tabla 7: Descripción sintética de las etapas de reflexión recogidas por los casos

Categorías	Virginia	Carla
Naturaleza del problema	Incluyen conflictos normativos	Busca la alternativa a un hecho particular
Dificultad detectada	Metodológica	Matemáticas
Tipo de problema	Racionalidad técnica	Racionalidad técnica
Actitud al justificar las creencias	Acepta las creencias de sus compañeros	Justifica los desacuerdos con las creencias de sus compañeros
Uso de los textos	Identifica en ellos la idea principal	Comenta todos y argumenta expectativas
Reformulación del problema	Cambia de problema por algo más preciso	Cambia elementos superficiales de problema

La reflexión se considera un proceso mental de reestructuración del problema. Las dos profesoras reformulan el problema identificado en su acción o experiencia, incorporando nuevos elementos que intervienen en la formulación. Algunos de ellos generan una mayor profundidad, porque como en el caso de Virginia, pasó de situar el problema en los planteamientos curriculares y de los libros de texto a reformular un problema cuya solución se apoya en aumentar el significado del contenido (número primo), lo que repercute en el conocimiento teórico del profesor. Estos cambios también suponen un salto en el tipo de problema. Inicialmente eran problemas de racionalidad técnica y evolucionan a un nivel crítico (Virginia) y práctico (Carla), según los niveles de reflexión de Van Manen (1977). La trayectoria de reflexión hipotética parte de una cuestión técnica y, a raíz de sucesivos distanciamientos del estudiante de la situación inicial, da lugar a cuestiones de carácter práctico y en un último nivel crítico (Peñas y Flores, 2005). En este sentido podemos afirmar que tanto Virginia como Carla han seguido una trayectoria de reflexión.

El taller de reflexión ha sido una instancia que permitió a las profesoras transitar desde una postura técnica a una crítica o práctica, lo que evidencia la importancia que tuvo este espacio de reflexión dentro de su desarrollo profesional.

La presencia de talleres de reflexión donde se pongan en juego las creencias en torno a problemáticas es una necesidad tanto en la formación continua como inicial, pues facilita la integración en la enseñanza de lo profesional y lo personal, y la conexión entre teoría y práctica (Korthagen, 2010). Estudiar qué acontece en los procesos formativos donde el formador toma la reflexión como punto de partida para alcanzar las expectativas de sus participantes sin desestimar las propias, permite mirar con mayor perspectiva los problemas profesionales que aquejan al profesorado observando, por ejemplo, si los tipos problemas identificados hace casi tres décadas por Schön (1992) siguen persistiendo o han evolucionado hacia otros orígenes y son de otra naturaleza.

REFERENCIAS

Beijaard, D., Meijer, P., y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education*, *20*, 107-128.

Cardeñoso, J.M., Flores, P., y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática*. (pp. 233-264). Granada: D. Didáctica de la Matemática.

Chamoso, J., Cáceres, M. y Azcárate, P. (2012). La reflexión como elemento de formación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *7*(10), 13-51.

Chávez, Y., y Llinares, S. (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de enseñar matemáticas en profesores de primaria. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 187-196). Jaén, España: SEIEM.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso.* (Tesis Doctoral). Universidad Huelva, España.

Cockroft, W. (1985). *Las matemáticas si cuentan*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Corrales, R. (2016). *El misterio de los números primos*. http://revistavacio.com/ciencia-y-tecnologia/numeros-primos/.

Davis, P.J., & Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática*. Madrid: Labor-MEC.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona: Paidós.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Flores, P. (2000). Reflexión sobre cuestiones profesionales surgidas durante las prácticas de enseñanza. *EMA, 5*(2), 1-28.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA: Revista Pensamiento Numérico y Algebraico*, *1*(4), 139-159.

Flores, P., y Fernández, F. (2001). Reflexión sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del Álgebra. En F. Perales y Otros (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas* (pp. 1787-1800). Granada: GEU.

Gracián, E. (2016). *Los números primos: un largo camino al infinito*. Barcelona: RBA Coleccionables.

Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. *British Journal of In-service Education, 19*, 37-42.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68* (24,2), 83-102.

Korthagen, F.A.J., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B., y Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Korthagen, F., y Verkuyl, H. S. (1987). *Supply and demand: Towards differentiation in teacher education, based on differences in learning orientations*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas*. Barcelona: Graó.

Peña, M. J., y Madrid, M. J. (2015). Propuestas de Innovación para la enseñanza de los números primos. *Épsilon, 32*(1), 67-74.

Peñas, M.J., y Flores, P. (2005). Proceso de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(1), 5-16.

Perelman, Y. (1989). *Álgebra recreativa*. Moscú: Editorial Mir.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' Knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225-236). New York: Routledge.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. En Grupo GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa, Portugal: APM.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P., y Ponte, J.P. (2017). An approach to the notion of reflective teacher and its exemplification on mathematics education. *Systemic Practice and Action Research*, *30*(1), 85-102.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo* diseño *de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.

Schön, D.A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. New York: Basic Books.

Sierra, M., González, M. T., García, A., y González, M. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.

Soto, F., Mosquera, S., y Gómez, C. P., (2005). La caja de polinomios. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 13*(1).

Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 259-283.

Van Manen, M. (1977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry*, *6*, 205-228.

Wubbles, T., y Korthagen, F.A.J. (1990). The effects of a Pre-service Teacher Education Programs for the preparation of reflective teachers. *Journal of Education for Teaching*, *16*(1), 29-43.

Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *4*(1), 63-92.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de Pedagogía, 220*, 44-49.

INFLUENCIA DE UN PROCESO DE AUTOEVALUACIÓN, COEVALUACIÓN Y EVALUACIÓN EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS DE PRIMARIA

INFLUENCE OF A SELF-ASSESSMENT, PEER-ASSESSMENT AND ASSESSMENT PROCESS IN PRIMARY SCHOOL TEACHERS TRAINING

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M.
Universidad de Salamanca

RESUMEN

La asignatura Matemáticas y su Didáctica III del Grado en Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Salamanca incluye el diseño y desarrollo de un Proyecto Estadístico, así como su posible aplicación didáctica, que los estudiantes realizan de forma grupal y autónoma contando con la formación, seguimiento y tutoría del profesor. En una fase intermedia cada grupo entrega un Avance del Proyecto Estadístico y se somete a un proceso de autoevaluación, coevaluación y evaluación del profesor, siguiendo la rúbrica de valoración presentada al inicio de la asignatura, para desarrollar la competencia evaluativa como aspecto integrante del conocimiento didáctico del contenido. Los resultados de las valoraciones fueron consistentes en la mayoría de los aspectos considerados y las discrepancias entre las valoraciones de los estudiantes y del profesor facilitaron la comprensión de los apartados del Proyecto Estadístico y su correspondiente mejora.

Palabras clave: *formación de docentes, evaluación para el aprendizaje, autoevaluación, coevaluación, proyecto estadístico*.

Cáceres, M.J. y Chamoso, J.M. (2019). Influencia de un proceso de autoevaluación, coevaluación y evaluación en la formación de profesores de primaria. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 351-372). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The subject Mathematics and its Didactics III of Primary Education Teacher degree at the University of Salamanca includes the design and development of a Statistical Project, as well as its possible didactic application, which students self-perform in groups, with the teacher's training, follow-up and tutoring. In an intermediate phase each group delivers a Statistical Project Progress report subject to a self-evaluation, peer-evaluation and teacher's evaluation, following the assessment criteria presented at the beginning of the subject to develop the evaluative competence as an integral aspect of the content knowledge for teaching. The assessment results were consistent in most aspects and the discrepancies between the students' and the teacher's assessments made easier the understanding of the sections of the Statistical Project and their corresponding improvement.

Keywords: *teacher training, assessment for learning, self-assessment, peer-assessment, statistical project.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se desarrolla en un contexto de formación de maestros de Primaria en Matemáticas durante los estudios de Grado. Se pretende que desarrollen competencias tanto de conocimiento matemático como de conocimiento didáctico del contenido (Ball, Thames y Phelps, 2008); es decir, se considera que deben adquirir un conocimiento teórico (saber), así como destrezas suficientes para impartir los contenidos (saber hacer), lo que puede organizarse en competencias matemáticas y profesionales (ver Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010).

Un aspecto importante del conocimiento didáctico del contenido es la evaluación. Los tipos de evaluación que se lleven a cabo en el aula pueden desempeñar un papel fundamental en el aprendizaje de los estudiantes, a la vez que proporcionar evidencias del progreso en ese aprendizaje (Boud, Cohen y Sampson, 1999). Para que un proceso involucrado en tareas formativas cobre importancia es adecuado que se considere una evaluación formativa que fomente la reflexión y permita la revisión del propio trabajo (Williams, 2017; Cáceres et al., 2010; Chamoso y Cáceres, 2009). Para ello sería conveniente involucrar a los estudiantes para maestro en el proceso evaluativo y pasar de la evaluación de aprendizajes a la evaluación para el aprendizaje. Una posibilidad es promover la evaluación entre iguales con autoevaluación y coevaluación unido a la evaluación del profesor (Miedijensky y Tal, 2016). La evolución de los trabajos valorados dará cuenta de la parte formativa de este tipo de evaluación.

Este proceso se puede desarrollar de diversas formas. En este trabajo se intenta que se desarrolle cuando los futuros docentes están elaborando un Proyecto Estadístico, objetivo general de una materia que deben cursar durante su formación inicial. En una sociedad de la información como la actual, la vida cotidiana de las personas no escapa a la presencia elevada de datos cuantitativos y estadísticas que se deben saber gestionar. Ello supone poseer un sólido conocimiento que involucre habilidades para el tratamiento de datos, que incluye resumir, analizar, interpretar y divulgar la información (Watson, 2002). Por ello, la formación actual de docentes requiere su capacitación para diseñar y evaluar tareas centradas en el análisis e interpretación de datos reales, así como conocer y experimentar procesos de evaluación de los aprendizajes.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El desarrollo de competencias en la formación de docentes

De forma general se recomienda que, en la enseñanza universitaria, se desarrollen competencias generales o trasversales como son la resolución de problemas, la formulación de preguntas, la búsqueda y uso de información relevante, la realización de juicios reflexivos y el desarrollo de pensamiento crítico y aprendizaje autónomo (Ibarra, Rodríguez y Gómez, 2012). En el ámbito de la formación del profesorado, si bien existe abundante investigación sobre el conocimiento que debe poseer un docente de Matemáticas, esta no está habitualmente centrada en el desarrollo de la competencia evaluativa del conocimiento estadístico.

En cuanto al desarrollo del conocimiento estadístico, Garfield y Everson (2009) recomendaron enfatizar el alfabetismo y pensamiento estadístico, utilizar datos reales, estimular la comprensión conceptual, promover el aprendizaje activo en el aula, utilizar tecnología, y evaluar para mejorar y valorar el aprendizaje del estudiante. Para ello, algunos autores aconsejaron la utilización de Proyectos Estadísticos durante la formación universitaria de los futuros maestros (Batanero y Díaz, 2011; Browning, Goss y Smith, 2014; Franklin et al., 2005).

El desarrollo de un Proyecto Estadístico comienza con el proceso de búsqueda de información para satisfacer la curiosidad y los intereses de los estudiantes y, en función de dichos intereses, formular preguntas sobre lo que se desea investigar y para cuya respuesta se precisa recoger datos, analizarlos e interpretarlos (Batanero y Díaz, 2011; Burrill y Camden, 2006; Dierker et al., 2016; Franklin, et al. 2005). Hacer que los estudiantes recopilen y analicen datos creará una red de significados que promoverá la construcción del conocimiento estadístico y su aprendizaje en una investigación creativa a partir de su planificación, descripción del fenómeno, elección del tipo de muestreo y selección del método estadístico de análisis (da Silva, Porciúncula y Pinto, 2014).

Esos ambientes de aprendizaje auténticos, con metodologías flexibles, abiertas a la colaboración y participación de los estudiantes a partir de sus propias inquietudes, recomiendan que la evaluación sea realizada entre iguales y unida a la del profesor (Bretones, 2008; Keppell, Au, Ma, y Chan, 2006). Por ello es conveniente el conocimiento por parte de los estudiantes para maestro de este tipo de evaluación.

Evaluación, Autoevaluación y Coevaluación

La evaluación entre iguales, entendida como autoevaluación y coevaluación, tiene un largo recorrido en diversos países y materias en la enseñanza universitaria y, en concreto, en la formación de maestros (Cáceres et al., 2010; Chamoso y Cáceres, 2009; Ibarra et al., 2012). Por otra parte, si bien es cierto que en la práctica de las aulas universitarias sigue siendo frecuente que el peso de la evaluación recaiga sobre el profesor, progresivamente se intenta conceder mayor protagonismo a los estudiantes, a la retroalimentación obtenida mediante procesos de evaluación formativa, entendida como información útil que permita una mejora de lo realizado o aprendido (Carless, Joughin y Mok, 2006) y al desarrollo de tareas auténticas mediante la utilización de estrategias de evaluación que favorezcan oportunidades de aprendizaje de los estudiantes (Keppell et al., 2006). La retroalimentación entre pares puede ser más influyente que la retroalimentación del docente y permite entender que la integración de la autoevaluación y coevaluación en el proceso de evaluación puede favorecer la participación, la motivación y la incentivación de los estudiantes (Chang, Tseng y Lou, 2012).

Por otra parte, la autoevaluación es particularmente beneficiosa para los estudiantes, ya que no solo los mantiene involucrados, interesados y motivados en el proceso, sino que, además, fomenta la autorreflexión, la responsabilidad y la valoración del propio trabajo con la toma de conciencia de fortalezas y debilidades, lo que ayuda a mejorar el conocimiento del contenido (Cáceres, Chamoso y Cárdenas, 2015; Chang et al., 2012; Miller, 2003; Sadler y Good, 2006). La coevaluación fomenta la autorreflexión, permite que los estudiantes vean los trabajos de otros, reciban ideas y sugerencias de compañeros, tomen conciencia de la calidad de su trabajo comparando con los de otros y adapten su trabajo de acuerdo con los comentarios que reciban de sus compañeros (Bouzidi y Jaillet, 2009; Chang et al., 2012; Chen, 2010).

Algunos investigadores han cuestionado la validez y la fiabilidad de la autoevaluación y coevaluación en el sentido de que sus resultados reflejen realmente los logros de aprendizaje (Chang et al., 2012, Ibarra et al., 2012). Así, por ejemplo, en el caso de la autoevaluación, parece que los estudiantes más débiles tienden a infravalorarse mientras que los estudiantes más fuertes tienden a sobrevalorarse (Lejik y Wyvill, 2001; Sadler y Good, 2006; Wilmot y Crawford, 2005). Investigaciones como la de Lin, Liu y Yuan (2001a, b) mostraron que la coevaluación tiene mejores niveles de validez y confiabilidad que la autoevaluación, aunque también puede estar afectada por factores como sobrevaloración por relaciones de amistad, liderazgo en el grupo y personas que se benefician del trabajo de otros (Ibarra et al., 2012).

Un instrumento que facilita labores evaluativas, como pueden ser la comprensión y el uso de los comentarios de retroalimentación y la autorregulación del aprendizaje de los estudiantes, son las rúbricas de evaluación (Cáceres y Chamoso, 2015; Jönsson y Panadero, 2017). Para realizar evaluación formativa se recomiendan rúbricas analíticas, que permiten una evaluación pormenorizada de los diversos aspectos clave del proceso (Nitko, 2001). En algunos trabajos se aprecia la posibilidad de que, en la valoración con rúbricas de evaluación, los docentes utilicen criterios estrictos de puntuación mientras que los estudiantes tengan criterios más laxos, de manera que la valoración de los estudiantes es más alta que la del docente y, en unos casos, la autoevaluación valora más alto que la coevaluación (Lin et al., 2001a, b), aunque, en otros, ocurre lo contrario (por ejemplo, Sadler y Good, 2006).

La investigación muestra gran variedad de matices en relación con los resultados de autoevaluación, coevaluación y la evaluación del docente. En algunos casos se muestra la consistencia entre las tres formas de evaluación (Sadler y Good, 2006; Sung, Chang, Chiou y Hou, 2005), pero en otros se obtiene consistencia entre autoevaluación y evaluación del docente (Bouzidi y Jaillet, 2009; Cho, Schunn y Wilson, 2006; Sadler y Good, 2006; Sung et al., 2005; Tsai y Liang, 2009; Tseng y Tsai, 2007), al contrario que en el trabajo de Knowles, Holton III y Swanson (2005). Respecto a la autoevaluación y coevaluación se han detectado inconsistencias entre coevaluación y evaluación del docente debidas a los diversos niveles de conocimiento de los estudiantes, la utilización de rúbricas de evaluación o la utilización de diferentes procedimientos de evaluación (Chang et al., 2012; Chen, 2010).

La mayor parte de estos trabajos se realizaron a partir de la valoración de portafolios de aprendizaje, en muchos casos electrónicos, pero son escasos los que analizan la influencia de una sesión formativa sobre el uso de rúbricas de evaluación, mediante un proceso de evaluación entre iguales, donde se compartan públicamente las valoraciones de las producciones de los alumnos que permita la reconsideración del propio trabajo durante la formación de docentes en el sentido de Ibarra et al. (2012). En este trabajo se avanza en ese sentido, en concreto, en un contexto de formación de maestros de Primaria que, en grupos, elaboran un Proyecto Estadístico. En un momento intermedio de su desarrollo, los estudiantes presentaron el Avance del Proyecto Estadístico que, a partir de una rúbrica de valoración, fue valorado por ellos mismos (*Autoevaluación*), sus compañeros (*Coevaluación*) y el profesor (*Evaluación*). El objetivo de este trabajo es analizar:

- las consistencias y discrepancias entre las valoraciones dadas a cada Avance del Proyecto Estadístico mediante la *Autoevaluación*, la *Coevaluación* y la *Evaluación*
- el tratamiento del Avance del Proyecto Estadístico de cada grupo a partir del propio trabajo y de las valoraciones realizadas al mismo.

METODOLOGÍA

Contexto y Muestra

La muestra quedó conformada por 46 grupos (17 grupos en el curso 2015-16, 12 en 2016-17 y 17 en 2017-18) de 3-5 estudiantes que cursaban la asignatura *Matemáticas y su Didáctica III* (6 ECTS), integrada en el plan de estudios del Grado en Maestro de Educación Primaria.

Los contenidos de la asignatura fueron los relacionados con la enseñanza de Estadística y Probabilidad en Primaria. Para mostrar un adecuado desarrollo de las competencias establecidas en el plan docente, los estudiantes, en grupos, debían ser capaces de identificar las etapas del desarrollo de un Proyecto Estadístico (PE) y realizar uno, así como diseñar y presentar una secuencia de aula relacionada con su PE de una forma similar a como lo harían en el desempeño de su futura labor profesional. Además, cada estudiante, de forma individual, debía realizar otras tareas complementarias a lo largo del curso enfocadas a facilitar tanto el desarrollo del PE como su implementación. Por otra parte, como herramienta de apoyo al proyecto se recurrió a la plataforma virtual *Studium* de la Universidad de Salamanca (más detalle, González y Chamoso, 2015).

La formación se desarrolló a lo largo de 15 semanas, en 4 horas semanales distribuidas en 2 sesiones de 2 horas de duración, organizadas en: sesiones formativas (una semanal), con todos los estudiantes matriculados, en las que se trabajaron tanto los contenidos de Estadística y Probabilidad para su enseñanza en Primaria como los relacionados con el desarrollo de un PE; y sesiones prácticas (una semanal), donde cada grupo de estudiantes avanzaba en su propio PE en dos aulas diferentes, en cada una de las cuales se encontraba la mitad de los estudiantes matriculados, con un profesor que atendía sus avances y dudas ya fuera de manera puntual o de forma más profunda.

La elaboración del PE por cada grupo de estudiantes consistía en seleccionar un objetivo de interés y, relacionado con él, buscar documentación sobre el mismo que permitiera formular preguntas que pudieran ser respondidas mediante la utilización de herramientas estadísticas, para lo que era necesario recoger y organizar datos, analizar los datos obtenidos e interpretar los resultados. Al final del curso, en las sesiones de clase usuales, cada grupo debía entregar y presentar su PE ante sus compañeros y profesores.

Para valorar los PE se utilizó una rúbrica analítica que los estudiantes conocían desde el comienzo del curso. Dicha rúbrica se creó a partir de la literatura especializada (Batanero y Díaz, 2011; Franklin et al. 2005; Garfield y Everson, 2009) y se validó previamente mediante su aplicación a los PE de 15 grupos de estudiantes diferentes de los considerados en este trabajo, a través de un análisis de concordancia o acuerdo intercodificadores con la participación independiente de dos profesores (Kappa de Cohen, 0,93; las discrepancias ayudaron a mejorar la redacción de algunos indicadores). En esencia, la rúbrica consideraba 5 aspectos directamente relacionados con la elaboración de un PE, cada uno de los cuales se valoraba de 1 a 4 en función de la calidad alcanzada: Planteamiento y justificación del problema y objetivos (*Problema*), Búsqueda de información (*Información*), Recogida y organización de datos (*Datos*), Análisis de datos (*Análisis*) e Interpretación de los datos (*Interpretación*) (Tabla 1):

Tabla 1. Rúbrica de valoración de los APE y MAPE

	4	3	2	1
Planteamiento y justificación del problema y objetivos (*Problema*)	El tema es pertinente, el problema se justifica adecuadamente y se formulan objetivos medibles estadísticamente	El tema es pertinente, el problema se justifica vagamente o se formulan objetivos que no son medibles estadísticamente	El tema es pertinente pero no se justifica adecuadamente su elección o se formulan objetivos para los que no es necesario aplicar la estadística	El tema no es pertinente y no se justifica su elección. No se formulan objetivos o se formulan objetivos ambiguos
Búsqueda de información (*Información*)	Se utilizan suficientes fuentes de información adecuadas al tema de estudio y se incluyen en la bibliografía	Se utilizan algunas fuentes de información adecuadas al tema de estudio y se incluyen en la bibliografía	Se utilizan algunas fuentes de información adecuadas al tema de estudio y no se incluyen en la bibliografía	No se muestran evidencias de haber utilizado fuentes de información.
Recogida y organización de datos (*Datos*)	Se indica cómo se recogen los datos, los instrumentos de recogida y la explicación clara de su organización	Se indica cómo se recogen los datos y los instrumentos de recogida, pero no cómo se organizan	Únicamente se indica cómo se han recogido los datos	No se indica el proceso de recolección de datos
Análisis de Datos (*Análisis*)	Las medidas utilizadas, las gráficas o tablas son las adecuadas para los objetivos planteados y se elaboran correctamente	Las medidas utilizadas, las gráficas y las tablas son las adecuadas, pero se cometen errores en su elaboración	Las medidas, las tablas o las gráficas no son adecuadas	No se precisan las medidas o las tablas y gráficas no tienen sentido para los objetivos planteados

	4	3	2	1
Interpretación de los datos (*Interpretación*)	La interpretación es correcta y completa para los objetivos planteados. Se realizan inferencias a partir de los datos	La interpretación es correcta y adecuada para los objetivos planteados, pero no se realizan inferencias a partir de los datos	La interpretación o es correcta o no es adecuada para los objetivos planteados y no se realizan inferencias a partir de los datos	La interpretación no guarda relación con los objetivos planteados

Para facilitar el desarrollo del PE, en la quinta semana de curso y en las condiciones acordadas al inicio del mismo, cada grupo de estudiantes debía entregar los Avances de su Proyecto Estadístico (APE), los cuales debía presentar públicamente ante sus compañeros y los profesores para que aportaran sugerencias o recomendaciones de mejora en cada caso. Los APE de cada grupo fueron valorados por el profesor (*Evaluación*) y en una sesión posterior se realizó una intervención educativa para facilitar la reflexión de cada grupo de estudiantes sobre su propio APE que permitiera avanzar en su desarrollo. Para ello, cada grupo participó de la siguiente forma:

a) Familiarización con la rúbrica de valoración:
   1. El grupo aplicó la rúbrica a su propio APE (20 minutos; *Autoevaluación*; entrega por escrito en Studium).
   2. El grupo aplicó la rúbrica a 3 APE desarrollados por compañeros de cursos previos (20 minutos). Los resultados se comentaron en el aula con el objetivo de que sugirieran posibilidades para que cada grupo pudiera mejorar su propio APE (20 minutos).

b) Aplicación de la rúbrica:
   3. El grupo aplicó la rúbrica a 5 APE desarrollados por sus compañeros (20 minutos; *Coevaluación*; entrega por escrito en Studium).
   4. El grupo validó o modificó justificadamente la valoración de su propio APE, incluyendo la calificación (20 minutos; entrega por escrito en Studium).

Posteriormente, como parte de su trabajo de la asignatura, cada grupo de estudiantes reconsideró su propio APE e introdujo las mejoras que consideró oportunas, entregándolo de nuevo (Mejora de los Avances del Proyecto Estadístico, MAPE).

Los APE y MAPE de los estudiantes no consideraron todos los aspectos establecidos en la elaboración de los PE, por lo que se valoraron únicamente los tres primeros de la rúbrica (*Problema*, *Información* y *Datos*).

La influencia de esta intervención educativa en la evolución del trabajo de los estudiantes para maestro se estudió en dos sentidos. En primer lugar, se analizaron la consistencia y discrepancias entre las tres formas de valoración en los APE de cada grupo (*Autoevaluación*, *Coevaluación* y *Evaluación*) y, en segundo lugar, se analizó el progreso en cada MAPE respecto a su correspondiente APE. En este trabajo entendemos que dos formas de valoración son consistentes cuando cada resultado numérico asignado a partir de la rúbrica de valoración (en adelante valoración) mediante una forma de valoración se mantiene con otra y entendemos las discrepancias entre las formas de valoración como las diferencias entre valoraciones de un mismo trabajo (Chang et al., 2012).

Los datos fueron las valoraciones obtenidas por los distintos grupos en sus APE mediante *Autoevaluación* (valoración asignada por cada grupo a su propio APE), *Coevaluación* (media aritmética de las valoraciones asignadas por los grupos que valoraron el mismo APE) y *Evaluación* (valoración asignada por el profesor a cada APE) y las valoraciones obtenidas por cada grupo en MAPE mediante *Evaluación.*

Se realizaron estudios estadísticos con pruebas no paramétricas de correlaciones y comparación de valoraciones y descriptivos de las diferencias entre valoraciones. En concreto, en primer lugar, se estudió la consistencia entre las tres formas de valoración a partir de las correlaciones dos a dos de las valoraciones obtenidas en los APE en *Autoevaluación*, *Coevaluación* y *Evaluación* mediante el coeficiente de Spearman (puesto que la muestra no sigue las condiciones de normalidad); además, se realizó el estudio de las discrepancias entre las tres formas de valoración mediante la comparación dos a dos de las valoraciones obtenidas por los grupos en *Autoevaluación*, *Coevaluación* y *Evaluación* con la prueba de rangos con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas (prueba no paramétrica equiparable a la prueba t para muestras dependientes), tanto de forma Global (media aritmética de los aspectos considerados) como para cada aspecto *Problema*, *Información* y *Datos*, y se estudiaron las diferencias entre las valoraciones otorgadas a los APE con cada forma de valoración. En segundo lugar, para analizar la consistencia de las valoraciones obtenidas por cada grupo mediante la *Evaluación* en los MAPE y APE, tanto globalmente como para cada aspecto considerado en la rúbrica de valoración, se aplicó la prueba de rangos con signo de Wilcoxon y el estudio descriptivo de las diferencias de valoración de cada MAPE respecto a su correspondiente APE.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los objetivos presentados. En primer lugar, se muestran las consistencias y discrepancias dos a dos entre las valoraciones obtenidas por los grupos a partir de la rúbrica de valoración mediante *Autoevaluación*, *Coevaluación* y *Evaluación* y, en segundo lugar, se considera el tratamiento que cada grupo realizó en su MAPE fruto de la reflexión y de las valoraciones realizadas en su respectivo APE.

Consistencias y discrepancias entre valoraciones según la forma de valoración

Comparación de resultados en Autoevaluación y Coevaluación

La correlación entre la valoración Global obtenida por los grupos en *Autoevaluación* y *Coevaluación* en sus APE es positiva y significativa (coeficiente de correlación de Spearman), al igual que entre las valoraciones de *Problema* e *Información*, lo que sugiere un alto grado de consistencia entre las valoraciones en APE mediante *Autoevaluación* y *Coevaluación*; no se dieron diferencias significativas para la prueba de Wilcoxon en los resultados obtenidos en la mayoría de aspectos, lo que indica un bajo grado de discrepancias (Tabla 2). Esto hace pensar que los estudiantes entendieron de la misma forma los diversos indicadores de la rúbrica.

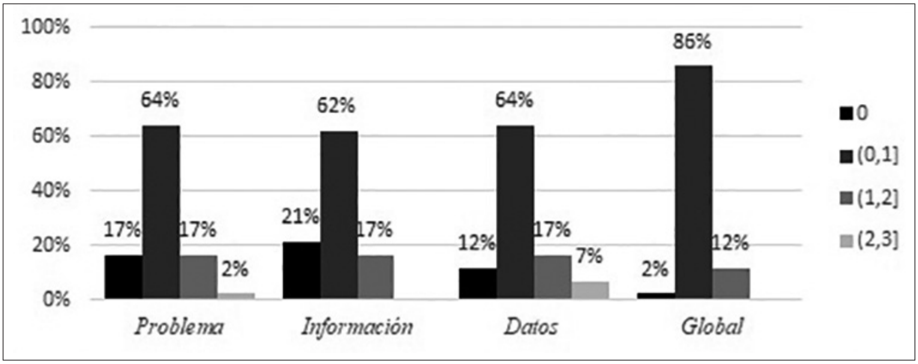
Tabla 2. Correlación de Spearman y prueba de Wilcoxon para *Autoevaluación* y *Coevaluación*

	Coeficiente de Correlación (sig.)	*p de Wilcoxon*
Problema	0,373 (0,015*)	0,041*
Información	0,554 (0,000**)	0,176
Datos	0,282 (0,071)	0,668
Global	0,408 (0,007*)	0,472

*p<0,05 **p<0,01

En la valoración Global, el 64% de los grupos obtuvo, en *Autoevaluación*, valoraciones superiores o iguales que en *Coevaluación* y, en cada aspecto, las valoraciones en *Autoevaluación* fueron superiores o iguales que en *Coevaluación* para el 79% de los grupos en *Problema* y el 69% en *Información*; sin embargo, para el 55% de los grupos fueron inferiores en *Datos.* La Figura 1 muestra que en este aspecto es donde se dio el menor porcentaje de coincidencias entre valoraciones (12%) y el mayor porcentaje entre diferencias superiores a 2 puntos (12%). Parece que los estudiantes tuvieron dificultades para valorar sus propios trabajos y consideraron más su esfuerzo que lo que realmente supieron transmitir en el documento escrito, de forma que premiaron o penalizaron aspectos que sus compañeros no fueron capaces de detectar.

Figura 1. Porcentajes de diferencias, en valor absoluto, para *Autoevaluación* y *Coevaluación*



Comparación de resultados en Autoevaluación y Evaluación

La correlación entre la valoración Global obtenida por los grupos en *Autoevaluación* y *Evaluación*, en cada respectivo APE, es positiva y significativa (coeficiente de correlación de Spearman), lo que sugiere un alto grado de consistencia global, aunque, atendiendo a cada aspecto, la correlación solo fue significativa en *Datos*; además, entre las valoraciones en APE mediante *Autoevaluación* y *Evaluación* se dieron diferencias significativas para la prueba de Wilcoxon tanto en la valoración Global como para cada aspecto, lo que refleja grandes discrepancias entre las valoraciones asignadas por cada grupo a su propio APE y las del profesor (Tabla 3). Esto hace pensar que el grado de consistencia global es engañoso debido, quizás, a que la media de valoraciones obtenidas en los diversos aspectos compensa desigualdades en las valoraciones a nivel individual de cada uno de ellos, y a que los estudiantes no entendían la rúbrica de la misma forma que el profesor.

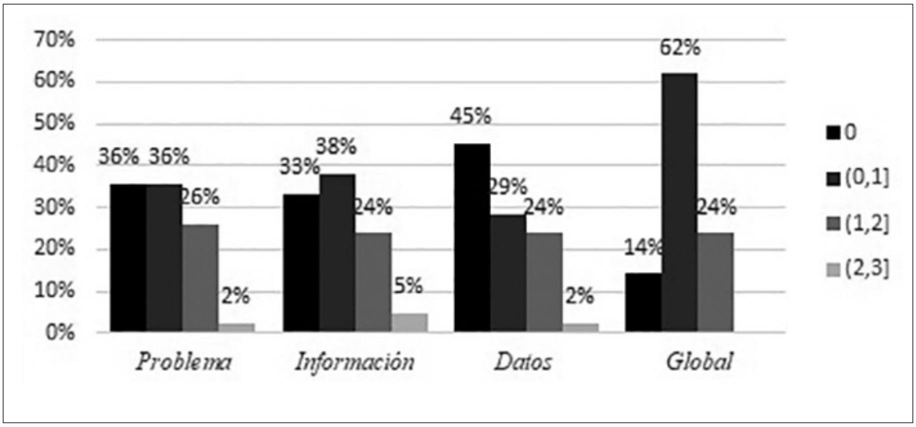
Tabla 3. Correlación de Spearman y prueba de Wilcoxon para *Evaluación* y *Autoevaluación*

	Coeficiente de Correlación (sig.)	*p de Wilcoxon*
Problema	0,254 (0,104)	0,000**
Información	0,277 (0,076)	0,000**
Datos	0,353 (0,022*)	0,008**
Global	0,408 (0,007**)	0,000**

*p<0,05 **p<0,01

En la valoración Global, el 95% de los grupos obtuvo, en *Autoevaluación*, valoraciones superiores o iguales que en *Evaluación* y, en cada aspecto, las valoraciones en *Autoevaluación* fueron superiores o iguales que en *Evaluación* para el 93% de los grupos en *Problema*, el 95% en *Información* y el 88% en *Datos*. En La Figura 2 llama la atención el elevado porcentaje de coincidencias en los tres aspectos, pero también el alto porcentaje de grupos que obtuvo valoraciones en su APE con diferencias entre 1 y 3 puntos, lo que lleva a grandes discrepancias entre las valoraciones. De nuevo, parece que los estudiantes valoraron aspectos, quizás trabajados, pero que no habían sabido plasmar en los documentos valorados.

Figura 2. Porcentajes de diferencias, en valor absoluto, para *Autoevaluación* y *Evaluación*



Comparación de resultados en Coevaluación y Evaluación

La correlación entre la valoración Global obtenida por los grupos en *Coevaluación* y *Evaluación* en sus APE es positiva y significativa (coeficiente de correlación de Spearman) al igual que en *Información* y *Datos*, lo que sugiere un alto grado de consistencia entre las valoraciones en APE mediante *Coevaluación* y *Evaluación*; las diferencias significativas para la prueba de Wilcoxon tanto en la valoración Global como en cada aspecto refleja grandes discrepancias entre las valoraciones asignadas por los estudiantes al APE de sus compañeros y las del profesor (Tabla 4). En este caso, la consistencia en las valoraciones lleva a pensar que distinguieron los niveles establecidos en la rúbrica de evaluación, pero que los valoraron más alto que el profesor, lo que lleva a dichas discrepancias.

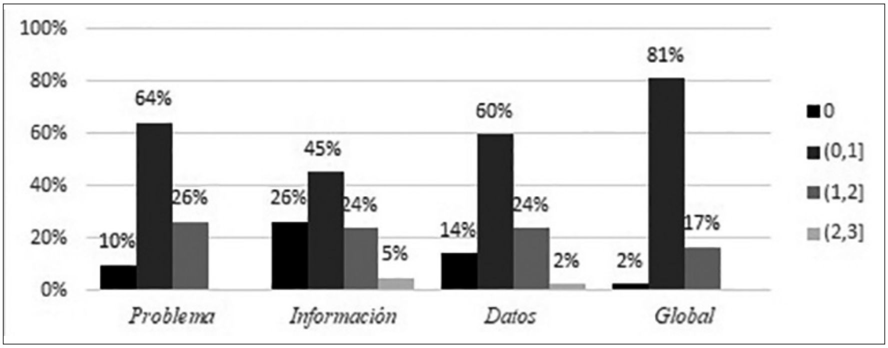
Tabla 4. Correlación de Spearman y prueba de Wilcoxon para *Evaluación* y *Coevaluación*

	Coeficiente de Correlación (sig.)	*p de Wilcoxon*
Problema	0,144 (0,362)	0,002**
Información	0,402 (0,008**)	0,000**
Datos	0,384 (0,022*)	0,000**
Global	0,510 (0,001**)	0,000**

*p<0,05 **p<0,01

De hecho, en la valoración Global, el 93% de los grupos obtuvo, en *Coevaluación*, valoraciones superiores o iguales que en *Evaluación* y, en cada aspecto, las valoraciones en *Coevaluación* fueron superiores o iguales que en *Evaluación* para el 76% de los grupos en *Problema*, el 93% en *Información* y el 81% en *Datos*. La Figura 3 muestra el alto porcentaje de grupos que obtuvo valoraciones en su APE con diferencias entre 1 y 3 puntos para *Coevaluación* y *Evaluación.*

Figura 3. Porcentajes de diferencias, en valor absoluto, para *Coevaluación* y *Evaluación*



En resumen, los resultados fueron consistentes entre las tres formas de valoración, aunque en menor medida entre *Autoevaluación* y *Evaluación*, lo que quiere decir que, aunque no coincidan en valor, generalmente los grupos que obtuvieron las valoraciones más altas o más bajas en una forma de valoración fueron, respectivamente, los mismos que lo hicieron en las otras dos. Las principales discrepancias se dieron entre las valoraciones realizadas por los estudiantes y las realizadas por el profesor, especialmente en *Coevaluación*, donde las coincidencias con las valoraciones del profesor fueron siempre inferiores al 15%, salvo en *Información* donde fueron el 26%.

Tratamiento en MAPE de las valoraciones realizadas en APE

La correlación entre la valoración Global obtenida por los grupos mediante *Evaluación* en APE y MAPE es positiva y significativa (coeficiente de correlación de Spearman), al igual que en *Problema* e *Información,* lo que sugiere un alto grado de consistencia entre las valoraciones obtenidas por cada grupo en APE y MAPE mediante *Evaluación*. Esto parece indicar que los grupos, a partir del proceso de evaluación formativa desarrollado con sus APE, modificaron sustancialmente todos los aspectos, manteniéndose que las mayores y menores valoraciones en MAPE tendieron a ser, respectivamente, las mismas que en APE. Las diferencias significativas para la prueba de Wilcoxon, tanto en la valoración Global como en cada aspecto, refleja grandes discrepancias entre las valoraciones obtenidas por un mismo grupo en *Evaluación* en APE y MAPE (Tabla 5), lo que indica grandes cambios en todos los apartados.

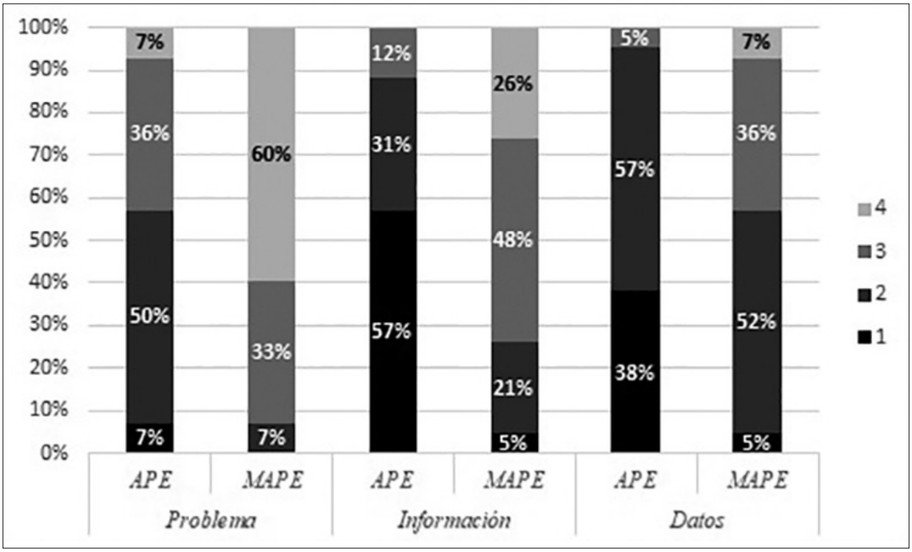
Tabla 5. Correlación de Spearman y prueba de Wilcoxon
para *Evaluación* de APE y MAPE

	Coeficiente de Correlación (sig.)	*p de Wilcoxon*
Problema	0,369 (0,016*)	0,000**
Información	0,387 (0,011*)	0,000**
Datos	0,219 (0,164)	0,000**
Global	0,411 (0,007**)	0,000**

*p<0,05 **p<0,01

De hecho, la media de las valoraciones Globales de todos los grupos aumentó en MAPE respecto a APE (pasó de 1,98 a 3,10) y lo mismo ocurrió en cada aspecto (la media de las valoraciones de todos los grupos pasó de 2,43 a 3,52 en *Problema*; de 1,67 a 2,95 en *Información* y de 1,98 a 3,10 en *Datos*).

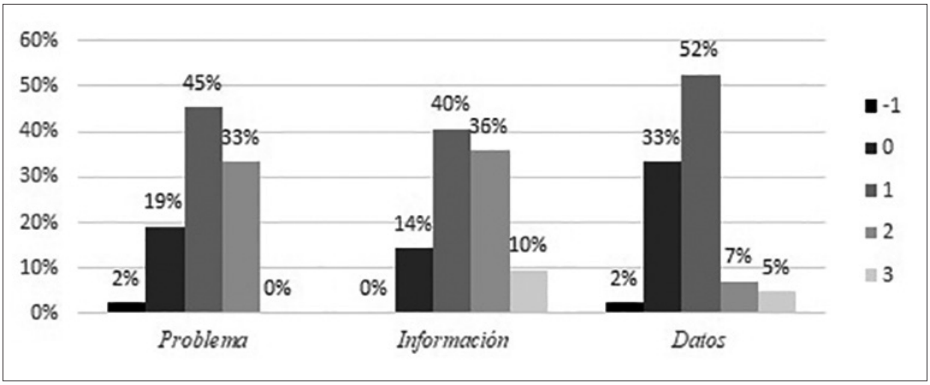
Figura 4. Porcentajes de grupos valorados con 1, 2, 3 y 4 para cada uno de los aspectos *Problema*, *Información* y *Datos* en APE y MAPE



Más concretamente, todos los grupos, salvo dos, mejoraron su valoración Global en el MAPE entre 0,5 y 2,25 puntos respecto a la de sus correspondientes APE. Pero estos cambios no fueron iguales en los tres aspectos considerados. Por ejemplo, el porcentaje de grupos que obtuvo valoraciones mayores que 2 pasó del 43% en APE al 93% en MAPE en *Problema* (es de resaltar que el 60% de los grupos obtuviera una valoración de 4 en MAPE en este aspecto); el porcentaje varió del 12% en APE (ninguno de ellos valorado con 4) al 74% (donde el 26% de los grupos fue valorado con 4) en *Información*, aspecto donde los grupos obtuvieron las valoraciones más bajas en APE; y pasó de 5% en APE al 43% en MAPE (donde el 7% de los grupos fue valorado con 4) en *Datos* (Figura 4).

Profundizando en las diferencias de valoración en cada aspecto, para cada grupo, en todos los casos la diferencia más habitual fue de un punto, si bien en *Datos* las valoraciones variaron de forma diferente a *Problema* e *Información*. La mayoría de los grupos mejoró su valoración en MAPE respecto a APE (78% de los grupos en *Problema*, 86% en *Información* y 64% en *Datos*); además, en todos los aspectos, la mayoría de los grupos mejoró su valoración 1 ó 2 puntos (aunque cabe destacar que algunos grupos consiguieron mejorar su valoración 3 puntos, el 10% de los grupos en *Información* y el 5% en *Datos*); por el contrario, algunos empeoraron su valoración 1 punto (1 grupo en *Problema* y 1 grupo en *Datos*). No hay que olvidar que el comportamiento de *Datos* siempre fue algo diferente en la comparación de valoraciones, lo que parece indicar que este aspecto supuso mayores dificultades que el resto a un buen número de grupos. Eso puede ser debido a que en ambas entregas fue el aspecto menos trabajado (algunos grupos aún se encontraban diseñando el instrumento de recogida de datos).

Figura 5. Porcentajes de diferencias -1, 0, 1, 2 o 3 en los aspectos *Problema*, *Información* y *Datos* entre las valoraciones de MAPE y APE



Como ejemplo, el grupo que empeoró su valoración en *Problema* y pasó de 4 en APE a 3 en MAPE fue debido a que, en APE, el objetivo del trabajo, «[…] recientes informes publicados afirman que los niños que asisten a colegios bilingües obtienen peores resultados que los matriculados en colegios no bilingües. Queríamos informarnos y comprobar si esos resultados son ciertos y por qué […]», permitía una justificación basada en las afirmaciones de dichos informes. Sin embargo, en MAPE, el objetivo se convirtió en «[…] valorar las percepciones de una muestra aleatoria de cien ciudadanos de Salamanca sobre la educación bilingüe; atenderemos a su edad, nivel educativo y la fuente de información sobre los colegios bilingües de los encuestados […]», más amplio y dónde no se justificaba la necesidad de conocer las percepciones de la población sobre la educación bilingüe.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó la influencia de una intervención educativa basada en el uso de rúbricas de evaluación, en un contexto de evaluación para el aprendizaje como futuros docentes, durante el desarrollo de un Proyecto Estadístico (PE), donde, en un primer momento, los estudiantes, en grupos, se familiarizaron con la rúbrica de evaluación y, posteriormente, la aplicaron al propio Avance del Proyecto Estadístico (APE) y a los de sus compañeros. Estudios desarrollados con la evaluación por pares en las aulas universitarias ponen de manifiesto la necesidad de formar a los estudiantes en el manejo de rúbricas de evaluación (Ibarra et al., 2012). Esto puede ser más acusado en el caso de la formación de docentes, ya que es un aspecto crucial en su futura profesión.

Los resultados mostraron que el proceso de reflexión desarrollado a partir de la evaluación formativa desarrollada entre iguales y por el profesor fue importante y la reconsideración de fortalezas y debilidades del trabajo realizado tuvo efectos inmediatos dado que las valoraciones de los tres aspectos valorados mejoraron considerablemente en la Mejora del Avance del Proyecto Estadístico (MAPE) respecto a las obtenidas en APE; en concreto, el 78% de los grupos mejoraron sus valoraciones en *Problema*, el 86% en *Información* y el 64% en *Datos*.

El estudio de la consistencia y discrepancias entre las tres formas de valoración, *Autoevaluación*, *Coevaluación* y *Evaluación*, mediante la comparación de la valoración de los APE de cada grupo con la de los compañeros y con la del profesor, mostró que, aunque las tres formas de valoración parecieron consistentes, las valoraciones de los estudiantes, tanto en *Autoevaluación* como en *Coevaluación*, fueron diferentes que la *Evaluación* del profesor; en casi todos los casos los estudiantes fueron más generosos, sobre todo en *Autoevaluación*. Esto podría deberse a la sobrevaloración de estudiantes muy seguros de sí mismos (Lejik y Wyvill, 2001; Sadler y Good, 2006; Wilmot y Crawford, 2005), a la dificultad para manejar la rúbrica de valoración para valorar aspectos en que no se consideran preparados o por estar valorando a colegas (Chang et al., 2012).

Al igual que en los trabajos de Lin et al. (2001a, b) los resultados en *Autoevaluación* superaron en muchos casos a los de *Coevaluación,* donde hubo muy pocas coincidencias; también fueron superiores a los de *Evaluación*, donde las coincidencias superaron en todos los casos el 33%. Si aceptamos que la valoración del profesor fue correcta, esto podría significar una buena comprensión de la rúbrica de valoración por parte de, al menos, la tercera parte de los grupos. Sin embargo, alrededor de un 25% valoraron sus trabajos por encima del profesor con una diferencia de más de 2 puntos sobre 4, que podría indicar laxitud en la aplicación de criterios por parte de los estudiantes, o una gran dificultad o desinterés en la valoración del propio trabajo (Lin et al., 2001a, b; Sadler y Good, 2006). La *Coevaluación* tiene pocas coincidencias con la *Evaluación* y, al igual que en el caso anterior, alrededor de un 25% valoraron sus trabajos por encima del profesor con una diferencia de más de 2 puntos; las razones podrían ser las mismas que para la *Autoevaluación*, pero quizás también puede influir el grado de amistad de las personas del grupo valorado u otros factores personales (Ibarra et al., 2012).

Por otro lado, respecto al tratamiento de cada grupo en su MAPE, fruto de la reflexión y propuestas de mejora formuladas a partir de las valoraciones obtenidas en los APE, los estudiantes, desde el principio se sintieron muy motivados con la realización del PE y se esforzaron en plantear un tema de investigación que les resultara interesante, que justificaron adecuadamente y para el que plantearon objetivos medibles estadísticamente como muestran los resultados obtenidos en APE. También mostraron interés en la recolección y organización de datos, donde el hecho de participar en la búsqueda o elaboración de encuestas, las dificultades para obtener respuestas en el plazo establecido o qué hacer después con los datos obtenidos provocó una alta concienciación del proceso involucrado en la investigación estadística (Batanero y Díaz, 2011; Burrill y Camden, 2006; Dierker et al., 2016; Franklin, et al. 2005).

De los tres aspectos valorados, el que obtuvo las calificaciones más bajas en APE fue la búsqueda de informacion *(Información)*. Parece que ese aspecto, a pesar de que los estudiantes realizan múltiples trabajos en ese sentido en las asignaturas del Grado, no se consideró importante por los estudiantes ya que, sin ninguna formación en este sentido, fue el aspecto donde se produjo el mayor aumento en las valoraciones obtenidas en MAPE, tanto en la calidad de las fuentes consultadas como en su correcta incorporación en el aspecto de bibliografía. Por tanto, parece conveniente solicitar a los estudiantes para maestro, desde el inicio del Grado y en todas las materias, la realización de búsquedas bibliográficas de calidad, así como la correcta citación de la bibliografía.

En este trabajo se muestra cómo el proceso de evaluación formativa desarrollada entre iguales y por el profesor, diseñado e implementado para la elaboración de un PE, favoreció la reflexión, revisión y mejora del trabajo realizado (Bouzidi y Jaillet, 2009; Chang et al., 2012; Chen, 2010; Miller, 2003; Sadler y Good, 2006). Los diversos aspectos en los que los estudiantes para maestro dieron sentido a la evaluación formativa para su aprendizaje como futuros docentes requeriría más investigación. Sería conveniente buscar más formas de actuación, en las diversas materias relacionadas con la formación didáctico-matemática que cursan los estudiantes para maestro como puede ser la creación de tareas (Cáceres et al., 2015), que favorezcan procesos de reflexión y revisión del propio trabajo, a partir de algún tipo de intervención educativa en la línea de Cáceres et al. (2010).

Los APE y MAPE son avances del Proyecto Estadístico lo que supone, en muchos casos, más una declaración de intenciones que un trabajo terminado. Por ello se considera que, para una mejor toma de decisiones en la elaboración del trabajo final, la rúbrica de valoración debería reestructurarse y organizar diferentes ítems en los tres aspectos considerados. Por ejemplo, se podría separar la justificación de la importancia del problema de estudio de la formulación de objetivos, o la selección de fuentes de documentación de su inclusión en la bibliografía, lo que permitiría profundizar en estudios futuros en las causas concretas que permiten o no la mejora en cada uno de los resultados. Consensuar con los estudiantes para maestro la mejora de la rúbrica de evaluación antes de realizar la sesión permitiría una mejor comprensión de la misma.

Los grupos de estudiantes, durante la intervención educativa, apuntaron propuestas de mejora para su trabajo que el profesor no recogió, lo que no permitió estudiar su consideración en MAPE. Esas intervenciones podrían haber sido objeto de futura investigación en este trabajo u otros con objetivos similares. También sería interesante comprobar el conocimiento profesional para enseñar estadística adquirido con la realización de este trabajo, así como el comportamiento de los grupos en los aspectos de PE que no se trabajaron en esta sesión, así como la secuencia de aula relacionada con su PE.

Esta misma forma de trabajo podría aplicarse a proyectos vinculados a otros conocimientos para la formación de docentes, si bien, requeriría una adaptación de dicha forma de trabajo, así como de los aspectos que deben considerarse en la rúbrica de valoración, que variaría en función de las peculiaridades del contexto formativo, de los profesores o los propios contenidos matemáticos trabajados.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado al amparo de RED8-Educación matemática y formación de profesores (EDU2016-81994-REDT), Proyecto de la Universidad de Salamanca (2017/00111/001), Proyecto Erasmus+ Unión Europea (2017-1-ES01-KA203-038491), Proyecto Ministerio de Economía y Competitividad España (PSI2015-66802-P)

REFERENCIAS

Ball, L.D., Thames, H.M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.), (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/batanero/publicaciones%20index.htm.

Boud, D., Cohen, R. y Sampson, J. (1999). Peer learning and assessment. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 24*(4), 413-426.

Bouzidi, L. y Jaillet, A. (2009). Can online peer assessment be trusted? *Educational Technology & Society, 12*(4), 257-268.

Bretones, A. (2008). Participación del alumnado de Educación Superior en su evaluación. *Revista de Educación, 347*, 181-202.

Browning, C., Goss, J. y Smith, D. (2014). Statistical knowledge for teaching: Elementary preservice teachers. In *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9)*. Recuperado de: https://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_2F2_BROWNING.pdf.

Burrill, G. y Camden (Eds.) (2006). *Curricular development in statistics education: IASE 2004 Roundtable*. Voorburg: International Association for Statistical Education. Recuperado de: https://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_2F2_BROWNING.pdf.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education, 26,* 1186-1195.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Cárdenas, J.A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201- 210). Alicante: SEIEM.

Cáceres, M.J. y Chamoso, J.M. (2015). La Evaluación Sobre la Resolución de Problemas de Matemática. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 225-241). Cáceres: Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones.

Carless, D., Joughin, G. y Mok, M.M.C. (2006). Learning-oriented assessment: principles and practice. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 31*(4), 395-398.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25,* 198-206.

Chang, C.C., Tseng, K.H. y Lou, S. J. (2012). A comparative analysis of the consistency and difference among teacher-assessment, student self-assessment and peer-assessment in a Web-based portfolio assessment environment for high school students. *Computers & Education*, *58*(1), 303-320.

Chen, C. (2010). The implementation and evaluation of a mobile self- and peer-assessment system. *Computers & Education, 55*(1), 229-236.

Cho, K., Schunn, C. y Wilson, R. (2006). Validity and reliability of scaffolded peer assessment of writing from instructor and student perspectives. *Journal of Educational Psychology, 98*(4), 891-901.

Da Silva, M., Porciúncula, M. y Pinto, S. S. (2014). Teaching Statistics through Learning Projects. *Statistics Education Research Journal*, *13*(2), 177-186.

Dierker, L., Alexander, J., Cooper, J.L., Selya, A., Rose, J. y Dasgupta, N. (2016). Engaging Diverse Students in Statistical Inquiry: A Comparison of Learning Experiences and Outcomes of Under-Represented and Non- Underrepresented Students Enrolled in a Multidisciplinary Project-Based Statistics Course. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, *10*(1), Article 2. Recuperado de: https://digitalcommons.georgiasouthern.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.es/&httpsredir=1&article=1611&context=ij-sotl.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de: www.amstat.org/Education/gaise/.

Garfield, J. y Everson, M. (2009). Preparing Teachers of Statistics: A Graduate Course for Future Teachers. *Journal of Statistics Education, 17*(2). Recuperado de: www.amstat.org/publications/jse/v17n2/garfield.html.

González, M.T. y Chamoso. J.M. (2015). Enseñanza por proyectos: Una propuesta para la formación de maestros en la educación estadística. *Actas del Congreso La enseñanza de las Matemáticas. Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas Academia de Artillería de Segovia*. (pp. 71-87). Junta de Castilla y León y Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Ibarra, M.S., Rodríguez, G. y Gómez, M.A. (2012). La evaluación entre iguales: beneficios y estrategias para su práctica en la universidad, *Revista de Educación, 359*, 206-231.

Jönsson, A. y Panadero, E. (2017). The use and design of rubrics to support assessment for learning. In D. Carless, S. M. Bridges, C. K.Y. Chan, R. Glofcheski (Eds.), *Scaling up Assessment for Learning in Higher Education* (pp. 99-111). Singapore: Springer.

Keppell, M., Au, E., Ma, A. y Chan, C. (2006). Peer learning and learning-oriented assessment in technology-enhanced enviroments. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 31*(4), 453-464.

Knowles, M.S., Holton III, E.F. y Swanson, R.A. (2005). *The adult learner* (6th Ed.). Burlington: Elsevier.

Lejik, M. y Wyvill, M. (2001). The effect of the inclusion of self-assessment with peer assessment of contributions to a group project: A quantitative study of secret and agreed assessments. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 26*(6), 551-561.

Lin, S.S.J., Liu, E.Z.F. y Yuan, S.M. (2001a). Web-based peer assessment: attitude and achievement. *IEEE Transactions on Education, 44*(2), 13 pp.

Lin, S.S.J., Liu, E.Z.F. y Yuan, S.M. (2001b). Web-based peer assessment: Feedback for students with various thinking-styles. *Journal of Computer Assisted Learning, 17*(4), 420-432.

Miedijensky, S. y Tal, T. (2016). Reflection and assessment for learning in science enrichment courses for the gifted. *Studies in Educational Evaluation*, *50*, 1-13.

Miller, P. J. (2003). The effect of scoring criteria specificity on peer and self-assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 28*(4), 383-394.

Nitko, A. J. (2001). *Educational assessment of students*. Upper Saddle River, NJ: Merrill.

Sadler, P. y Good, E. (2006). The impact of self- and peer-grading on student learning. *Educational Assessment, 11*(1), 1-31.

Sung, Y.T., Chang, K.E., Chiou, S.K. y Hou, H.T. (2005). The design and application of a web-based self and peer-assessment system. *Computers & Education, 45*, 187-202.

Tsai, C.C. y Liang, J.C. (2009). The development of science activities via on-line peer assessment: the role of scientific epistemological views. *Instructional Science, 37*, 293-310.

Tseng, S.C. y Tsai, C.C. (2007). On-line peer assessment and the role of the peer feedback: a study of high school computer course. *Computers & Education, 49*(4), 1161-1174.

Watson, J.M. (2002). Doing research in statistics education: More than just data. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing a Statistically Literate Society*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado de: https://iase-web.org/documents/papers/icots6/03_wa.pdf.

Williams, S. (2017). Investigating the allocation and corroboration of individual grades for project-based learning. *Studies in Educational Evaluation*, *53*, 1-9.

Wilmot, P. y Crawford, A. (2005). *Validating the assessment of individuals within undergraduate teams.* International conference on engineering education. Gliwice, Poland. Recuperado de: https://webpa.lboro.ac.uk/tutors/support/why_use/icee2005_pa_paper.pdf.

ACTIVIDADES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DERIVADAS DEL USO DE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ACTIVITIES FOR TEACHER INSTRUCTION DERIVED FROM THE USE OF GEOGEBRA DURING PROBLEM SOLVING

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J. y Hernández, A.
Universidad de La Laguna

RESUMEN

La formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria necesita introducir elementos que ofrezcan a los futuros profesores oportunidades para conocer, experimentar y reflexionar sobre cuál debe ser el papel de las tecnologías digitales en escenarios de resolución de problemas. El objetivo de este trabajo consiste en identificar eventos que emergen del uso de la tecnología cuando se resuelven problemas, con el fin de convertirlos en situaciones o actividades que promuevan el análisis, por parte del futuro profesor, de diversas ideas matemáticas que se relacionan con los conceptos matemáticos que aparecen involucrados. Se presenta un estudio de caso, el de una pareja de estudiantes del Grado en Matemáticas y se identifican tres situaciones que surgen al analizar las discusiones de los estudiantes durante el proceso de resolución de un problema con el Sistema de Geometría Dinámica GeoGebra.

Palabras clave: *Resolución de problemas, tecnologías digitales, GeoGebra, formación de profesores de Educación Secundaria*.

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J. y Hernández, A. (2019). Actividades para la formación de profesores derivadas del uso de GeoGebra en la resolución de problemas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 373-396). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

Mathematics teaching and learning processes in today's society, requires the introduction of new elements in teacher training, which offer future teachers opportunities to learn, experiment and reflect on what should be the role of digital technologies in those scenarios. The objective of this work is to identify events that emerge from the use of technology in solving mathematical problems in order to convert them into tasks for secondary school mathematics teachers training. We present the analysis of a case, that of a couple of students of the Degree in Mathematics, solving a problem with GeoGebra. Three situations were identified, by analyzing the students' discussions during the resolution process, in which the episodes of comprehension, exploration and search of multiple approaches to the situation were distinguished.

Keywords: *problem solving, technology, GeoGebra, secondary teachers' training*.

INTRODUCCIÓN

La incorporación de la tecnología en la Educación Secundaria ha provocado, en la última década, movimientos de innovación docente e investigaciones en didáctica de la matemática, referidos a cómo la tecnología produce cambios en la forma de enseñar, e incluso en qué enseñar. Algunas de esas investigaciones han mostrado, por ejemplo, que el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra, en la resolución de problemas matemáticos, permite a los resolutores representar y explorar una situación desde diversas aproximaciones, establecer relaciones entre diferentes conceptos, profundizar en los significados y razonamientos, formular conjeturas y argumentos, contribuyendo así al enriquecimiento de las discusiones matemáticas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009).

La aparición de esta riqueza matemática depende en gran medida de la forma en que la actividad se presente. Camacho-Machín, Afonso y Moreno (2014), a partir de la comparación del proceso de resolución de problemas con lápiz y papel y GeoGebra, diseñaron una *guía de implementación* que explicitaba diferentes aproximaciones para facilitar la resolución del problema, en la que se aprovechasen las potencialidades del uso del SGD. Si las actividades, además, se realizan en parejas o grupos, se genera un espacio que permite identificar elementos de la comprensión matemática de los estudiantes como su competencia conceptual o estratégica, la flexibilidad de sus razonamientos, las conexiones, conjeturas o justificaciones que realizan (Hernández, Perdomo-Díaz y Camacho-Machín, 2017). Los resultados de estas y otras investigaciones han promovido que la tecnología comience a considerarse como uno de los elementos centrales en la formación docente.

Este capítulo recoge parte de una investigación con estudiantes de la asignatura *Matemáticas para la Enseñanza*, optativa de 4º del Grado en Matemáticas, en la que se muestra un primer acercamiento a la profesión docente y donde la tecnología tiene un papel central. Entre los objetivos de la asignatura figuran: *desarrollar competencias teóricas, prácticas e instrumentales vinculadas a la actividad de enseñar matemáticas que capaciten para tomar decisiones adecuadas relativas a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Secundaria y de universidad; conocer, utilizar y elaborar estrategias heurísticas para la resolución de problemas de Matemáticas susceptibles de ser enseñadas en la Educación Secundaria; conocer y utilizar nuevos instrumentos interactivos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas haciendo uso de TIC.* Para el logro de estos objetivos, se diseñó un Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra.

En este capítulo se presenta el análisis de las discusiones, estrategias y razonamientos matemáticos que mostraron los estudiantes en ese Taller, al utilizar GeoGebra para resolver problemas. Nuestro interés radica en identificar momentos en los que el uso de la tecnología haya hecho aparecer discusiones o reflexiones de los estudiantes acerca de las matemáticas que conocen. A partir de este análisis, utilizando una metodología análoga a la propuesta por Heid, Wilson y Blume (2015) para generar actividades para la formación de profesores de matemáticas de Secundaria, se formula un conjunto de actividades que se espera que resulten útiles para la formación docente, contribuyendo al desarrollo de la comprensión matemática necesaria para la enseñanza de la disciplina en Educación Secundaria.

MARCO CONCEPTUAL

Existen distintos modelos para describir el conocimiento o la comprensión de las matemáticas que debe tener un profesor. La mayoría de esos modelos surgen del propuesto por Shulman (1986), que considera dos componentes básicas, el Conocimiento de la Materia y el Conocimiento Pedagógico, a partir de las cuales define el Conocimiento Didáctico de la Materia, en el que se enfatiza la necesidad de mirar los elementos didácticos desde la especificidad de cada materia. A raíz de esa necesidad, en el ámbito de la matemática surgieron modelos como el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames, y Phelps, 2008) o el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Contreras, y Flores, 2013). Kilpatrick (2015) propone un modelo para la comprensión matemática para la enseñanza en secundaria, denominado MUST por las siglas en inglés (Mathematical Understanding for Secondary Teaching). Este modelo considera importante la naturaleza dinámica del conocimiento de los profesores, al entender que éste está en un proceso de evolución continua, que se va enriqueciendo a medida que se enfrenta a situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los autores utilizan el término comprensión (understanding) en vez de conocimiento (knowledge) para recoger esa connotación dinámica (Kilpatrick, 2015).

El MUST describe la comprensión matemática que necesita tener un profesor de matemáticas de Educación Secundaria como un constructo que se puede observar desde tres perspectivas fuertemente relacionadas entre sí, que se denominan *Competencia Matemática, Actividad Matemática y Contexto Matemático de la Enseñanza*[1]. Cada una de estas perspectivas se describe a partir de componentes y aspectos necesarios en la enseñanza. La Competencia Matemática hace referencia a los conocimientos y las habilidades matemáticas que un profesor necesita para enseñar la disciplina en la Educación Secundaria, que incluye no solo las matemáticas correspondientes a este nivel educativo sino también las de los niveles anteriores y posteriores. La perspectiva denominada Actividad Matemática se refiere al conjunto de acciones matemáticas específicas que el docente tiene que realizar como parte de su profesión, tales como conectar conceptos, justificar argumentos o generalizar hechos matemáticos. Por último, el Contexto Matemático de Enseñanza incluye aspectos de la comprensión matemática que entran en juego de forma exclusiva en la profesión docente, tal como entender el pensamiento matemático de los estudiantes, reconociendo la naturaleza matemática de sus dudas y errores o reconocer cuándo un argumento o una solución proporcionada por un alumno está incompleta o satisface las condiciones de un problema.

En Heid, Wilson y Blume (2015, p.15) se describen las distintas componentes de las tres perspectivas. En este estudio se utilizan de forma explícita tanto en el análisis como en la propuesta de actividades, las que se describen con más detalle a continuación:

- Comprensión conceptual se describe como la capacidad de entender los conocimientos matemáticos y saber por qué se pueden deducir o cuál es su origen. (Competencia Matemática)
- Competencia estratégica se refiere a la capacidad de crear, evaluar e implementar estrategias de resolución de problemas. Para ello es necesario comprender distintas propiedades y ser capaz de ejecutar distintos procedimientos, con el fin de poder evaluar cuál sería la más efectiva. (Competencia Matemática)
- Razonamiento Matemático hace referencia a la actividad de observar, conjeturar y justificar o demostrar. Haciendo uso de lógica deductiva, propiedades matemáticas, regularidades y patrones, generalizaciones de casos particulares, restricciones de propiedades y extensiones a otras estructuras. (Actividad Matemática)
- Creación Matemática implica capacidad de encontrar nuevos caminos para expresar objetos matemáticos, generar nuevos y transformar su representación. Se muestra al elegir representaciones de objetos que resaltan su estructura, sus restricciones o sus propiedades, cuando se definen objetos nuevos

[1] Mathematical Proficiency, Mathematical Activity and Mathematical context of teaching.

y cuando se manipulan cambiando su forma, pero no su representación. (Actividad Matemática)

El modelo MUST fue desarrollado entre profesores e investigadores con el objetivo de conectar la formación con la práctica docente a partir del trabajo conjunto de ambos colectivos. Las sesiones de trabajo tenían como punto de partida una descripción breve de un evento que transcurrió durante alguna de las facetas de la práctica docente (que el modelo MUST denomina Prompt). Por ejemplo, una duda, pregunta o error de un estudiante durante una clase, alguna reflexión del docente durante la preparación de las clases o al reflexionar sobre lo ocurrido en ellas (Wilson y Zbiek, 2015, p.32).

Parte de la asignatura *Matemáticas para la Enseñanza*, contexto en que se realiza esta investigación, se dedica a la resolución de problemas con GeoGebra y el análisis, por parte de los estudiantes, de su propio proceso de resolución tratando de determinar esas situaciones que dan lugar a eventos similares a los Prompts. Los problemas utilizados abarcan contenidos incluidos en el currículo de matemáticas de la Educación Secundaria, por lo que muchas de las situaciones que se dan son susceptibles de ocurrir en un aula de ese nivel educativo. Se persigue así que las actividades propuestas sean un elemento que permita que los estudiantes de *Matemáticas para la Enseñanza* establezcan conexiones entre las matemáticas que conocen y la práctica docente en un ambiente de resolución de problemas en el que se hace uso de la tecnología.

El trabajo que presentamos comienza con el análisis del proceso de resolución de los estudiantes cuando usan GeoGebra para resolver un problema, describiendo los pasos seguidos e identificando qué aspectos de la comprensión matemática pueden observarse, en la mayoría de los casos desde la perspectiva Actividad Matemática. De ese análisis se extraen una serie de momentos que se transforman en actividades para la formación de profesores, similares a los Prompts, acompañándolas de un conjunto de ideas matemáticas asociadas con elementos de la actividad propuesta. De esta forma se busca generar un conjunto de actividades que hagan referencia explícita a un contexto de enseñanza en el que se resuelven problemas usando tecnología, en particular, situaciones que surgen directamente de la resolución de un problema cuando se utiliza el SGD GeoGebra.

METODOLOGÍA

Nuestro objetivo requiere partir de un entorno de clase de matemáticas en el que se use la tecnología, por lo que se diseñó un Taller de Resolución de Problemas haciendo uso de GeoGebra.

El Taller de Resolución de Problemas

En el diseño de las actividades del taller se pretendía que, haciendo uso de las tecnologías digitales para resolver problemas de matemáticas, se generara un escenario rico en discusiones matemáticas. Para ello se utilizaron los cinco episodios que Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) proponen como parte del proceso de resolución de problemas haciendo uso de tecnología: *Comprensión, Exploración, Búsqueda de múltiples aproximaciones, Extensión* y *Reflexión sobre el proceso*. Los autores además señalan que, en el contexto del uso de un SGD como GeoGebra, los tres primeros episodios cobran especial relevancia. Es por ello, que fijamos nuestra atención en estos tres episodios, diseñando el taller para que esta parte se realizara en las sesiones de clase.

El Taller tuvo una duración total de 18 horas, divididas en 9 sesiones de dos horas cada una. En el mismo participaron 18 estudiantes de 4º curso del Grado de Matemáticas, que fueron distribuidos en parejas. En total se propuso a los estudiantes cuatro problemas, previamente analizados por el equipo investigador, desde diferentes aproximaciones y con sus distintas opciones de solución.

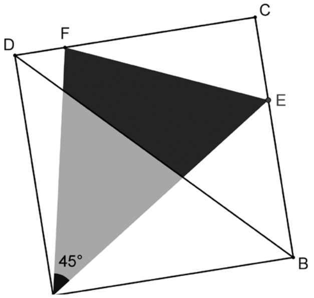
En este capítulo se presenta el estudio de un caso, correspondiente al trabajo realizado por una de las parejas de estudiantes, Sophie y Evan (pseudónimos), en uno de los problemas propuesto, denominado «*Ángulo 45º*» (Tabla 1). Con la información se trata de profundizar en el análisis del proceso de resolución de los estudiantes y explicar con detalle cómo, con vistas a la formación de profesores, se generan actividades y se identifican ideas matemáticas a partir de dicho análisis.

El problema «*Ángulo 45º*»

El enunciado del problema, tal cual se presentó a los estudiantes fue el siguiente:

Tabla 1: Enunciado del problema

Dado un cuadrado ABCD, se traza un ángulo de 45° interior al cuadrado y con vértice en A. De esta manera las dos semirrectas del ángulo cortan a los lados opuestos a A en dos puntos E y F (ver Figura). Estudia la relación que existe entre las dos partes en las que queda dividido el triángulo AEF por la diagonal BD.



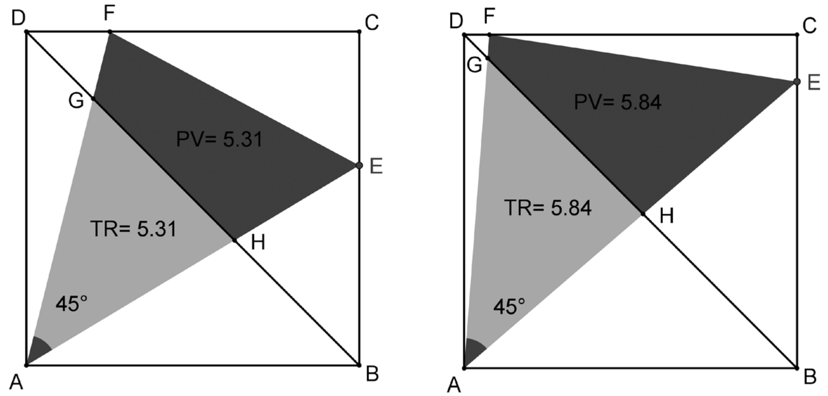
Una resolución de este problema haciendo uso de SGD

Usar GeoGebra para resolver este problema conlleva realizar una construcción dinámica que nos permita explorar las propiedades de la figura y hacer conjeturas útiles para realizar distintas aproximaciones a la solución. Presentaremos, a continuación, parte del análisis desarrollado por el equipo investigador previo a la presentación del problema a los participantes en la investigación.

Comprensión

Utilizando los datos del enunciado, realizamos una construcción dinámica (https://www.geogebra.org/m/becux5uh). Esta construcción permite visualizar, al arrastrar el punto E sobre el lado BC, distintas posiciones para el ángulo de 45º que dibuja distintos triángulos de vértices AEF (Figura 1). Al estudiar las dos partes en que queda dividido el triángulo, se puede observar que, aunque cambian de forma y de tamaño, el área de ambas coincide en cada caso.

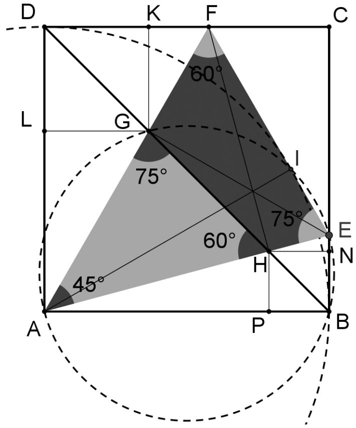
Figura 1: Distintas posiciones de la figura, al arrastrar E sobre BC



Exploración

Para poder tener una idea más clara del problema, se pueden trazar y añadir otros elementos a la figura, como rectas, segmentos, puntos, circunferencias y ángulos (Figura 2). Estudiando cada uno de ellos al arrastrar el punto E, se pueden observar regularidades y variaciones que permiten descubrir propiedades y hacer conjeturas. Por ejemplo: El punto medio de AE es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G; las diagonales del cuadrilátero EFGH coinciden con dos de las alturas del triángulo AEF; los cuadriláteros PBNH y DLGK son cuadrados (entre otras).

Figura 2: Construcción con elementos trazados durante la exploración



Búsqueda de múltiples aproximaciones

Al explorar la figura con los nuevos elementos se pueden descubrir varias propiedades, algunas de las cuáles se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Propiedades y conjeturas que hemos podido observar en la figura del problema

Observaciones	A1	A2	A3
Las diagonales del cuadrilátero EFGH coinciden con dos de las alturas del triángulo AEF.	□	■	■
La altura del triángulo AEF desde A hasta el lado EF es constante e igual a la medida del lado AB.	□	■	□
La circunferencia de centro A y radio el lado del cuadrado es tangente al segmento EF.	□	□	□
Los puntos A, B, E y G son cocíclicos. Igualmente, los puntos A, D, F y H.	□	■	■
El punto medio de AE es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G.	□	□	■
El segmento con extremos el punto medio de AE y G es una altura del triángulo AGH.	□	□	■
La suma de las áreas de los triángulos ABG y ADH coincide con las de BEG, CEF y DFH.	■	□	□
El triángulo AHG es semejante al triángulo AEF.	□	■	□
Los cuadriláteros PBNH y DLGK son cuadrados.	■	□	□

(A1, A2 y A3, son las diferentes aproximaciones o maneras de resolver el problema que se presentarán en lo que sigue)

Una parte importante de la resolución de problemas es abordar de distintas maneras el camino hacia la solución (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). En nuestro análisis del problema revisamos algunas aproximaciones distintas, que se apoyan en diferentes resultados matemáticos. Cada aproximación incluye las justificaciones de alguna de las propiedades (marcadas con ■) que observamos en la Tabla 2, al ser necesarias para formalizar la resolución. Estas tres aproximaciones las denominamos analítica (A1), basada en semejanza (A2) y geométrica (A3).

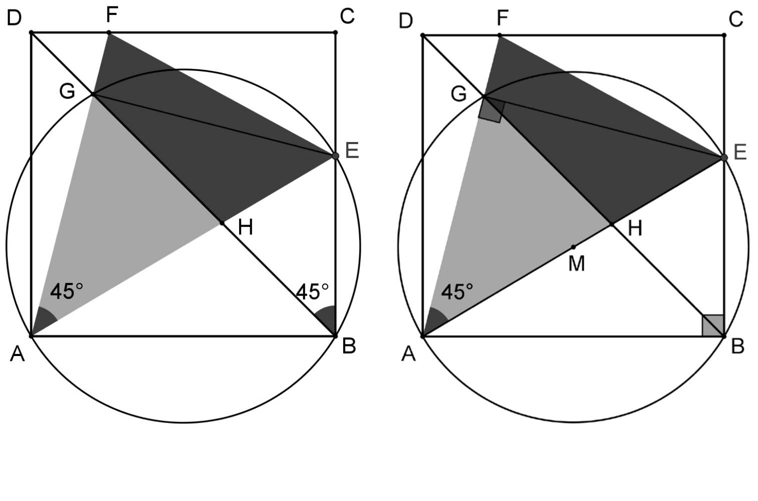
A1: Una aproximación analítica, que se basa en encontrar la relación entre la longitud del lado del cuadrado, las distancias de E y F a los vértices del cuadrado, y el ángulo de 45°. Partiendo de un cuadrado de lado la unidad, utilizando las observaciones hechas en la fase de exploración y que la tangente de 45° es uno, se presenta un sistema de ecuaciones que permite dar con la solución.

A2: Una aproximación basada en la semejanza de triángulos, que usa que la relación entre las áreas de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de proporcionalidad entre sus lados. Demostrando que los triángulos AEF y AGH son semejantes, sólo es necesario demostrar que la razón de proporcionalidad entre los lados del triángulo AGH y el triángulo AEF es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

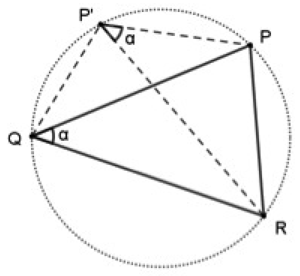
A3: Una aproximación geométrica, que presentamos a continuación como ejemplo, basada en calcular el área del cuadrilátero EFGH y demostrar que es la mitad que la del triángulo AEF. En cada uno de los pasos siguientes se demuestran propiedades necesarias para dar con la solución.

PASO 1: Demostrar que el segmento EG es una de las alturas del triángulo AEF, análogamente el segmento FH también es una altura.

Figura 3: Paso 1 de la aproximación geométrica



- Se cumple que el ángulo GAE = 45°, y que el ángulo GBE mide también 45°, por estar delimitado por la diagonal y el lado del cuadrado. Teniendo en cuenta que ABGE es un cuadrilátero, se deduce que A, B, E y G pertenecen a la misma circunferencia, aplicando el siguiente resultado:



«Dado un triángulo PQR y sea α el ángulo QPR. Si P' es un punto tal que el ángulo PP'R es igual a α y PP'QR es un cuadrilátero simple entonces P' está en la circunferencia que pasa por P, Q y R.» (1)

- Se sabe que el ángulo ABE = 90° y que A, B, E y G pertenecen a la misma circunferencia, por tanto, el ángulo AGE mide 90°, ya que es suplementario al ángulo ABE. Esto se sustenta en (2).

«Los puntos P, R, Q y P' son cocíclicos si y solo si, los ángulos PP'Q y QRP son suplementarios» (2)

Otros resultados que usaremos y se deducen de (3) son: i) AE es el diámetro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G, ii) M, punto medio del segmento AE, es el centro de la circunferencia.

«Un ángulo inscrito en una circunferencia mide 90° si, y solo si, abarca un diámetro de esta» (3)

PASO 2: Demostrar que el triángulo AEG es isósceles y GM es perpendicular al lado AE.

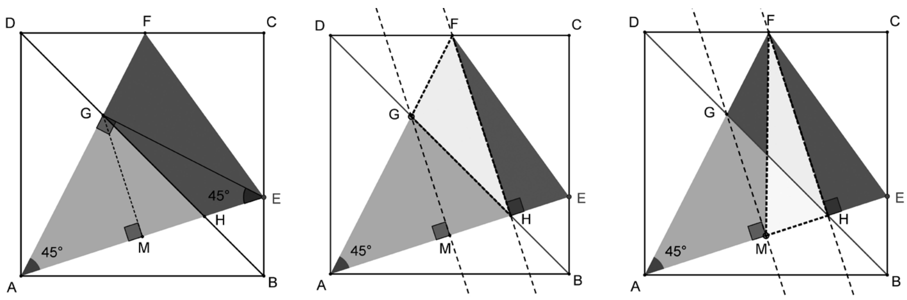
- El ángulo EAG mide 45° luego el ángulo AGE mide 90° y M es el punto medio de AE, se tiene que: el ángulo AEG mide 45°, el triángulo AEG es isósceles y GM su altura (Figura 4a).

PASO 3: Demostrar que el área del triángulo EFM es igual a la del polígono EFGH.

- Se parte de dos propiedades demostradas anteriormente: el ángulo FHA mide 90°, al ser FH altura del triángulo AEF, y el ángulo GMA mide 90°. Por tanto, la recta GM es paralela a la recta FH. Como consecuencia, cualquier triángulo, con vértices F, H y un tercero sobre la recta GM, tendrá de base FH y una altura de medida constante, esto es, los triángulos FGH y

FMH tienen la misma área (son equivalentes), es decir, el área del triángulo EFM es igual a la del polígono EFGH (Figura 4b y 4c)

Figura 4: Paso 2 y 3 de la aproximación geométrica



(a) (b) (c)

PASO 4: Demostrar que el área del triángulo AFE es el doble que la del polígono EFGH.

- Teniendo en cuenta que cada mediana de un triángulo lo divide en dos triángulos equivalentes y que FM es una mediana del triángulo AEF, se tiene que el área del triángulo EFM es la mitad del área del triángulo AFE. Usando la propiedad demostrada en el Paso 3 se cumplirá que el área del cuadrilátero EFGH mide la mitad del área del triángulo AFE, que es lo que se había conjeturado desde el momento inicial de comprensión del problema.

Datos

Durante las sesiones de clase se pidió a los estudiantes una construcción en GeoGebra que contemplara los datos del problema, una lista de propiedades o conjeturas observadas en la construcción, un plan para demostrar las conjeturas realizadas y tratar de resolver el problema y, por último, la resolución por escrito del problema.

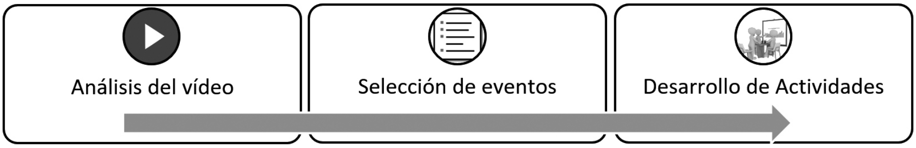
Para realizar el análisis se recopilaron tres tipos de datos: (i) los archivos GeoGebra con las construcciones realizadas por los estudiantes, (ii) los documentos escritos a lápiz y papel, que contenían la lista de propiedades y conjeturas de los estudiantes, su plan de solución y la resolución final del problema, y (iii) la grabación con OBS Studio de las sesiones de trabajo de la pareja, en la que se recogió conjuntamente la imagen de la pantalla del ordenador en el que estaban trabajando y las conversaciones que tuvieron, imagen y sonido, desde una webcam que los enfocaba.

Proceso de análisis

El instrumento principal para analizar la resolución de los estudiantes fue la grabación con OBS. El archivo GeoGebra con la construcción y las notas en papel de los estudiantes sirvieron de apoyo.

A partir del vídeo se identificaron eventos en los que la pareja de estudiantes mantenía una discusión matemática en torno a la resolución del problema planteado, teniendo en cuenta que un evento se identifica como una motivación matemática en forma de pregunta, duda o asunto que capta la atención y necesita resolución (Zbiek y Blume, 2015). El siguiente paso fue, siguiendo el esquema del MUST, pensar en distintas ideas matemáticas que intervendrían en la discusión (Figura 5).

Figura 5: Esquema del proceso seguido para la generación de actividades para la formación docente



En esta investigación se seleccionaron eventos que estuvieran directamente relacionados con el uso del GeoGebra y que mostraran evidencias de algunas de las componentes de la comprensión matemática según el modelo MUST. Dada la naturaleza del Taller, se puso el foco en las componentes *razonamiento matemático* y *creación matemática* de la Actividad Matemática.

Una vez seleccionados los eventos, una manera natural de identificar algunas ideas asociadas es plantearse qué respuesta se daría frente a esa situación o si se podrían dar diferentes respuestas, para luego concentrarse en conectar matemáticamente estas respuestas con el propio evento. De esta forma, cada evento tendrá asociados distintas ideas, las cuáles deben hacer referencia a alguna de las componentes que forman cada una de las perpectivas del MUST descritas en el marco.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Presentamos el análisis del proceso de resolución de Sophie y Evan atendiendo especialmente a los tres primeros episodios de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009), que son los que transcurren durante las dos sesiones de clase que se le dedica a este problema de forma presencial. Dentro del análisis destacamos en tres tablas las transcripciones de discusiones matemáticas, que son el punto de partida para las actividades e ideas matemáticas que aparecen descritas en la siguiente sección.

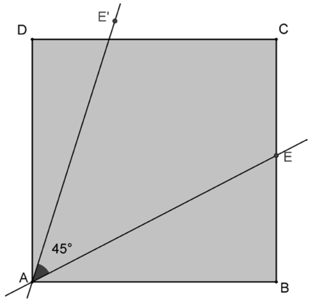
Episodio de comprensión

El uso de GeoGebra en la resolución de problemas pone el énfasis, en este primer episodio, en realizar una construcción que represente los objetos matemáticos que intervienen y permita explorar el problema. Esto es compatible con la idea aceptada de la fase de comprensión, en la que se busca la información relevante y una forma de representarla para poder abordar el problema matemáticamente. Para este problema, la construcción dinámica debe permitir visualizar un ángulo de 45º móvil inscrito en el cuadrado, de tal forma que, al arrastrar el ángulo se observen una familia de triángulos y cuadriláteros que conforman la figura. ¿De qué forma se puede trazar el ángulo para que permita su movimiento? Es una pregunta clave que hay que resolver para abordar este episodio.

La pareja de estudiantes comienza la resolución del problema, construyendo en GeoGebra la figura que presenta el enunciado. Construyen el cuadrado ABCD a partir de un segmento arbitrario AB. Seguidamente, en un primer intento, toman un punto arbitrario sobre el lado BC y otro sobre el lado CD. Luego, usando la herramienta *Ángulo,* usan dichos puntos para trazar el ángulo con vértice en A y arrastrarlos sobre los lados hasta conseguir una amplitud de 45º. Descartan lo que han hecho cuando comprenden que, de esta manera, no consiguen que la amplitud del ángulo permanezca constante si arrastran uno de los puntos. Observamos en este hecho, desde la perspectiva de la Actividad Matemática, la acción de *representar,* aspecto de la *creación matemática*, al elegir la manera de que el ángulo de 45° pueda ser arrastrado dentro del cuadrado. Darse cuenta de que su primer intento es una representación que no restringe la amplitud y, por tanto, no mantiene la amplitud al arrastrar indica que los estudiantes comprenden la importancia de este dato.

Tabla 3. Transcripción de la discusión junto a la imagen que aparecía en la pantalla

Sophie: ¿Y ahora? ¿E' lo hizo sólo?
Evan: … Sí, el E' lo hizo sólo
Evan: Ya, tienes que hallar la recta que pasa por E' y por A. Hallar el punto de corte con el lado CD y ese es el punto que hace el ángulo…
Sophie: Y lo mismo con E. Pero claro, el E lo pusiste tú.
Evan: Claro, pero como el E ya lo puse dentro pues…
Sophie: A ver, dibújalo
Evan: Si tú haces la recta de E a A…
Sophie: OK
Evan: …es el ángulo



A continuación, discuten como utilizar la herramienta *Ángulo dada su amplitud* para lograr su objetivo, conseguir trazar un ángulo de 45 grados desde el vértice A que se conserve al arrastrar uno de los puntos que lo define. Se apoyan en el punto E elegido de forma arbitraria sobre el lado BC y el vértice A para conseguirlo (Tabla 3). Una vez han trazado el ángulo de 45^o, los estudiantes prosiguen con la construcción trazando el resto de segmentos necesarios para dibujar las figuras que se quieren comparar. El siguiente paso que dan es definir los puntos de corte G y H, cómo intersección de BD (diagonal) con los segmentos AF y AE respectivamente. De esta forma y usando la herramienta *Polígono* representan el triángulo AGH y el cuadrilátero EFGH (véase la Figura 4). Visualizando el valor del área de cada polígono y arrastrando E dentro del lado BC llegan a sus primeras conclusiones: que las áreas de las dos figuras son iguales, que sería lo que tienen que demostrar y que, en los casos extremos, E≅B y E≅C, la diagonal divide al triángulo en dos triángulos congruentes, es decir, la propiedad es evidente. Observamos en este proceso las acciones de *conjeturar*, *restringir* y *justificar* relacionadas con el *razonamiento matemático*. El enunciado no explicita la relación entre las figuras, por ello, los estudiantes estudian los atributos de las figuras para poder definir el objetivo del problema y forman un argumento matemático: las áreas de ambos coinciden para cualquier posición del punto móvil E. Esta conjetura la hacen basándose en la información que aporta el GeoGebra. Además, reconocen dos casos particulares, los extremos, que justifican visualmente basándose en que las diagonales del cuadrado dividen a este en cuatro partes de la misma área.

Tabla 4: Transcripción sobre el área de los triángulos inscritos junto a imágenes que aparecían en la pantalla

Sophie: La altura es la perpendicular a EF que pasa por el punto A.

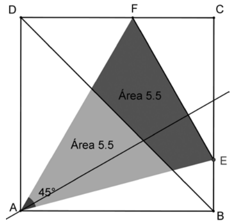
Evan: Vamos a hacerla…perpendicular.

Usan la herramienta Recta perpendicular, seleccionan el segmento EF y luego el punto A obteniendo la recta que pasa por A perpendicular a EF.

Sophie: Esa es la altura.

Evan: Vale. Claro es la altura en este momento.

Sophie: Muévela.



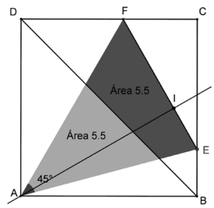
Discuten sobre lo que pasa en el caso extremo donde la altura coincide con el lado del cuadrado.

Sophie: Ahora el punto de intersección ese (se refiere a I).

Evan: Puntito… ese puntito de aquí y ahora vamos a calcular el segmento para poder borrar la recta.

Sophie: Si la borras…

Evan: Borrar no, ocultar.



Ocultan la recta y varias etiquetas.

Evan: Vamos a animar… la altura siempre es la misma.

Observan los valores del segmento AI.

Sophie: ¿También? ...Sí, pero ¿por qué?

Evan: oh, Porque la distancia es la misma.

Sophie: …vale…a ver la altura tiene que ser la misma y entonces el segmento EF tiene que ser siempre el mismo… no sé si será el a (hace referencia por error al segmento base del cuadrado).

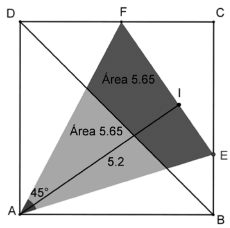
Localizan la longitud del segmento EF en la vista algebraica.

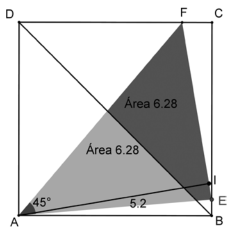
Evan: Este es el EF… este sí varía.

Sophie: ¿por qué varía? …no debería de variar.

Evan: Sí varía.

Sophie: Ah sí, sí claro, tiene que variar por qué el área está variando. Digo el área no se mueve, pero el área si cambia.





Episodio de exploración

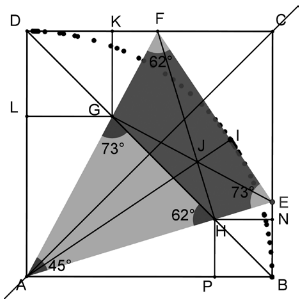
Este episodio es al que los estudiantes dedicaron más tiempo durante la primera sesión de clase. La búsqueda de distintas propiedades que les diera una idea de cómo demostrar la igualdad, fue abordada por la pareja de distintas formas: observando la construcción en movimiento, realizando búsquedas en internet de triángulos inscritos o de razones trigonométricas, haciendo preguntas al profesor y poniendo en común sus ideas con todo el grupo. Durante este episodio, usaron GeoGebra fundamentalmente para representar otros objetos matemáticos que completaran la construcción, observando si permanecían invariantes o no frente al movimiento. El movimiento ordenado y la cuantificación de atributos son dos de las heurísticas propias de SGD (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno, 2015), que se identifican en la resolución de la pareja, a su vez que el uso de fórmulas conocidas o tratar de resolver problemas más simples. Desde la Competencia Matemática, identificamos la capacidad de utilizar diferentes propiedades observadas para generar posibles estrategias y la evaluación de estas como posibles caminos a la solución, como la *competencia estratégica* de la pareja. En el siguiente episodio detallamos las estrategias que evaluaron.

Una de las discusiones matemáticas, que transcurrió en el episodio de exploración, giró alrededor de la familia de triángulos inscrita en el cuadrado. (Ver Tabla 4) Durante la sesión el profesor entregó a cada pareja una hoja para que anotaran las propiedades observadas durante el proceso de resolución. No era obligatorio demostrarlas, sino que bastaba con explicitarlas al visualizar la construcción dinámica. Al final de la clase, todas las parejas expusieron sus observaciones, lo que sirvió para aumentar la lista de cada pareja. Las propiedades que entregó la pareja del estudio fueron las siguientes (trascripción literal adaptando la notación a la Figura 6):

- Las áreas de cada polígono obtenidos al cortar el triángulo AEF con la diagonal DB coinciden.
- La altura AI del triángulo AEF es constante, por tanto, si el área varía debe variar el segmento EF.
- Cuando el punto E coincide con alguno de los vértices adyacentes (B o C) entonces el área del triángulo es la mitad del área del cuadrado, esto es trivial, ya que uno de los lados del triángulo, AF o AE coincide con la diagonal AC y el cuadrado queda dividido en dos partes iguales.
- La altura desde F hasta AE pasa siempre por H.
- La circunferencia de centro A y radio AB es tangente al triángulo AEF.
- J es el ortocentro de AEF (Teorema: Dos alturas se cortan en el ortocentro y la tercera también).

- Si logramos ver que la suma de las áreas de los triángulos ABH y AGD es igual a la suma de las áreas de los triángulos BEH, CFE y DGF, veremos que el área de AHG es igual al área de EFGH.
- Los triángulos AGH y AEF son semejantes, porque ambos tienen dos ángulos comunes, el generado de 45°, es decir, GAH y FAE son iguales y AFE y AHG también son iguales.
- Al calcular las alturas de todos los triángulos, observamos que la altura de los triángulos ABH y BEH coinciden, y la altura de los triángulos DGF y DGA son iguales.

Figura 6: Construcción de la pareja, al finalizar la sesión de clase



ABCD es un cuadrado
BD diagonal del cuadrado
E punto arbitrario del lado BC
F punto de CD tal que AEF=45º
H intersección de BD con AE
G intersección de BD con AF
J ortocentro de AEF

Buscando múltiples aproximaciones a la solución

El episodio anterior y este se entrecruzan, ya que, la tecnología en la resolución de problemas permite conjeturar la solución de forma empírica, al explorar con la construcción el problema. Además, las propiedades observadas anteriormente permiten abrir distintas vías para resolverlo, que se apoyan en diferentes conceptos y recursos. Esta diversidad de aproximaciones favorece el desarrollo de la comprensión conceptual de los conceptos y la destreza en la resolución de problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009).

Al finalizar la primera sesión, y durante la siguiente, la pareja aborda la demostración de la igualdad de áreas que habían conjeturado. Desde el principio, plantea un camino de cálculo directo de las áreas que les lleva a: i) expresar el área del triángulo AEF, sabiendo que su altura es constante y de la misma medida que el lado del cuadrado, ii) realizar búsquedas en Google relacionadas con triángulos inscritos para encontrar alguna expresión algebraica que relacione el área de un triángulo inscrito con el lado del cuadrado iii) buscar expresiones algebraicas para las áreas de todos los triángulos que aparecen, estudiando las alturas como segmentos en GeoGebra y observando qué pasa al animar E (ver Tabla 5).

La aproximación a la que le dedican más tiempo, la trabajan con lápiz y papel, y señalan (hablando a la cámara) que su plan es demostrar que las áreas de los triángulos ABH y AGD es igual a la suma de las áreas de los triángulos BEH, CFE y DGF:

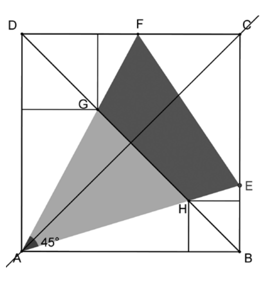
> Sophie: Para demostrar el problema lo que vamos a hacer es sumar las dos áreas de la parte inferior de la diagonal, los dos triángulos, y la vamos a igualar a las áreas de los tres triángulos de arriba para ver si son iguales… Vamos a suponer que son iguales y dar con una relación para que se cumpla.

Hacen avances en esta dirección, no llegan a terminar una demostración formal, pero en el plan entregado y en la grabación se puede observar que tienen todas las relaciones algebraicas necesarias. Observamos bajo las perspectivas de Competencia y Actividad Matemática, como en los episodios anteriores, acciones relacionadas con el *razonamiento matemático* y la *competencia estratégica* de la pareja, asimismo, se observa que todo gira alrededor de uno de los aspectos principales del razonamiento matemático: *justificar*. Esto es posible dado que GeoGebra les permite la cuantificación de los valores de las áreas y alturas de los cinco triángulos que intervienen en esta aproximación. Combinando la cuantificación con el movimiento controlado del punto E, la pareja consigue realizar un estudio de casos exhaustivo de las familias de triángulos. Esto le da soporte para enunciar el argumento. Además, la pareja reconoce las limitaciones de este argumento, al estar sustentado únicamente en la representación, dando pie a la búsqueda de una justificación formal. Para ello, escribe las propiedades observadas como fórmulas conocidas y comienza a implementar una secuencia lógica basada en ellas.

Tabla 5: Transcripción sobre la igualdad de las alturas
junto a la imagen que aparecía en pantalla

Evan: ¿estas alturas coincidirán?

Trazan las perpendiculares a los lados AD y CD que pasan por G y las perpendiculares a AB y BC que pasan por H. Los puntos de corte con los lados del cuadrado y esas rectas para dibujar los segmentos y ver cuánto miden.



Evan: Aquí tenemos que… d1 e I1 las alturas son las mismas (Habla de las alturas de los triángulos ABH y BEH desde el vértice H).

Sophie: Muévelo.

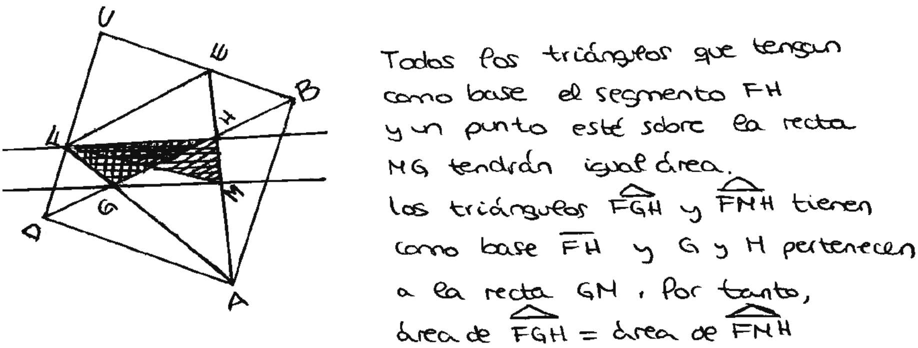
Evan: Siempre iguales y estas son siempre iguales (Se refiere a las alturas de DGF y AGB desde G).

Evan: Esta relación me encanta porque la podemos usar.

Finalmente, exploran otra aproximación a la solución utilizando las propiedades de semejanza de los triángulos AGH y AEF, aunque no llegan a demostrarlo durante la sesión. Los planes de resolución se discuten con todo el grupo, se dan varias ideas y se esbozan los pasos a seguir.

En otra sesión, el profesor presenta la aproximación geométrica (véase A3) incidiendo en la necesidad de demostrar cada una de las propiedades necesarias para dar cada uno de los pasos. La pareja toma nota y entrega una demostración completa como solución del problema (Figura 7).

Figura 7: Parte de la resolución entregada por la pareja



ACTIVIDADES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

El problema *«Ángulo 45º»*, u otro similar, podría plantearse en Educación Secundaria, ya que los contenidos y procedimientos quedan incluidos en el currículo de esa etapa. Tiene sentido pensar que un profesor podría encontrarse con situaciones parecidas a las expuestas en la sección anterior. Para esta sección generamos tres actividades matemáticas (una por cada evento señalado en las tablas 3, 4 y 5) que tienen como fin ser el punto de partida para la formación de profesores en un contexto de uso de tecnología para la resolución de problemas. Estas propuestas no son únicas, un mismo evento puede enfocarse de otra manera y generar una actividad distinta. Esto se debe a que, junto a cada una de esas actividades se presenta un conjunto de ideas matemáticas, asociando ideas distintas se obtendría otra actividad. El fin de estas ideas es tratar de reflejar partes la comprensión matemática necesarias para gestionar una situación de aula similar a la de la actividad, usando definiciones, propiedades matemáticas o relaciones matemáticas (Heid et al., 2015).

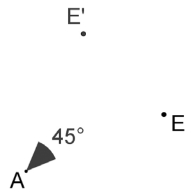
Trazar un ángulo

Cómo trazar un ángulo de una amplitud determinada es una actividad matemática que se introduce en la Educación Primaria. Algunas preguntas que surgen cuando uno se lo plantea son ¿qué es un ángulo? y ¿cómo lo mido? La necesidad de usar un instrumento de medida, el transportador de ángulos, para su construcción en lápiz y papel es trasladada al uso de tecnología buscando una herramienta de GeoGebra similar: *Ángulo dada su amplitud*. De este hecho extraemos la primera actividad propuesta para generar discusión durante la formación de profesores.

Tabla 6: Actividad asociada al evento de la Tabla 3
e ideas matemáticas asociadas

Actividad 1

Dos estudiantes quieren trazar un ángulo de 45° con vértice en un punto A. En primer lugar, usan la herramienta *Ángulo dada su amplitud* y luego se preguntan, ¿cómo podría hacerlo sin usar la herramienta?



Ideas matemáticas

1. Dado un punto y un ángulo orientado, se puede realizar una rotación en el plano de un objeto.
2. Se puede construir un ángulo de 45° sobre un segmento, a partir del cuadrado que lo tenga como lado.
3. Usando la relación entre ángulo central e inscrito de una circunferencia se puede construir uno de 45°.
4. En la geometría aparecen, de forma recurrente, algunos ángulos que están relacionados con triángulos rectángulos e isósceles y polígonos regulares. Como 30°, 45°, 60°, 90°…
5. El concepto de ángulo se define a partir de una relación de equivalencia y una orientación.

La actividad plantea desarrollar las cinco ideas matemáticas conectando los aspectos de la comprensión matemática: comprensión conceptual (1 y 5), representar (1, 2, 3 y 4) y reconocer distintas estructuras de las matemáticas (1, 3 y 5), con los estándares de aprendizaje del currículo de matemáticas en Educación Secundaria: reconocer e identificar ángulos, usar ángulos interiores y centrales en geometría plana, estudios de las posiciones relativas de rectas y la medida de ángulos.

Triángulo de altura constante

La caracterización de triángulos dados sus ángulos o sus lados se introduce desde los primeros cursos de geometría en la educación secundaria, por ejemplo, al representar triángulos a partir de algunas de sus dimensiones. Frecuentemente se presentan ejemplos donde existe una solución única y no se abordan casos sin solución o cuya solución es una familia de ellos. En el problema, aparece implícitamente una familia de triángulos cuya altura es constante y uno de sus ángulos es 45°, un hecho que se puede extraer de la forma siguiente.

Tabla 7: Actividad asociada al evento de la Tabla 4
e ideas matemáticas asociadas

Actividad 2
Dos estudiantes utilizan el GeoGebra para construir un triángulo con un ángulo de 45º y una altura de 5 unidades, de forma que la altura es la que parte del vértice correspondiente al ángulo de 45º. Representan algunos triángulos que cumplen esas características y se preguntan ¿tendrán todos el mismo área?
Ideas matemáticas
1. Un triángulo puede determinarse (hallar sus tres ángulos y lados) conociendo la medida de: i) Tres de sus lados ii) Dos de sus lados y uno de sus ángulos iii) Uno de sus lados y dos de sus ángulos. 2. De forma dinámica se puede representar la familia de triángulos de altura 5 unidades y con un ángulo de 45º. Se coloca un vértice sobre una recta, apoyándose en él se traza un ángulo de 45º de forma que abarque el lado opuesto sobre una paralela a la primera recta, trazada a una distancia de 5 unidades.

Se plantea desarrollar estas dos ideas para conectar la capacidad de justificar y conjeturar (1 y 2), aspectos de la Actividad Matemática, con los estándares: estudiar elementos que caracterizan los triángulos y uso de la geometría dinámica para afianzar conceptos de geometría plana.

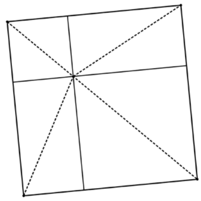
Distancia desde la diagonal

Muchas propiedades geométricas de los polígonos, y de sus elementos, pueden ser exploradas y descubiertas haciendo uso del software. Descubrir estas propiedades y reescribir definiciones de objetos o de familias de polígonos, permite extender la comprensión conceptual e introducir el razonamiento matemático en el aula. El hecho de que los estudiantes noten que las distancias a los lados desde la diagonal de un cuadrado coinciden dos a dos es un ejemplo de cómo el GeoGebra origina oportunidades para discutir de matemáticas.

Tabla 8: Actividad asociada al evento de la Tabla 5
e ideas matemáticas asociadas

Actividad 3

En una clase de geometría con tecnología, se representa un cuadrado y una de sus diagonales. Desde un punto de la diagonal se trazan los segmentos hasta los otros dos vértices (ver figura). Estudiando las alturas de estos triángulos un estudiante se da cuenta que son iguales dos a dos. Se lo indica al profesor y le pregunta ¿esto sólo pasa en el cuadrado? ¿pasa en otros cuadriláteros?



Ideas matemáticas

1. Un cuadrado tiene distintas definiciones, de forma que, lo que era una definición puede ser una propiedad deducible de otra.
2. Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, las dos diagonales y las dos mediatrices de sus lados.
3. Relación entre las logitudes, ángulo que forman y punto en que se cortan dos diagonales de un cuadrilátero para determinar de cuál se trata.
4. Los cuadriláteros se pueden clasificar por el paralelismo de sus lados o sus longitudes y la amplitud de sus ángulos interiores.

El desarrollo de estas cuatro ideas conecta aspectos de la Actividad Matemática, como definir (1 y 3), manipular (2 y 3), restringir y extender (1 y 4), con las matemáticas de secundaria, haciendo referencia a los estándares: clasificación de figuras planas y resolver problemas geométricos utilizando herramientas tecnológicas.

CONCLUSIONES

Tal y como se ha evidenciado en diversas investigaciones, el uso de GeoGebra en la resolución de problemas hace emerger una amplia variedad de discusiones matemáticas entre los participantes, estudiantes y profesores (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009; Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno, 2015) que de alguna manera permiten profundizar en la comprensión de los conceptos matemáticos que subyacen a la propia actividad de resolución de problemas haciendo uso de herramientas de los SGD. Incidir en la necesidad de hacer construcciones que contengan implícitamente las propiedades matemáticas enunciadas, para luego explorar propiedades, permite conjeturar resultados que obligan a plantear preguntas. Al aflorar estos cuestionamientos, los estudiantes se ven motivados a buscar respuestas y ello les lleva a profundizar en la comprensión de los conceptos matemáticos implicados (Hernández et al., 2017). Este quehacer matemático mostrado a la hora de resolver problemas de matemáticas bien elegidos, cuando está presente la tecnología, es un elemento importante para mejorar la comprensión de muchas propiedades y resultados contenidos en las matemáticas de la Educación Secundaria.

Durante la resolución de problemas usando la tecnología, surgen situaciones que provocan dudas, discusiones e interés en los resolutores. Del análisis de estos momentos surge una oportunidad para proponer actividades para la formación de profesores de matemáticas. Zbiek y Blume (2015) argumentan que en un contexto de formación de futuros profesores, desarrollar Situaciones es una oportunidad para pensar en el contenido de los currículos de Educación Secundaria. Nosotros tomamos esa idea para el desarrollo de actividades que toman como punto de partida eventos relacionados con el uso de GeoGebra. Actividades que generan oportunidades para pensar paralelamente en los contenidos del curriculum y en las ideas matemáticas explorables con SGD, y para conectar ambas. Consideramos que este tipo de actividades deben formar parte de la formación inicial de profesores de matemáticas, ya que permite el desarrollo de su comprensión matemática cuando se trabaja cada idea matemática en relación con aspectos como conjeturar, definir, demostrar y representar.

En este capítulo, como resultado de nuestro trabajo de investigación, proponemos tres situaciones (Trazar un ángulo, Triángulo de altura constante y Distancia desde la diagonal) que pueden motivar una discusión matemática guiada por la comprensión de las matemáticas necesaria para un futuro profesor de Educación Secundaria. Además, nuestras propuestas están pensadas para hacer frente a situaciones que surgen al usar la tecnología en la resolución de problemas, de esta manera contribuyen a desarrollar la comprensión matemática de estudiantes de matemáticas que se orientan hacia la docencia en la Educación Secundaria, en un escenario donde interviene la tecnología.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido cofinanciado por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional del MICINN con Referencia EDU2017-84276-R.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Make It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Camacho-Machín, M., Afonso, M. C. y Moreno, M. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de

Software de Geometría Dinámica. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* 11, 81-104.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Hernández, A. Perdomo-Díaz, J. y Camacho-Machín (2017). Comprensión matemática para la enseñanza secundaria en estudiantes de Grado en matemáticas cuando resuelven un problema con GeoGebra. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,*12, 49-68.

Heid, M., Wilson, P. S. y Blume, G. W. (Eds.). (2015). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations.* United States of America: NCTM and IAP.

Kilpatrick, J. (2015). Background for the Mathematical Understanding Framework. In M. K. Heid, P. Wilson, y G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 1-8). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Santos-Trigo, M., y Camacho-Machín, M. (2009). Towards the Construction of a Framework to Deal with Routine Problems to Foster Mathematical Inquiry. *PRIMUS*, *19*(3), 260-279.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. y Ortega-Moreno, F. (2015). Fostering and supporting the cordinated use of digital technologies in mathematics learning. *International Journal Learning Technology (*Vol. 10, pp. 251-270). Inderscience Enterprises Ltd.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Wilson, P. y Zbiek, R. M. (2015). Development of Practice-Based Situations. In M. K. Heid, P. Wilson, y G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 31-39). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Zbiek, R. M. y Blume, G. (2015). Creating New Situations as Inquiry. In M. K. Heid, P. Wilson, y G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 57-64). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

AFECTO Y CONOCIMIENTO PROFESIONAL DOCENTE EN MATEMÁTICAS

AFFECT AND PROFESSIONAL TEACHING KNOWLEDGE IN MATHEMATICS

Gómez-Chacón, I.M.[1], Marbán, J.M.[2]

[1]*Universidad Complutense de Madrid,* [2]*Universidad de Valladolid*

RESUMEN

El conocimiento del docente sobre los aspectos afectivos en el aula de matemáticas está conectado con varias componentes de su propio conocimiento y desarrollo profesional. En este capítulo nuestro objetivo es presentar, apoyándonos en dos trabajos de investigación realizados por los autores y algunos de sus colaboradores, elementos clave de esta conexión, con especial atención a las actitudes hacia las matemáticas y hacia la docencia de las matemáticas. En el primer trabajo se presentan vínculos relevantes de la interacción cognición y afecto respecto a la disciplina con el conocimiento y formación que requiere un profesor, estableciéndose en el segundo de los estudios un modelo predictivo de las actitudes del profesorado de Primaria en formación inicial hacia la docencia de las matemáticas en una doble vertiente de gusto por su docencia y de actitudes hacia su componente didáctica.

Palabras clave: *actitudes, conocimiento profesional, docente, dominio afectivo, matemáticas.*

ABSTRACT

Teacher's knowledge on affects in the mathematics classroom is linked to several components of their own professional knowledge and development. The aim of this chapter

Gómez-Chacón, I.M. y Marbán, J.M. (2019). Afecto y conocimiento profesional docente en matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 397-416). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

is to present key elements of such a connection, with a special focus on attitudes towards mathematics and the teaching of mathematics, results all of them supported by research carried out by the authors and some of their collaborators. First, relevant links of the interaction between cognition and affect with respect to the discipline with the knowledge and training required by a maths teacher are explored. Then a predictive model of the attitudes of pre-service primary school maths teachers is presented in terms of both the liking for the teaching of mathematics and the attitudes towards its didactic component.

Keywords: *affective domain, attitudes, mathematics, professional knowledge, teaching.*

1. INTRODUCCIÓN

En las tres últimas décadas, la creciente atención prestada a la dimensión afectiva en educación matemática ha situado el estudio de los afectos en matemáticas en una posición de relevancia para la investigación en este campo y, en particular, en el ámbito del desarrollo profesional docente, focalizando su atención tanto en los docentes en formación inicial como en los docentes en ejercicio.

Este interés obedece, entre otras cuestiones, a la aceptación de que, en situaciones escolares, una comprensión profunda de las matemáticas es más que una sólida comprensión conceptual de la matemática elemental, es la conciencia de la estructura conceptual y las actitudes básicas de la matemática inherentes a ella. Los profesores necesitan un conocimiento profundo de su materia, pero también un amplio conocimiento pedagógico y el desarrollo de un sólido conocimiento pedagógico del contenido (PCK) (Ball, Thames y Phelps, 2010). Varios investigadores afirman que el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y los factores afectivos están estrechamente relacionados y tienen una fuerte influencia en la práctica profesional de los docentes (Tsamir y Tirosh, 2009; Gómez-Chacón, 2012 y 2018). En esta línea, situar en un marco afectivo los programas de desarrollo profesional requiere la exploración de vínculos, de una parte, de interacción entre cognición y afecto respecto a la disciplina referidos a la naturaleza de la matemática y al contenido matemático y, por otra parte, entre la identidad del profesor y el afecto y la práctica de este en el aula de matemáticas.

En este capítulo hemos tomado las actitudes como elemento nuclear del dominio afectivo. La reflexión sobre la exploración de vínculos entre la interacción cognición y afecto respecto a la disciplina con el conocimiento y formación que requiere un profesor se realizará a través del primer estudio, referido este a vínculos entre el descriptor actitudinal y a los aspectos epistémicos en matemáticas, considerando resultados de una investigación realizada con estudiantes de secundaria y bachillerato. En cuanto a los aspectos ligados al afecto del profesor, estos se abordan en el segundo estudio, centrado en esta ocasión en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria y en el que se presenta un modelo predictivo de las actitudes hacia la docencia de las matemáticas en una doble vertiente de gusto por su docencia y de actitudes hacia su componente didáctica.

2. LA DIMENSIÓN ACTITUDINAL: CUESTIONES COGNITIVAS Y EPISTÉMICAS

Resulta fácilmente constatable la existencia de un rango muy variable de investigaciones con aproximaciones conceptuales diferentes en el acercamiento al estudio de las actitudes. En este capítulo, a través de los resultados presentados en el Estudio 1, hay dos aspectos que queremos poner de relieve en relación con el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas, a saber:

- Cuestiones conceptuales referidas al concepto de actitud.
- Cuestiones epistemológicas del conocimiento matemático que afectan a la forma de evaluar las actitudes.

Consideramos que la distinción entre estos aspectos específicos proporciona información más detallada sobre algunos de los contenidos del conocimiento profesional del profesor de matemáticas a trabajar, en particular y de manera significativa, sobre los vínculos en el concepto de actitud entre la naturaleza del conocimiento matemático y los conocimientos pedagógicos.

2.1. Conceptualización: actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas

La experiencia matemática es algo complejo que debe ser entendido desde el punto de vista tanto cognitivo como afectivo. Para el desarrollo profesional del profesorado es clave comprender los desafíos del trabajo matemático en el entorno escolar referidos a la interacción que se produce entre la cognición y el afecto. Consideramos esencial comprender la naturaleza epistemológica y cognitiva de esta interacción. Para adentrarnos en el análisis de esta interacción vamos a dar prioridad a uno de los descriptores del dominio afectivo: las actitudes en el aprendizaje matemático.

Cuando un profesor califica que un estudiante tiene una actitud positiva en matemáticas, ¿qué se está calificando? La definición de actitud positiva o negativa hacia las matemáticas depende claramente de la definición de la actitud en sí misma.

Tradicionalmente se han trabajado dos categorías de actitud: las actitudes hacia las matemáticas (cuando el objeto de la actitud es la Matemática misma) y las actitudes matemáticas (donde el objeto de la actitud son los procesos y las actividades matemáticas, es decir, la epistemología científica). Si bien las actitudes hacia las matemáticas se han estudiado durante largo tiempo, el estudio de las actitudes matemáticas se ha desarrollado en menos investigaciones (Gómez-Chacón, 2011 y Gómez-Chacón, Romero y García, 2016).

Se podría afirmar que la tendencia en los estudios sobre actitudes hacia las matemáticas ha sido el uso de cuestionarios para su evaluación, formulados desde la perspectiva de una definición multidimensional de actitud (cognitiva, afectiva y conductual) (Hart, 1989; Hernández y Gómez-Chacón, 1997; Di Martino y Zan, 2010). Desde este punto de vista, la actitud hacia las matemáticas se define como una forma articulada por las emociones que el sujeto asocia con las matemáticas (positivas o negativas), por las creencias que tiene sobre las matemáticas y por el comportamiento con el que actúa (Hart, 1989). De acuerdo con esto, una actitud negativa no solo está caracterizada por una disposición negativa emocional («no me gustan las matemáticas»), sino también por una epistemología incorrecta de la disciplina (es decir, una visión de la disciplina que no es compartida por los expertos). Ahora bien, aunque se ha indicado que se hacía uso de esta definición, los estudios han tenido en cuenta, como principales dimensiones respecto a la influencia en el aprendizaje, aspectos emocionales como la confianza y la motivación matemática y no tanto los aspectos cognitivos.

Igualmente, las actitudes matemáticas que se consideran marcadamente cognitivas y se refieren a cómo se despliegan aptitudes generales como el pensamiento flexible, la perseverancia, la apertura mental, el espíritu crítico, la precisión y el rigor, la objetividad, la confianza y la independencia, dada su importancia en el trabajo matemático, han sido menos trabajadas. Quizás una de las razones para esta escasez de estudios es que esta manera de categorizar las actitudes requiere del establecimiento de taxonomías para clasificar todos los objetos potenciales de las actitudes relacionadas con las matemáticas. Eso, a su vez, requiere la construcción de argumentos más amplios para la conexión entre la cognición y el comportamiento actitudinal y de una fuerte base epistemológica del saber matemático (Gómez-Chacón, Romero, y García, 2016).

Hacemos notar que utilizamos el término *cognitiva* en un amplio sentido. Por un lado, se refiere al uso de los procesos de valoración cognitiva y, por otro, a la caracterización de los significados personales de los sujetos acerca de la dimensión cognitiva de la heurística de resolución de problemas matemáticos y procesos de pensamiento matemático. En el Estudio 1 nos centraremos en las actitudes hacia las matemáticas, poniendo de relieve esta componente cognitiva y epistémica de la actitud tanto en su aspecto conceptual como en los instrumentos de evaluación.

2.2. Componente epistémica: el conocimiento como deseo

Plantear esta componente al estudiar las actitudes es considerar como acepción del término epistémica lo que hace referencia al conocimiento y los procesos de conocer. Esta componte ha sido más estudiada referida a emociones y creencias epistémicas. Una emoción es epistémica solo si su objeto formal es un valor epistémico (p.e. Gómez-Chacón, 2017). En la intencionalidad de las emociones se considera una naturaleza más compleja que la que caracteriza a las creencias o percepciones. Las emociones parecen estar dirigidas hacia dos objetos distintos: un objeto propio (o material) y un objeto formal. Cuando Javier tiene miedo a las matemáticas, su temor no solo se dirige hacia un objeto material, las matemáticas. También está dirigido hacia un objeto formal, la dificultad del conocimiento matemático. Lo importante a tener en cuenta en este punto es que la dificultad del conocimiento matemático, es decir, el objeto formal del miedo de Javier, no es una propiedad natural. El objeto formal del miedo de Javier es una propiedad de valor y esto es así para las emociones en general: los objetos formales de las emociones son propiedades de valor. En el caso que se describe se focalizará este objeto formal de valor a través de la explicitación de la visión epistémica de las matemáticas expresada como emoción epistémica. Según esto, el miedo a las matemáticas estaría dirigido a la ausencia de conocimiento y al valor epistémico atribuido al conocimiento matemático. De acuerdo con este aspecto, se considera que los estados afectivos se dirigen hacia propiedades de valor final y no solo instrumentales.

3. DESARROLLO DE LOS ESTUDIOS

A continuación se presentan los dos estudios a los que se ha hecho referencia a lo largo del capítulo y en los que se abordan las actitudes en dos ámbitos y contextos distintos pero complementarios, con una estrecha conexión, tanto en términos de relevancia como de resultados, con conocimiento y desarrollo profesional docente.

3.1. Estudio 1: Actitudes hacia las matemáticas

Este primer estudio, tal y como se ha indicado en la Sección 2, desarrolla de forma operativa la conexión entre lo epistémico y lo cognitivo en la actitud. Consideramos que la reflexión sobre el comportamiento de estudiantes de secundaria y la identificación de patrones puede constituir un elemento de conocimiento profesional para contextos relacionados con la instrucción. El estudio, por otra parte, se basa en resultados de una investigación internacional sobre comparación de actitud hacia las matemáticas desarrollada con B. Pepin en el 2015[1], si bien puede decirse que comenzó en 2011 (Pepin, 2011) comparando a estudiantes de secundaria noruegos e ingleses, con la intención de comprobar qué actitud tienen frente a las matemáticas. En 2015 se amplió con la participación española de 983 alumnos (483 varones y 500 mujeres) (de 1º de Educación Secundaria Obligatoria –ESO– a 2º de Bachillerato) pertenecientes a tres centros educativos.

3.1.1. *Instrumentos y análisis de datos*

La información se recopiló mediante un cuestionario cualitativo (Pepin, 2011) que proporciona datos sobre tres dimensiones de las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas: disposición emocional frente a las matemáticas (expresado con las palabras «me gustan / no me gustan las matemáticas, porque ...»), percepción del éxito conseguido –o competencia percibida y creencia de autoeficacia– (expresado con los términos «Puedo / no puedo hacer matemáticas, porque ...») y visión de las matemáticas («las matemáticas son ...»), tres dimensiones que repetidamente han informado trabajos sobre actitudes (p.e. Di Martino y Zan, 2010). Al cuestionario original basado en narraciones biográficas respecto a estas tres dimensiones se le añadió una pregunta cerrada que exigía al participante responder a la cuestión: ¿Te gustan las matemáticas? Como respuesta los estudiantes debían elegir entre tres posibles respuestas: Sí, No o Indiferente.

Analizamos los datos sobre la base de la comprensión de la construcción de actitud (véase la sección 2.1), las posibles influencias sobre la actitud y utilizando un enfoque epistémico para obtener nuevos entendimientos sobre el concepto de actitud. Las principales preguntas abordadas son: (1) ¿Cómo perciben los estudiantes su aprendizaje de las matemáticas y cuáles son los aspectos de su actitud hacia las matemáticas más incidentes? (2) ¿Cuáles son las principales influencias que parecen moldear la actitud del alumno hacia las matemáticas? (3) ¿Cuáles son las similitudes y diferencias en las diferentes configuraciones, y cómo influye eso en nuestra comprensión de la construcción de la actitud?

El análisis se realizó con un enfoque específico de métodos mixtos. Así, primeramente se llevó a cabo un análisis cualitativo de análisis de contenido de los relatos biográficos del cuestionario, complementado después por un Análisis Estadístico Implicativo (SIA) de datos (Gras, Peter, Briand, y Philippé, 1997). Este último se

[1] Gómez-Chacón (2015) Proyecto de Investigación «Teachers' professional knowledge: aspects of affect and mathematical modeling processes» de la Universidad Complutense de Madrid en colaboración con la University of Agder y HIST University en Noruega (Ref. UCM-EEA NILS Science and Sustainability Program (ES07)(007-ABEL-IMI-2013).

efectuó para la determinación de patrones y el establecimiento de la estructura actitudinal que caracteriza al grupo. El análisis estadístico permite establecer reglas de asociación en un conjunto de datos, cruzando variables e individuos marcando las tendencias de conjuntos de propiedades usando una medida de carácter no lineal de tipo inferencial. Se trata de estadística no simétrica y el conocimiento se forma inductivamente a partir de encontrar un número de éxitos que aseguran un cierto nivel de confianza en cierta regla. Estamos interesados en analizar si los sujetos presentan una tendencia a cumplir la «b» cuando sabemos que cumplen la «a». Es un método que busca producir reglas de asociación que sean lo suficientemente fiables como para conjeturar relaciones causales que estructuren la población. A nivel descriptivo permiten detectar una cierta estabilidad en la estructuración y a nivel predictivo permiten hacer suposiciones.

Grass define tres reglas que pueden ser importante en el aprendizaje: 1) a → b, donde a y b pueden ser categorías o reglas, 2) a → (b → c) y 3) (a → b) → (c → d). Para la obtención de esta estructura se utilizó el programa Clasification Hiérarchique et Cohesitive (CHIC) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). El resultado se presenta mediante tres tipos de diagramas que contienen diferentes tipos de información: a) Los árboles de similitud agrupan las variables en función de su uniformidad, lo que permite la interpretación de las agrupaciones con las que se manejan las variables; cada nivel en el gráfico resultante contiene grupos dispuestos en orden descendente de similitud. b) Los árboles cohesitivos que se utilizan para interpretar clases de variables definidas en términos de niveles significativos a lo largo de las líneas de similitud, identificando reglas de asociación y niveles de cohesión entre variables o clases. c) Los gráficos de implicación se construyen alrededor de un índice de intensidad y un índice de validez para mostrar asociaciones entre implicaciones que son significativas en niveles específicos. Este procedimiento comienza con un grupo de individuos (los 983 sujetos) descritos por un conjunto finito de variables binarias asociadas a las tres categorías principales: disposición emocional, percepción de competencia y visión de matemáticas.

3.1.2. *Resultados*

3.1.2.1. Descripción global: disposición emocional y competencia percibida

De los 983 alumnos, el 47.3% indicaron que les gustan las matemáticas y el 21.3% que no les gusta. Se observó que había un porcentaje significativo cuya respuesta fue la de la indiferencia (31.1%).

El porcentaje de alumnos que dijeron que les gustaban las matemáticas varió de 64.3% en 1º de ESO a 44.1% en 2º de ESO, el 46.4% en 3º de ESO y el 42.2 % en 4º de ESO. Es decir, los intereses de los alumnos en matemáticas disminuyeron entre los 12 y los 15 años y el porcentaje aumentó después de los 15 años.

Se observa la variación en 3º de ESO. El porcentaje aumenta claramente después de los 16 años: 48.2% en 11º y 57.8% en 2º de Bachillerato (hacemos notar que eran alumnos de la rama científica, por lo que cursan la opción de matemáticas).

El porcentaje de alumnos que dijeron tener la capacidad de hacer matemáticas es altamente significativo, variando del 62.7% en 2º de Bachillerato al 81.9% de 2º de ESO (78.6% en 1º de ESO, 78.3% en 3º de ESO, 71.7% en 4º de ESO y 71% en 1º de Bachillerato).

Sin embargo, si comparamos estos aspectos por centros observamos que la tendencia no es uniforme. Algunas de estas variaciones pueden atribuirse a proyectos educativos y a los contextos culturales diferentes. En la Tabla 1 resumimos el porcentaje relativo a las matemáticas *Me gusta / No Me Gusta* por Grados y centro educativo.

Tabla 1: Porcentaje relativo a «Me gusta» por Grado y Centro educativo

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º Bach	2º Bach
Centro 1	-	52.5%	48.5%	46.5%	60.2%	77.8%
Centro 2	-	40.5%	40.7%	41.1%	-	-
Centro 3	64.3%	41.7%	58.1%	32.4%	25.9%	55.4%

En la Tabla 2, el Porcentaje relativo a *Yo puedo hacer matemáticas* por Grado y Centro.

Tabla 2: Porcentaje relativo a «Puedo» por Grado y Centro educativo

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º Bach	2º Bach
Centro 1	-	74.6%	63.4%	65.7%	75.9%	100%
Centro 2	-	87.6%	91.9%	75.6%	-	-
Centro 3	78.6%	75.6%	74.4%	79.4%	62.1%	58.1%

3.1.2.2. Patrones cognitivos y epistémicos de la actitud

Pasamos seguidamente a la identificación de patrones cognitivos y epistémicos de la actitud tomando en cuenta cada una de las dimensiones del cuestionario.

«Me gusta / disgusta» y «Puedo / No puedo hacerlo»

En la mayor parte de los relatos en los que las dimensiones «Me gusta / disgusta» y «Puedo / No puedo hacerlo» están conectadas, esta conexión es «Me gusta porque puedo hacerlo» y «No me gusta porque no puedo hacerlo». En algunos casos excepcionales, encontramos las combinaciones «me gusta aunque no puedo» y «puedo hacerlo pero me disgusta». El «no gusto» por las matemáticas aparece claramente vinculado a que tienen una visión de las matemáticas como un conocimiento desconectado de la realidad y como un conocimiento que les produce aburrimiento y frustración. Esta visión también aparece en el grupo que ha señalado sentir indiferencia. En la Fig. 1 y en la Fig. 2 se muestran las relaciones causales significativas, con un índice de fiabilidad de al menos el 85% del análisis implicativo.

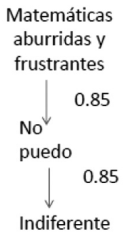


Fig. 1. Asociaciones respuesta indiferente, creencia de autoeficacia y visión de la matemática

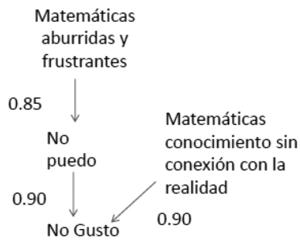


Fig. 2. Asociaciones respuesta no gusto, creencia de autoeficacia y visión de la matemática

«Puedo / no puedo hacerlo»

Desde una perspectiva educativa y teórica, el resultado más interesante de la lectura de los relatos es que el éxito en matemáticas tiene muchos significados profundamente diferentes. En algunos ensayos, el éxito se identifica con el éxito escolar, es decir, con la obtención de buenas notas y, por lo tanto, depende del profesorado reconocer el éxito. En otros casos, el éxito se identifica con la comprensión. En este último caso, se constatan distintas acepciones: a veces la comprensión se usa con un significado instrumental y se identifica con el conocimiento de las reglas y la posibilidad de aplicarlas correctamente; en otros casos, aparece una comprensión de tipo relacional, que se refiere a la conciencia de por qué funcionan las reglas y cómo están unidas entre sí. En este caso entrar en profundidad de qué significaría una actitud positiva requeriría de una profundización en la componente a través de la identificación de las actitudes matemáticas que muestra el estudiante.

Cuando la percepción de *ser / no ser capaz* de tener éxito («Puedo / no puedo hacerlo») es el tema central del relato, a menudo el alumno habla sobre las razones que explican su éxito o fracaso explícitamente: estas son las denominadas atribuciones causales para el éxito y el fracaso. Estas atribuciones nos permiten con frecuencia reconocer no solo las creencias del alumno sobre sí mismo (creencias de autoeficacia), sino también su visión de las matemáticas, lo que requeriría un análisis de las metas de logro. En el grupo se da una amplia gama aunque con algunas tendencias en la visión de las matemáticas. Por ejemplo, atribuciones de éxito que se centran en el papel relevante desempeñado por la memoria sugieren una visión instrumental de las matemáticas, mientras que teorías del éxito que se centran en la necesidad de comprender lo que se está haciendo sugieren una visión relacional de las matemáticas.

«Me gusta / disgusta» y «Las matemáticas son...»

En este apartado, partiendo de la variable *Disposición emocional,* trataremos de identificar factores relativos a la dimensión epistémica que configura la actitud, cuya variable central es la *Visión de las matemáticas*. De los análisis cualitativos de los relatos referentes a la disposición emocional emergieron las siguientes categorías:

1. Relación de las matemáticas con su vida futura (vida laboral y relaciones de las matemáticas con la realidad).
2. Descripción de calificativos respecto a matemáticas (interesantes, duras pero con desafíos, aburridas y frustrantes, etc.)
3. Tipología de metodología en el desarrollo de la clase.
4. Papel del profesor.
5. Importancia de la familia e importancia de la base matemática.
6. Papel importante de los exámenes.
7. Creencias epistémicas sobre la naturaleza de las matemáticas.

Consideradas estas categorías como variables en el análisis implicativo se constataron relaciones causales significativas, con un índice de fiabilidad de al menos el 90%. (Fig. 3 y Fig. 4).

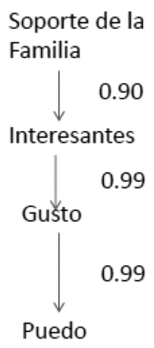


Fig. 3. Asociaciones disposición emocional y competencia de éxito

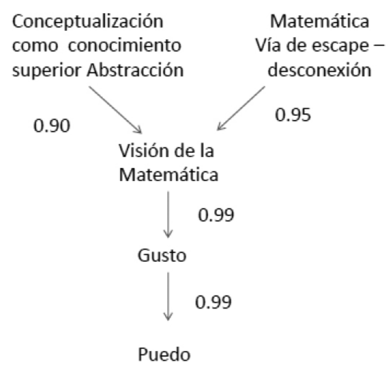
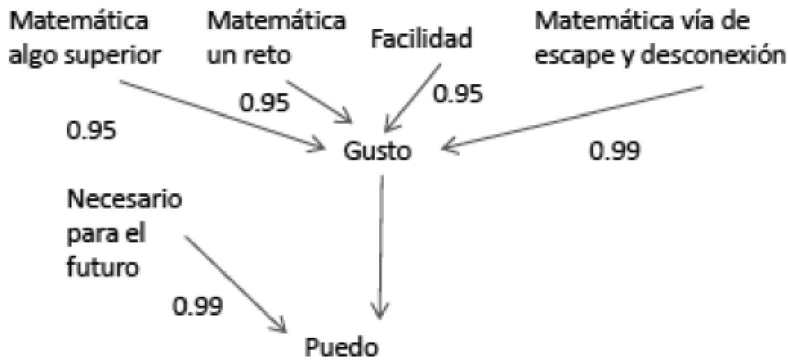


Fig. 4. Asociaciones competencia de éxito y visión de la matemática

Dos grupos de cohesión son significativos. Uno (Fig. 3) en el que los estudiantes, al expresar su disposición emocional y su competencia de éxito, consideran un contenido interesante y reconocen fuertemente el apoyo de su familia a la hora de hacer matemáticas. Y otro (Fig. 4) en el que el reconocimiento de su competencia está ligado a su visión de la Matemática y donde aparecen dos visiones diferenciadas: la de aquellos que tienen una concepción de la Matemática como «conocimiento abstracto» y lo categorizan como un «conocimiento superior» y la de quienes «utilizan las matemáticas y les gusta hacer matemáticas porque es una vía de escape» que les evade de la realidad.

Además, si tomamos como núcleo central del estudio «La Matemática es....», el análisis implicativo nos ofrece el árbol jerárquico de relaciones causales significativas, con un índice de fiabilidad de al menos el 95% (Fig. 5)

Fig. 5. Tendencia de visión de la Matemática



Estas variables específicas de creencias epistemológicas parecen estar ligadas al ambiente social y contexto educativo. Por ejemplo, uno de los centros educativos desempeña una fuerte preparación para competiciones y Matemática recreativa, lo que tiene más influencia en ver la Matemática como una vía de desconexión recreativa. También, las características específicas de la situación de los bachilleratos internacionales promueven el valor de la Matemática como conocimiento abstracto y superior.

3.2. Estudio 2: Actitudes hacia la docencia de las matemáticas

El objetivo principal de este segundo estudio[2] es el de poner a prueba un modelo predictivo de las actitudes hacia la docencia de las matemáticas de futuros maestros, en una doble vertiente de gusto por la docencia y de actitudes hacia su componente didáctica, tomando como variables predictoras el gusto por el conocimiento matemático, el agrado por esta materia, el autoconcepto matemático, la ansiedad hacia las matemáticas, la percepción de dificultad, la percepción de utilidad-valor de las matemáticas así como la percepción de rendimiento junto con el rendimiento académico obtenido en la última asignatura de matemáticas cursada, cuantificando sus pesos y su importancia estadística. Se aborda el estudio de una manera holística y multivariante, señalando su relevancia (su significatividad estadística) y su peso (su cuantía) en el pronóstico de las actitudes hacia la docencia.

3.2.1. *Participantes, instrumentos y análisis de datos*

El estudio se llevó a cabo con una muestra de 1444 alumnos de primeros cursos del Grado de Maestro en Educación Primaria de 10 campus universitarios públicos de España: Zaragoza (20%), Teruel (3%), A Coruña (7%), Palencia (10%), Valladolid (18%), Madrid (6%), Huesca (5%), La Rioja (7%), Segovia (13%) y Soria (11%). Estos alumnos no habían cursado en su formación universitaria asignatura alguna de matemáticas antes de la toma de datos. De ellos, el 34% eran hombres y el restante 66% mujeres. Para la selección de los participantes se partió de un tipo de muestreo no probabilístico por accesibilidad entre los estudiantes de las universidades participantes y siguiendo un diseño secuencial.

Los instrumentos principales utilizados en la recogida de datos consistieron en escalas convenientemente validadas y con buenas propiedades psicométricas. Como complemento a estas escalas se recopilaron datos relativos a la titulación, a la especialidad, a la nota obtenida en la última asignatura de matemáticas cursada y a la valoración de su propio rendimiento por parte de los estudiantes.

En la construcción de todas las escalas se siguió un procedimiento estándar. En una primera fase se procedió a la validación de contenido partiendo de la selección de cuestiones obtenidas de trabajos anteriores y sometiendo esta primera selección al juicio externo de expertos en Didáctica de la Matemática. Con los resultados se realizaron los primeros pre-test y el análisis de fiabilidad, cuyos valores fueron altos, no habiendo necesidad de eliminar ninguna de las preguntas preseleccionadas.

[2] Llevado a cabo junto con dos de los miembros del Grupo de Investigación Reconocido «Educación Matemática» de la Universidad de Valladolid, el Dr. Andrés Palacios Picos y la Dra. Ana Isabel Maroto Sáez.

En particular, la Escala de Actitudes hacia la Docencia de las Matemáticas (EADM), protagonista de este estudio, quedó conformada por 19 preguntas cuyo objetivo es medir las actitudes hacia una eventual docencia en matemáticas. En este caso, se realizó un Análisis Factorial de Componentes Principales de la escala que presentó índices de ajuste excelentes (KMO de 0,922 y Barlett significativo con p>0,00) y tres factores: (F1) *Rechazo hacia la docencia de las matemáticas*, (F2) *Actitudes favorables hacia la Didáctica de la Matemática* y (F3) *Gusto por la docencia de las matemáticas*.

Se procedió seguidamente a realizar un Análisis Factorial Confirmatorio (AFC) con los tres factores resultantes. Para su cálculo, se utilizaron las matrices de covariaciones y el algoritmo de cálculo de los mínimos cuadrados no ponderados, pues con dicha estrategia de cálculo se realizan estimaciones consistentes sin necesidad de asumir multi-normalidad de las variables (Ruiz, 2000). Los ajustes del modelo de tres factores fueron claramente inadecuados, pero no fue así cuando se contrastó la existencia de solo dos factores, uniendo el F1 y el F3 y dejando sin modificación el F2 (Tabla 3). Estos dos factores dieron lugar a la consideración de dos subescalas: Escala de Gusto por la Docencia de las Matemáticas (EGDM) y Escala de Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática (EADIM).

Tabla 3. Evaluación de la escala EADM mediante AFC de modelo bi-factorial

S-B(Chi-cuadrado) (gl) (p)	RMSEA	NFI	NNFI	CFI	AGFI	AIC
727.17(134)(p = 0.00)	.093	.94	.94	.95	0.84	869.17

En todas las escalas los ítems se responden según el grado de acuerdo con el enunciado en una métrica tipo Likert de cinco puntos (valores de 0 a 4). Este hecho permite considerar todas las preguntas como variables numéricas, ya que una variable ordinal puede tratarse como métrica cuando tenga cinco o más categorías. Todas las variables intervinientes en las ecuaciones de regresión múltiple cumplieron los requisitos para dicho análisis: la distribución de la variable dependiente era normal para cada valor de la variable independiente, la relación entre la variable dependiente y cada variable independiente era lineal y todas las observaciones resultaron independientes.

3.2.2. *Resultados*

Presentamos a continuación los dos modelos de regresión de las variables *Gusto por la docencia de las matemáticas* y *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática* (Tabla 4).

Tabla 4. Coeficientes de las ecuaciones de regresión múltiple

	Variables dependientes					
	Gusto por la docencia de las matemáticas			Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática		
	Coeficiente tipificado Beta	t	Sig.	Coeficiente tipificado Beta	t	Sig.
(Constante)		3.062	.002		-.844	.399
Actitudes hacia el conocimiento matemático	.133	3.449	.001	.137	2.726	.007
Agrado hacia las matemáticas	.309	6.557	.000	.111	1.752	.080
Ansiedad matemática	-.155	-2.839	.005	.193	2.704	.007
Autoconcepto matemático	.224	3.490	.001	-.194	-2.771	.006
Percepción de utilidad de las matemáticas	-.085	-2.545	.011	.381	9.334	.000
Percepción de dificultad de las matemáticas	-.013	-.267	.790	-.019	-.304	.761
Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática	.218	7.296	.000	-	-	-
Gusto por la docencia de las matemáticas	-	-	-	.370	7.296	.000
Última nota en matemáticas	.052	1.913	.056	-.025	-.700	.484
Por lo general, mi rendimiento en matemáticas ha sido …	-.054	-1.664	.097	.096	2.275	.023
	R=.818; R2=.67; ET= 1.145			R=.662; R2=.44; ET= 1.519		
	F =135.914		sig: .000	F = 52.501		sig: .000

El modelo predictivo del *Gusto por la docencia de las matemáticas* explica un porcentaje muy elevado –68%– de la varianza total de las *Actitudes hacia la docencia de las matemáticas*. En él intervienen como variables predictoras significativas estadísticamente la *Ansiedad hacia las matemáticas*, el *Autoconcepto matemático*, el *Agrado hacia las matemáticas*, las *Actitudes hacia el conocimiento matemático* y la *Actitud hacia la Didáctica de la Matemática*.

Por otra parte, el modelo predictivo de las *Actitudes hacia la Didáctica de las Matemáticas* explica el 44% de dichas actitudes. Ahora, encontramos pesos significativos en las *Actitudes hacia el conocimiento matemático*, la *Ansiedad matemática*, el *Autoconcepto matemático*, la *Percepción de utilidad de las matemáticas* y el *Gusto por la docencia de las matemáticas*.

Como vemos, existen variables comunes en ambos modelos con pesos significativos, pero también importantes diferencias. De entre las variables con valores no significativos en ambos modelos encontramos la *Percepción de dificultad de las matemáticas*, la *Calificación en matemáticas* o la *Percepción de rendimiento*. Las *Actitudes hacia el conocimiento matemático* están presentes en los dos modelos predictivos con relaciones directas: el gusto por aprender contenidos matemáticos influye de manera positiva en el deseo de impartir docencia en matemáticas y en el acercamiento a su didáctica.

El *Agrado hacia las matemáticas* está presente únicamente en el modelo predictivo del *Gusto por la docencia de las matemáticas* con el mayor peso de todas las variables del modelo. Por el contrario, la *Percepción de utilidad de las matemáticas* no afecta al gusto por su docencia, pero sí a las actitudes hacia su didáctica. El mayor peso en la explicación de las *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática* proviene de esta percepción de utilidad. En otras palabras, percibir las matemáticas como útiles no determina deseos de enseñarlas, pero sí de acercarse a su didáctica.

Los valores de las escalas de *Ansiedad matemática* y *Autoconcepto matemático* están presentes en los dos modelos con pesos significativos pero con signos contrarios. Así, mientras la *Ansiedad matemática* correlaciona con el *Gusto por la docencia de las matemáticas* de manera inversa, lo hace de manera directa cuando intentamos predecir las *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática*. Por su parte, los estudiantes con un *Autoconcepto matemático* elevado tienen una actitud positiva hacia el conocimiento matemático, pero no tienen actitudes positivas hacia su didáctica. De hecho, cuanto mayor es la percepción de competencia matemática (se consideran mejores alumnos de matemáticas), más desfavorables son sus actitudes hacia la didáctica de esta materia. En sentido contrario, los alumnos con bajo autoconcepto matemático tienen actitudes muy positivas hacia el estudio de la Didáctica de la Matemática.

4. CONCLUSIONES

Las aportaciones de los dos estudios presentados permiten extraer conclusiones relevantes en relación con los objetivos inicialmente planteados en el terreno del desarrollo profesional docente, en términos de los conocimientos referidos a elementos afectivos del aprendizaje. Poseer este conocimiento es un requisito previo para mostrar la conciencia relacionada con el mismo, y la forma en que los profesores muestran dicha conciencia permite observar también la elaboración del conocimiento profesional correspondiente. Así, los resultados del primer estudio sugieren que para una descripción de la actitud del alumno hacia las matemáticas no es suficiente resaltar su disposición emocional (positiva / negativa) hacia la disciplina sino que es necesario señalar con qué visión de las matemáticas y, a su vez, qué creencias de autoeficacia están asociadas a esta disposición emocional.

En el conocimiento de un profesor de secundaria el establecimiento de relaciones con constructos teóricos como el presentado sobre actitud (en las sec.2 y 3.1) permitiría el cuestionamiento de su actuación en situaciones de enseñanza. Si partimos de la definición de actitud más compleja presentada (sec.2), surge un problema acerca de lo que debería significar una actitud positiva o negativa. Referirse únicamente a la componente emocional parece tener limitaciones desde una perspectiva tanto teórica como educativa: esto nos llevaría a definir como positiva la actitud de un alumno que ve las matemáticas como una disciplina hecha de reglas para memorizar y aplicar rígidamente, solo porque le gusta el tema en sí mismo. Y además, se correría el riesgo de no desarrollar las actitudes matemáticas en su formación, donde el objeto de la actitud son los procesos matemáticos, la epistemología científica.

Es interesante reseñar que en las variaciones según niveles en las respuestas «al gusto por las matemáticas» de 1º ESO y 2º de ESO se produce una estabilidad que disminuyó en 3º de ESO y aumentó nuevamente en Bachillerato. Los comentarios de los alumnos sugieren que están dispuestos a trabajar en matemáticas a fin de obtener buenas calificaciones, lo que a su vez les daría más oportunidades en su vida futura (las metas de logro tienen un gran peso). Por lo tanto, el «valor de cambio» de las matemáticas en la sociedad y en los sistema de evaluación y reconocimiento social parece tener fuerte influencia en la actitud de los alumnos hacia las matemáticas.

En términos teóricos, resumiendo, el desarrollo profesional que evidencia el Estudio 1 es el aumento de conciencia sobre cómo evaluar las actitudes y qué contenidos matemáticos enseñar, para qué y cómo para el desarrollo de los vínculos entre cognición y afecto. En la actitud hacia las matemáticas tienen una gran influencia las metas establecidas (ambiciones de trabajo y oportunidades para cumplir estos), cómo se presentan y se «hacen» las matemáticas (epistemología del conocimiento), la práctica pedagógica del profesor en la articulación entre lo cognitivo y epistémico y el ambiente de apoyo fuera del centro escolar.

El segundo de los estudios, por su parte, permite extraer también conclusiones sobre el papel de las actitudes, en este caso en relación con la docencia de las matemáticas y en el contexto de la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.

Con respecto al primer elemento o componente de las *Actitudes hacia la docencia de las matemáticas*, el *Gusto por la docencia de las matemáticas*, cuatro variables actuarían de manera directa en su predicción: el agrado-gusto por las matemáticas, las actitudes hacia su conocimiento, el autoconcepto matemático y las actitudes hacia la Didáctica de la Matemática. El gusto por las matemáticas es un excelente antecedente de las ganas por su enseñanza: el estudiante que disfruta estudiando matemáticas, o que desea aprender matemáticas, manifiesta también excelentes actitudes hacia su enseñanza, lo que ratificaría los resultados de Kim y Hodges (2012). El autoconcepto matemático presenta también una relación directa con el gusto por la docencia; como hemos tenido ocasión de señalar, este resultado es congruente con los obtenidos por Bates, Latham y Kim (2011) y Gómez-Chacón (2012). La ansiedad matemática, por su parte, pronostica escaso o nulo gusto por enseñar matemáticas, resultado que va en la misma línea que lo obtenido en varias investigaciones al respecto (Klinger, 2011; Bursal y Paznokas, 2006). Por otro lado, no tienen incidencia alguna sobre este gusto por la enseñanza de las matemáticas ni el rendimiento alcanzado en los últimos años ni la percepción subjetiva de este rendimiento, datos que confirmarían los resultados obtenidos por White, Perry, Way y Southwell (2006).

En relación con el segundo componente de las *Actitudes hacia la docencia de las matemáticas*, las *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática*, volvemos a encontrar cuatro variables que actuarían como excelentes predictores de estas actitudes de manera directa (percepción de utilidad, actitudes hacia la docencia de las matemáticas, gusto por las matemáticas y ansiedad hacia las matemáticas) y una quinta que actuaría también como buen predictor, pero de manera inversa (autoconcepto matemático). La presencia en el modelo de la percepción de utilidad de las matemáticas es congruente con las tesis de Khezri et al. (2010), quienes mantienen que son los alumnos con más altas percepciones de utilidad los que tienen mejores actitudes hacia las matemáticas y su didáctica. Asimismo, son congruentes con los resultados aportados por Blanco et al. (2010), quienes obtienen una alta correlación entre la percepción de utilidad de los futuros docentes y el deseo de estudiar Didáctica de la Matemática. Como en la predicción del *Gusto por la docencia de las matemáticas*, el gusto por las matemáticas pronostica unas buenas actitudes hacia el estudio de su didáctica.

Un dato significativo en este modelo es la influencia negativa que el autoconcepto matemático tiene sobre las actitudes hacia el estudio de su didáctica. En este sentido, aquellos sujetos con autoconcepto matemático elevado no abordarían con actitudes positivas la Didáctica de la Matemática. Por el contrario, aquellos que han llegado a la universidad con un bajo autoconcepto tendrían actitudes favorables hacia su estudio. Los primeros parecen partir de las viejas ideas de que un buen dominio de la materia es suficiente para su enseñanza, mientras que los segundos parecen ver en la Didáctica una oportunidad de salvación de sus lagunas y consideran de más valor formativo saber cómo enseñar matemáticas.

Por otra parte, los docentes en formación con niveles elevados de ansiedad matemática manifiestan actitudes positivas hacia el estudio de la Didáctica de la Matemática, mientras que aquellos con baja ansiedad reconocen actitudes menos positivas. Podemos considerar que los primeros verían en la Didáctica un buen antídoto contra el estrés y el miedo, situación que no encontramos en los segundos, que verían innecesario estudiar estos contenidos didácticos o incluso los percibirían como poco útiles para su futuro profesional. La Didáctica de la Matemática, desde esta perspectiva, puede ser un buen tratamiento contra la ansiedad matemática y sus consecuencias negativas. Además, parece ser una buena oportunidad para hacer ver a los buenos estudiantes en matemáticas y que no manifiestan ansiedad hacia esta materia que no basta con saber matemáticas para enseñar bien matemáticas.

La influencia mutua entre los dos componentes de las *Actitudes hacia la docencia de las matemáticas*, esto es, *Gusto por la docencia de las matemáticas* y *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática* es, como hemos indicado, grande. En cierto sentido, se mantiene como hecho constatable que aquellos que tienen actitudes positivas hacia la docencia de las matemáticas también las tienen hacia el estudio de su didáctica y viceversa. Las actitudes favorables hacia el estudio de las matemáticas son un buen predictor del gusto por su docencia, y la buena disposición a la docencia matemática predispone a una actitud favorable al estudio de su didáctica.

Tomando en su conjunto los datos relativos al *Gusto por la docencia de las matemáticas* y los de las *Actitudes hacia la Didáctica de la Matemática*, podemos considerar que los docentes en formación con buen autoconcepto matemático, bajos niveles de ansiedad, actitudes positivas hacia el conocimiento matemático, gusto por las matemáticas y actitudes positivas hacia el estudio de su didáctica representan el prototipo de buen docente potencial en matemáticas.

Nuestros datos, además, sugieren la existencia de otro tipo de docente en formación con buen rendimiento y autoconcepto matemático, con escasa ansiedad y gusto por las matemáticas y que no manifiesta actitudes positivas hacia el estudio de su didáctica. Se trata, seguramente, de estudiantes que opinan que una buena docencia en matemáticas solo necesita un amplio conocimiento matemático.

Podemos considerar un tercer tipo de estudiantes relevante formado por aquellos que no tienen un buen autoconcepto matemático, no sienten agrado por las matemáticas y presentan niveles elevados de ansiedad, pero que están interesados y tienen buena predisposición hacia el estudio de la Didáctica de la Matemática.

El papel que puede jugar la formación en Didáctica de la Matemática en estos tres tipos de docentes en formación es, a priori, positivo, pero diferente. En el primer caso, se trataría de mantener las ilusiones de los que quieren y saben. En el segundo, la tarea es la de convencer a los que saben o creen que saben para aprender a enseñar matemáticas. Pero es en el tercer grupo de alumnos donde más impacto, al menos afectivo, podría tener la formación en Didáctica de la Matemática, pues esta se percibe como un instrumento de superación de miedos y carencias heredadas de su formación matemática previa y de las experiencias asociadas a la misma, pudiendo la Didáctica de la Matemática actuar como facilitadora de actitudes positivas hacia la docencia en matemáticas.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2010). Content Knowledge for Teaching, *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bates, A. B., Latham, N., y Kim, J. A. (2011). Linking preservice teachers' mathematics Self-Efficacy and mathematics teaching efficacy to their mathematical performance. *School Science and Mathematics*, *111*(7), 325-333.

Blanco, L., Caballero, A, Piedehierro, A, Guerrero, E. y Gómez, R. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *29*(1), 13-31.

Bodin, A., Coutourier, R. y Gras, R. (2000). *CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows-CHIC 1.2*, ARDM-Rennes.

Boyd, W., Foster, A., Smith, J. y Boyd, W. E. (2014). Feeling Good about Teaching Mathematics: Addressing Anxiety amongst Pre-Service Teachers. *Creative Education, 5*, 207-217.

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 173-180. Doi:10.1111/j.1949-8594.2006.tb18073.x

Cardetti, F. y Truxaw, M. P. (2014). Toward improving the mathematics preparation of elementary preservice teachers. *School Science and Mathematics*, *114*(1), 1-9.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 27-48.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education* (Nordisk Matematikk Didaktikk), *17*(3-4), 57-74.

Gómez-Chacón, I. M. (2017). Emotions and heuristics: the state of perplexity in mathematics, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *49*, 323-338.

Gómez-Chacón, I. M. (2018). Promoting the mathematics teacher self-identity. Design heuristics for didactical materials. *Journal of Educational Sciences and Psych*ology, 8 (1) Vol. VIII - LXX - No. 1, 15-27.

Gómez-Chacón, I. M., Romero, I. M. y García, MM. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect, *ZDM-Mathematics Education*, *48*(6), 909-924.

Gómez-Chacón, I. Mª (2011). Mathematics attitudes in computerized environments. A proposal using GeoGebra. In L. Bu y R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 147–170). Rotterdam: Sense Publishers.

Gras, R., Peter, P., Briand, H. y Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis. In N. Hayashi, N. Ohsumi, Y. Yajima, H. Tanaka y Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). New York: Springer-Verlag.

Haciomeroglu, G. (2014). Elementary Pre-Service Teachers' Mathematics Anxiety and Mathematics Teaching Anxiety. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*. Recuperado de http://www.cimt.org.uk/journal/haciomeroglu.pdf

Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. En D.B.McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 37-45). N.Y.: Springer.

Hernández, R., y Gómez-Chacón, I. Mª (1997). Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio. *Revista de Didáctica de las matemáticas, UNO, Monográfico Actitudes y Matemáticas*, *13*, 41-61.

Khezri, H., Lavasania, M. G., Malahmadia, E. y Amania, J. (2010). The role of self- efficacy, task value, and achievement goals in predicting learning approaches and mathematics achievement. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *5*, 942-947. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.07.214

Kim, C. y Hodges, C. B. (2012). Effects of an emotion control treatment on academic emotions, motivation and achievement in an online mathematics course. *Instructional Science: An International Journal of the Learning Sciences*, *40*(1), 173-192.

Klassen, R. M. y Tze, V. (2014). Teachers' self-efficacy, personality, and teaching effectiveness: A meta-analysis. *Educational Research Review, 12*, 59-76.

Klinger, C. M. (2011). «Connectivism»-A New Paradigm for the Mathematics Anxiety Challenge? *Adults Learning Mathematics*, *6*(1), 7-19.

Pepin, B. (2011). Pupils' attitude towards mathematics: A comparative study of Norwegian and English secondary students. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *43*(4), 535-546.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (2009). Affect, subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: the case of a kindergarten teacher. In J. Maaß y W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New Research Results* (pp.19-32). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Ünlü, M. y Ertekin, E. (2013). The relationship between mathematics teaching self-efficacy and mathematics self-efficacy. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *106*, 3041-3045.

White. A.L., Perry, B., Way, J. y Sothwell, B (2006). Mathematical Attitudes, Beliefs and Achievement in Primary Pre-service Mathematics Teacher Education. *Mathematics Teacher Education and Development*, *7*, 33-52.

CONCEPCIONES DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA SOBRE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

SECONDARY SCHOOL TEACHERS' CONCEPTIONS OF MATHEMATICAL PROOF AND ITS TEACHING AND LEARNING

Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C., Ortega, T. y Pecharromán, C.
Universidad de Valladolid

RESUMEN

Uno de los procesos más importantes de las matemáticas es la demostración matemática y, por ello, tiene una gran relevancia en la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. En la Universidad de Valladolid se han realizado varias investigaciones en torno a la demostración matemática, tomando como referencia tanto a los alumnos, como a los libros de texto y al profesorado. Este capítulo se centra en una de ellas, sobre las concepciones de varios docentes de Educación Secundaria de España y Portugal acerca de la demostración en la matemática escolar y su enseñanza y aprendizaje. Se ha detectado una gran diversidad de perfiles en el profesorado en relación al rol y las funciones que asignan a la demostración en las aulas de Secundaria y a cómo conciben su enseñanza y aprendizaje, lo que sin duda afectará al modo en que aparecerá ésta en su práctica de aula habitual.

Palabras clave: *concepciones, demostración, profesorado, Educación Secundaria.*

Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2019). Concepciones del profesorado de educación secundaria sobre la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 417-438). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

One of the most important processes of mathematics is the mathematical proof and, therefore, it has a great relevance in the teaching and learning of this science. Several research studies have been carried out in the University of Valladolid about the mathematical proof, related to students, textbooks and teachers. This chapter focuses on one of them, which is about the conceptions about proof in school mathematics, and about its teaching and learning, in several Secondary School teachers from Spain and Portugal. A great diversity of teacher's profiles has been detected. There are several profiles related to the role and the functions that the teachers assigned to proof in Secondary classes, and, also, how they conceive the teaching and learning of mathematical proof. Undoubtedly, these different profiles will affect on how the proof will appear in those teachers' teaching and usual classroom practice.

Keywords: *conceptions, proof, teachers, Secondary School.*

INTRODUCCIÓN

Hay un común acuerdo en la comunidad científica internacional del campo de la educación matemática sobre la importancia y relevancia de la demostración matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Como afirman Hanna y Barbeau (2010), la demostración matemática es portadora de conocimientos matemáticos, ya que contiene los «métodos, herramientas, estrategias y conceptos que se necesitan para resolver problemas» (Rav, 1999, p. 6), y estos elementos suponen la esencia principal de las matemáticas.

Desde el último cuarto del siglo XX se han producido numerosas investigaciones sobre la demostración en el campo de la educación matemática. Algunas recopilaciones del conocimiento y avances obtenidos en esas investigaciones se han publicado en varios monográficos al respecto, que muestran la diversidad de líneas de trabajo en torno a la demostración matemática. En Mariotti (2006) se presenta una recopilación de estudios presentados durante 30 años en los congresos del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), organizándose la discusión en torno a tres temáticas: las demostraciones en la escuela, las dificultades de los estudiantes en torno a la demostración y las intervenciones de los profesores para resolver dichas dificultades. Hanna y de Villiers (2012) coordinaron el trabajo derivado del 19º Estudio de la *International Commission in Mathematical Instruction* (ICMI), centrado en la demostración y prueba en educación matemática. En esta contribución se consideraron seis temáticas de trabajos: demostración y cognición, oportunidades y desafíos de la experimentación, perspectivas históricas y educacionales de la demostración, la demostración en los currículos escolares, la argumentación y la transición a niveles de educación superior y lecciones sobre las tradiciones culturales orientales. Por su parte, Mariotti, Durand-Guerrier y Stylianides (2018) describieron los asuntos que han sido objeto de debate en las reuniones del grupo de Argumentación y prueba de los Congresos de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), clasificando las contribuciones en: asuntos históricos, epistemológicos y teóricos, el papel de la lógica en la argumentación y la prueba, la enseñanza de la demostración, y algunos asuntos emergentes, como el análisis de la demostración en los libros de texto. Por último, en el monográfico sobre la demostración del último Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-13 (Stylianides y Harel, 2018), se agrupan las investigaciones en: asuntos epistemológicos relacionados con la demostración, asuntos basados en las clases sobre la demostración, asuntos curriculares y cognitivos relacionados con la demostración, y asuntos relacionados con el uso de ejemplos en la demostración.

La comparación de los monográficos y sus temáticas permite detectar la amplia presencia de aspectos teóricos, epistemológicos y cognitivos asociados al aprendizaje de la demostración en los alumnos, y apreciar que ahora empieza a prestarse una mayor atención a otros temas, como los conocimientos y las concepciones que tienen los propios docentes de aspectos ligados a la demostración, su enseñanza y aprendizaje, así como al diseño y análisis de situaciones e intervenciones que traten de favorecer el aprendizaje de la demostración y superar las dificultades asociadas al mismo.

En la Universidad de Valladolid se han desarrollado un número importante de investigaciones en torno a la demostración matemática y a los procesos de enseñanza-aprendizaje asociados a ella, que también han aportado conocimiento relevante a esta área. En esta introducción se resumen varias de ellas para dar una mejor idea de la trayectoria del grupo, dedicándose el resto del capítulo a mostrar con más detalle una que está más directamente relacionada con el profesorado, uno de los focos de atención de este libro de la *RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores*.

La primera investigación realizada fue la de Ibañes y Ortega (1997), que hicieron una revisión de las formas de demostración que aparecen en los libros de texto de Bachillerato y Universidad. De ella surgió una clasificación atendiendo a diferentes aspectos. Uno de ellos es la estructura lógica del enunciado, de la que surge el tipo: en relación con la implicación, las demostraciones pueden ser «de condición necesaria», «de condición suficiente» y «de condición necesaria y suficiente»; y en relación al cuantificador existencial, una demostración puede ser de «no existencia», «de existencia simple», «de imposibilidad» y «de unicidad». Otro aspecto son los procedimientos lógicos utilizados en la demostración, que dan lugar al método y cuya casuística es la siguiente: silogismo, casos, reducción al absurdo, inducción completa, procedimiento constructivo (ejemplo o contraejemplo), analogía o dualidad. Del tercer aspecto, los procedimientos matemáticos, surge el estilo, que puede ser geométrico, algebraico, de las coordenadas, vectorial, del análisis matemático, probabilístico o topológico. Del cuarto y último aspecto, el procedimiento de exposición, surge el modo, que puede ser sintético (o directo) y analítico (o indirecto).

A esta investigación le siguieron otras relacionadas con la comprensión de la demostración matemática por alumnos de Bachillerato (como por ejemplo, Ibañes, 2001 o Ibañes y Ortega, 2001). Estos autores partieron de las funciones de la demostración descritas por de Villiers (1993, ver marco teórico) y del concepto de *esquema de prueba* de una persona propuesto por Harel y Sowder (1998), entendido como aquello que constituye convencimiento y persuasión sobre la validez del resultado para esa persona. Harel y Sowder (1998) propusieron una clasificación de esquemas de prueba, distinguiendo esquemas de convicción externa, basados en casos particulares o analíticos (entre los que se incluyen las verdaderas demostraciones). Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (2001) enriquecieron esa clasificación, distinguiendo diferentes casos de razonamientos inductivos (de un caso, de varios casos, sistemático…), y detectaron que la comprobación de un teorema en un ejemplo (esquema inductivo de un caso) era considerado por una buena parte de los alumnos como una auténtica demostración, opinión que no variaba cuando se les presentaba después una prueba axiomática del mismo enunciado, por lo que es una idea muy enraizada en ellos. La investigación anterior también permitió detectar que lo que los alumnos consideraban como demostración variaba según fuera el enunciado a justificar.

Así, se consideró necesario investigar si los alumnos de Bachillerato discriminaban las demostraciones matemáticas de otros procesos, es decir, si las distinguían e identifican cuando se presentan junto a otros procesos matemáticos, si son capaces de identificar el enunciado, y si conocen las posibilidades de aplicación de un resultado establecido mediante una demostración así como la imposibilidad de encontrar contraejemplos del mismo. Los principales resultados obtenidos (Ibañes y Ortega, 2003) indican que más de la cuarta parte de los alumnos no discriminaba una demostración de un ejemplo de un mismo enunciado, que muchos alumnos no identifican el enunciado de un resultado que se haya probado, que pocos alumnos consideraron que un teorema puede aplicarse directamente una vez que ya se ha demostrado y que casi la mitad de los alumnos pensaban que podría encontrarse un contraejemplo de un teorema demostrado. Además, se detectaron algunos problemas importantes relacionados con la identificación e implicación de una demostración matemática, así como con la identificación del enunciado y la comprensión del mismo, de lo que es la hipótesis y la tesis y del significado de «condición necesaria» o «condición suficiente». Todas estas dificultades de los alumnos pueden influir en las decisiones que toman los profesores a la hora de utilizar o no las demostraciones en sus clases, como se podrá observar en el trabajo sobre concepciones de los profesores sobre la demostración que se expone más adelante.

Posteriormente, González (2012) realizó una investigación doctoral en la que se buscó conocer las preferencias de estudiantes universitarios de ingeniería entre el uso de pruebas axiomáticas formales y de pruebas preformales en la docencia de algunos teoremas de Análisis Matemático. Las pruebas preformales, concebidas por van Asch (1993), son líneas de razonamiento que contienen la idea principal de una demostración formal y que pueden generalizarse a una prueba formal fácilmente. Se detectó que los alumnos consideraban que las pruebas formales eran de más ayuda para recordar los enunciados de los teoremas, pero preferían de forma mayoritaria las pruebas preformales al parecerles más sencillas, más claras, más concretas, más atractivas, más fáciles de comprender y más útiles para ilustrar las aplicaciones de los teoremas.

Otro grupo de investigaciones está ligada al análisis de la evolución de la demostración matemática en los libros de Bachillerato, desde la Ley General de Educación de 1970 hasta la Ley Orgánica de Educación (como por ejemplo, la descrita en Conejo, Arce y Ortega, 2015). En estos estudios se ha detectado una progresiva desaparición de la demostración matemática en dichos manuales, tendiendo a sustituir pruebas axiomáticas por esquemas de prueba de tipo inductivo. Además, también hay diferencias importantes en el modo de enunciar los teoremas, y en su orden de presentación, puesto que la ausencia de demostraciones provoca que surjan otros criterios de presentación diferentes de la sistematización axiomática de los mismos.

En este capítulo vamos a presentar una de las investigaciones sobre la demostración que está directamente ligada al profesorado (Dos Santos, 2010; Dos Santos y Ortega, 2013). Se trata de una investigación en la que han participado un grupo de profesores de matemáticas de Educación Secundaria, de España y de Portugal. En particular, los objetivos de investigación fijados para la parte que aquí se va a detallar son:

- Detectar cuáles son las concepciones que muestra el profesorado de matemáticas de Educación Secundaria sobre la demostración en la matemática escolar y sobre su enseñanza y aprendizaje.
- Identificar perfiles en el profesorado según estas concepciones en torno a diferentes temas de interés ligados a la demostración en el aula y a su enseñanza y aprendizaje.

LA DEMOSTRACIÓN Y EL PROFESORADO. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Estudiar el conocimiento, las concepciones o las creencias que tienen los profesores de matemáticas acerca de diversos temas relacionados con las matemáticas y con su enseñanza y aprendizaje son, en la actualidad, líneas de investigación a las que se dedica una atención creciente. No obstante, conocimiento, concepciones y creencias del profesorado no son constructos con un significado común para la comunidad investigadora en didáctica de la matemática (como ponen de manifiesto las revisiones que hacen Thompson, 1992; o Philipp, 2007), pudiendo considerarse bien como constructos equiparables, bien subsumidos unos en otros o bien de distinta naturaleza.

En nuestro caso, coincidimos con Thompson (1992) al indicar dos diferencias entre conocimientos y creencias: las creencias pueden tener diferentes grados de convicción en ellas (algo que no admiten los conocimientos) y los conocimientos tienen un grado de consenso que no tienen las creencias (puede admitirse la existencia de diferentes creencias que no pueden refutarse). No obstante, se acepta la existencia de una interrelación y entrelazamiento entre ellos, ya que el conocimiento del docente sobre algunos temas influirá en sus creencias y estas también impregnarán su conocimiento y el desarrollo de éste (Aguilar-González, Muñoz-Catalán, Carrillo-Yáñez y Rodríguez-Muñiz, 2018). Es sin duda interesante, desde un punto de vista teórico, plantearse qué conocimientos y qué creencias tiene un profesor de matemáticas y tratar de vislumbrar relaciones entre conocimientos y creencias, como hacen Aguilar-González et al. (2018), pero son varios los autores que plantean la dificultad y la falta de utilidad de mantener siempre esta distinción en la práctica por su complejidad (Knuth, 2002a, 2002b; Thompson, 1992).

Thompson (1992) propone el uso de otro constructo, el de *concepciones*, que, no obstante, también ha sido usado con significados diversos en investigaciones (Philipp, 2007). Aquí adoptaremos el significado de concepción de un docente que propone Thompson (1992, p. 130), como «estructura mental más general, que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y aspectos similares a estos» (traducción de los autores). Es decir, vemos las concepciones como un constructo algo más general que las creencias, que contiene a estas pero que también puede contener elementos de conocimiento en las estructuras mentales que un docente va construyendo sobre un determinado tema, sin que sea objeto de este estudio el llegar a determinar qué elementos de esos esquemas manifestados por los docentes provienen de un conocimiento y cuáles de creencias a partir de la naturaleza de la información recogida.

En este caso, las concepciones que se busca analizar en los docentes de Educación Secundaria participantes españoles y portugueses son las concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y sobre su proceso de enseñanza-aprendizaje. Como hemos indicado anteriormente, el estudio del conocimiento, las concepciones o las creencias de docentes sobre la demostración y su enseñanza-aprendizaje son líneas de investigación en las que no hay demasiados estudios, y menos aún con profesores en ejercicio. Sí que es cierto que algunos modelos de conocimiento del profesor de matemáticas, como el modelo MTSK de Carrillo et al. (2018), reconocen explícitamente la necesidad de que un docente conozca cómo demostrar, cómo enseñar a demostrar y cómo los alumnos aprenden las demostraciones y los procesos asociados a la misma. Además, destacados investigadores en educación matemática justifican que la demostración debe formar parte de cualquier currículo de matemáticas, ya que contribuye a la comprensión de los conceptos y a construir matemáticas conforme a los principios de esta ciencia (Hanna, 1995; Schoenfeld, 1994). Por tanto, estamos ante una línea de investigación altamente pertinente y necesaria.

Un número importante de los estudios en esta línea de investigación hacen uso, en su marco teórico, de las funciones de la demostración enunciadas por de Villiers (1993). Este autor distingue cinco funciones destacadas para la demostración matemática: *verificación*, pues demuestra la veracidad de una afirmación; *explicación*, pues profundiza en por qué es verdad una afirmación; *sistematización*, al organizar los resultados en un sistema de axiomas, definiciones y teoremas; *descubrimiento*, pues puede permitir encontrar otros resultados implícitos en el transcurso de una demostración o construir nuevas matemáticas; y *comunicación*, pues es el medio para comunicar y transmitir conocimiento matemático. En nuestro estudio también haremos uso de estas cinco funciones.

En cuanto a los estudios sobre conocimientos, creencias y concepciones de docentes sobre la demostración matemática escolar y su enseñanza y aprendizaje, en el panorama nacional señalamos a Vicario y Carillo (2005) y a Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva y Llinares (2010). En el primero se presenta un estudio de caso en el que se analizan las funciones que dos docentes de matemáticas de Secundaria en ejercicio atribuyen a cinco demostraciones diferentes sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Este análisis pone de manifiesto que, aunque reconocen la función explicativa en alguna de las demostraciones, demuestran ciertas lagunas de conocimiento en procesos asociados a la demostración matemática. Por su parte, Torregrosa-Gironés et al. (2010) realizan un estudio con 12 profesores sobre sus concepciones sobre la demostración matemática y las funciones que desempeñan, y clasificaron a los docentes participantes en tres categorías atendiendo a la función que resaltaron, a saber, convencer-comunicar, verificar y sistematizar. Además, se observa que el planteamiento en el profesorado de actividades de justificación los lleva a reflexionar sobre sus concepciones sobre la demostración y a identificar la importancia del trabajo con pruebas en el aula.

En el ámbito internacional destacamos los estudios de Knuth (2002a, 2002b) y de Kotelawala (2016), que versan sobre las concepciones, en el caso del primer autor, y sobre las actitudes y las creencias, en el caso de segundo, sobre la demostración matemática de profesores de enseñanza secundaria. Los trabajos de Knuth, que forman parte del mismo estudio, diferencian las concepciones de los profesores sobre la demostración matemática dentro de la propia disciplina matemática

(Knuth, 2002a) y las que tienen en el contexto de la educación secundaria (Knuth, 2002b). En ambos casos, el marco teórico de análisis de las respuestas de los profesores se deriva de las funciones de la demostración descritas anteriormente (de Villiers, 1993). En las conclusiones de ambos estudios se señala la influencia que tienen las concepciones de los profesores sobre la demostración en su enseñanza. Además, en Knuth (2002b) se defiende que las concepciones reveladas por los profesores hacen pensar que no estaban preparados para aplicar las reformas curriculares en las que se ha concedido una mayor importancia a la demostración, a través, por ejemplo, del planteamiento de actividades de prueba en las aulas y destinadas a todos los alumnos (y no sólo a unos pocos, como consideran muchos profesores). Por otro lado, de ambos trabajos se desprende también la necesidad de que los futuros profesores de enseñanza secundaria de matemáticas reciban una buena formación sobre la demostración tanto de los profesionales de la educación matemática, como de los profesores universitarios de matemáticas. Por último, Kotelawala (2016) analiza las actitudes y creencias de un grupo de 72 profesores de matemáticas de Secundaria en Estados Unidos, a través de un cuestionario. Este autor detectó que, aunque los profesores atribuyen un gran valor a la demostración en el aula, apenas plantean actividades asociadas a la demostración en sus clases en contraposición con tareas de aplicación de procedimientos. Así, esto parece mostrar que no consideran la demostración como un proceso a enseñar o, al menos, no le atribuyen el valor educativo que merece.

En nuestra investigación, además de hacer uso de las funciones de la demostración (de Villiers, 1993) y del concepto de esquema de prueba (Harel y Sowder, 1998; Ibañes y Ortega, 2001), también hubo en los cuestionarios de recogida de información ítems sobre diferentes aspectos ligados a la situación de la demostración en la matemática escolar y a sus procesos de enseñanza y aprendizaje, que posibiliten detectar las concepciones sobre estos temas manifestados por los docentes. Como indica van Asch (1993), en muchos casos los alumnos no se interesan por las demostraciones, y tampoco valoran cuál es su importancia, al desconocer su papel y consecuencias (Ibañes y Ortega, 2003). Esa contraposición entre el papel que asigna un docente a la demostración en matemáticas y la visión de ella que tienen los alumnos puede generar dilemas y tensiones en el profesorado, que vayan forjando en los docentes diferentes concepciones sobre la demostración en la matemática escolar.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Debido a la ausencia, hasta donde conocen los autores, de instrumentos para analizar las concepciones de un docente de matemáticas sobre la demostración en la matemática escolar, se ha optado por utilizar una metodología de investigación de diseño en el ámbito de la educación (Barab y Squire, 2004; Confrey, 2006). La aplicación de esta metodología persigue conocer e interpretar con mayor profundidad los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, buscando avanzar y aportar mejoras en estos procesos. Para ello, se diseñan y refinan los procedimientos seguidos, a través del análisis continuado de los procesos y de las respuestas obtenidas, con el propósito de aportar el máximo de información y de conocimiento sobre el tema de estudio.

En este caso, los procedimientos se basan en la recogida de datos a través de un instrumento específicamente creado para ello, como es un cuestionario sobre las concepciones de los docentes acerca de la demostración en la matemática escolar y su proceso de enseñanza-aprendizaje. Se han seguido tres fases en la aplicación de la metodología.

En la primera fase, y con un carácter fundamentalmente exploratorio, se diseñó un primer cuestionario *ad hoc* con 80 ítems que buscaba conocer las concepciones que tenían los docentes sobre el tema antes indicado. Este primer cuestionario puede consultarse en Dos Santos (2010). El cuestionario fue cumplimentado por un grupo de 20 docentes de Educación Secundaria portugueses (de la zona de Chaves), escogidos por disponibilidad, todos ellos con una amplia experiencia docente, de al menos 10 años, y con una proporción equilibrada entre hombres y mujeres.

El análisis de las respuestas dadas por los profesores al primer cuestionario permitió inferir la existencia de una diversidad de concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Para profundizar en la detección y caracterización de esas concepciones, el equipo investigador revisó pormenorizadamente las respuestas y los aspectos diferenciales emergentes para proponer un refinamiento y ampliación del cuestionario. La nueva versión del cuestionario fue sometida a un juicio de expertos compuesto tanto por profesores de Secundaria como por investigadores en Didáctica de la Matemática, tras lo cual se estableció el cuestionario definitivo con aquellos ítems validados por la mayoría de los expertos.

Esta versión final del cuestionario está compuesta por una primera parte sobre información profesional del docente (formación académica y experiencia como docente) y una serie de temas relacionados con la concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Cada tema estaba compuesto por ítems o grupos de ítems (ítems relacionados con un mismo encabezado común) con afirmaciones sobre las cuales los participantes tenían que expresar su grado de acuerdo a través de una escala Likert (con valores de 1 a 5, de «Nunca / Desacuerdo total» a «Siempre / Acuerdo total») o por otras cuestiones de respuesta abierta. En total, el cuestionario contiene 197 ítems con escala Likert y 15 cuestiones abiertas. El cuestionario completo puede encontrarse en Dos Santos

(2010). Mostramos a continuación los temas en los que se indagó cuáles eran las concepciones (en el sentido de Thompson, 1992) de los docentes, temas todos ellos relacionados con la demostración en la escuela y su enseñanza y aprendizaje. En cada tema se añade la indicación de algunos ítems o cuestiones abiertas a modo de ilustración.

- Autopercepción de la formación que tienen los docentes sobre la demostración y su enseñanza-aprendizaje (ejemplo de ítem con escala Likert: «Domino técnicas para hacer demostraciones»).
- La demostración como competencia de un docente de matemáticas (ejemplo de ítem con escala Likert: «La demostración es una de las competencias esenciales del profesor de matemáticas»).
- Rol y funciones de la demostración en la Enseñanza Secundaria (ejemplo de un grupo de ítems, donde ha de valorarse cada ítem con escala Likert: «Valore los siguientes elementos como caminos para convencer y persuadir a los alumnos: demostraciones, apoyos multimedia, esquemas, argumentos informales, pruebas visuales, ejercicios, explicaciones orales, explicaciones escritas, ejemplos concretos, esquemas de prueba de los propios alumnos, pruebas hechas con ordenador o calculadora», junto con una pregunta abierta para añadir y valorar otras posibles alternativas a la demostración).
- Presencia de la demostración en el currículo, pruebas de evaluación y libros de texto (ejemplos de ítems con escala Likert: «Actualmente, la demostración es frecuente en los currículos de matemáticas» o «En mi escuela es habitual la presencia de demostraciones en las pruebas de evaluación»).
- Situación actual de la demostración en las aulas de Secundaria (ejemplos de ítems con escala Likert: «Se está perdiendo el rigor y el sentido matemático» o «El número de demostraciones en los manuales escolares está bajando»).
- La enseñanza de la demostración matemática por el docente (ejemplo de algunos ítems de un grupo, donde ha de valorarse cada ítem con escala Likert: «Valore su grado de acuerdo con los siguientes enunciados sobre la enseñanza de las demostraciones: partir de lo concreto para ir a lo general, partir de lo general para ir a lo concreto, hay que usar un lenguaje matemático formal, hay que usar un lenguaje matemático ajustado al nivel de los alumnos…»).
- Actitud del docente hacia la demostración en su práctica docente (ejemplos de ítems con escala Likert: «Actualmente, me gustan las demostraciones» o «La demostración es necesaria para aprender las matemáticas»).
- El aprendizaje de la demostración matemática y las dificultades de los alumnos (ejemplo de algunos ítems de un grupo, donde cada ítem se valora con escala Likert: «Valore su grado de acuerdo con los siguientes enunciados

como razones que pueden explicar la falta de comprensión de las demostraciones matemáticas: falta de estudio, falta de asimilación de los conceptos fundamentales, exceso de mecanización, indisciplina y falta de atención, falta de coordinación entre profesores de matemáticas…»).

- Actitudes percibidas en los alumnos hacia la demostración matemática (ejemplo de un grupo de ítems, donde cada uno ha de valorarse con escala Likert: «La actitud de la mayoría de los alumnos cuando hace una demostración es: atención, interés, curiosidad, incomprensión, confusión, contestación, indiferencia, indisciplina», junto con una pregunta abierta para añadir otras actitudes mayoritarias no contempladas).
- Destinatarios de las demostraciones (ejemplo de un grupo de ítems, donde cada ítem ha de valorarse con escala Likert: «Las demostraciones son esencialmente para: matemáticos, investigadores, profesores, alumnos del grado de Matemáticas, todos los alumnos, los alumnos interesados en el asunto, todas las personas»).
- Sugerencias para mejorar la situación de la demostración en la matemática escolar (ejemplo de algunos ítems de un grupo, donde cada uno ha de valorarse con escala Likert: «Valore su grado de acuerdo con las siguientes propuestas para mejorar la situación de la demostración en la escuela: Crear y publicitar materiales con actividades sobre demostración, Introducir más rigor y formalidad en los currículos de matemáticas…»)

El cuestionario fue cumplimentado de forma anónima por una muestra de profesores de Matemáticas de Educación Secundaria más amplia y más diversificada que la anterior. La muestra también fue escogida por disponibilidad, participando 31 docentes portugueses (de la zona de Chaves) y 20 docentes españoles (de las zonas de Ourense y Valladolid). La mayor parte de estos profesores tenían entre 30 y 50 años, casi las tres cuartas partes eran licenciados en Matemáticas, con una media de 16 años de servicio, aunque con diferente número de años de experiencia (no obstante, en general, la mayoría eran profesores experimentados).

Para matizar y ampliar los resultados obtenidos en este segundo cuestionario, así como parar poder profundizar en la explicación de algunas respuestas emitidas en el mismo, en la tercera y última fase se realizó una entrevista semiestructurada conjunta a un docente portugués (se identificará en los diálogos como DPor, traduciéndose al castellano sus intervenciones en la transcripción aquí realizada) y otro español (identificado como DEsp), ambos con suficiente experiencia docente, para que pudieran explicar sus concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y establecer un diálogo entre ambos y el entrevistador, que adoptó el papel de moderador.

RESULTADOS

Dado que el desarrollo de la investigación está guiado por la evolución del cuestionario (junto con la entrevista semiestructurada tras la implementación de la segunda versión), dividimos la exposición de resultados sobre las concepciones detectadas en los docentes en relación a la demostración y a su enseñanza y aprendizaje en dos apartados, teniendo presente también el conocimiento desarrollado durante la implementación y análisis de datos derivado de la primera versión del cuestionario para la elaboración y refinamiento de la versión definitiva del mismo.

Resultados tras aplicar la primera versión del cuestionario

La característica principal que destacó en las respuestas dadas por los 20 profesores de Secundaria participantes fue la variedad entre unas y otras, atisbándose una importante heterogeneidad en las concepciones manifestadas. Se apreció una diferencia significativa entre los profesores con mayor experiencia docente, que hacen más demostraciones en el aula que los profesores con menos años de servicio. No se apreciaron diferencias significativas entre hombres y mujeres en su uso en el aula, aunque se detectó una mayor preocupación por la demostración entre los hombres.

Comenzando con la parte más ligada a las concepciones sobre la demostración, al presentarles a los docentes las funciones de la demostración de de Villiers (1993), casi las tres cuartas partes no encontraron otras funciones además de esas cinco. El resto de los docentes sí que enunciaron otras posibles funciones, entre las que destacan las funciones «de aprendizaje», «estética», «de satisfacción personal», «de estructuración», «de interpretación» y «de desarrollo». Además, al preguntar a los docentes por sus preferencias ante cinco pruebas distintas de la fórmula para sumar los primeros N números naturales, la mayoría se decantaron por la prueba de Gauss, por considerarla formal y explicativa, y por la prueba aplicando el principio de inducción, que encuentran formal y completa. Por el contrario, casi ninguno se decantó por pruebas de tipo geométrico, aunque son las que ellos consideran como más explicativas. Esa falta de valoración del rol explicativo es coincidente con lo obtenido por Knuth (2002a).

Desde un punto de vista de la demostración en la matemática escolar, un porcentaje muy alto (80%) de profesores afirmó que la demostración es necesaria para un aprendizaje eficaz de la matemática. Los docentes indican que las demostraciones ayudan a los alumnos a familiarizarse con los procesos matemáticos y con el lenguaje matemático, a distinguir las demostraciones de los ejemplos y a comprender mejor el teorema que se está anunciando. Además, también atribuyen otras funciones específicas a las demostraciones en el contexto escolar:

- Entrar en el dominio abstracto.
- Desarrollar razonamientos a través de principios verdaderos, con el fin de alcanzar, por medio de la evidencia y de la deducción, verdades que no se manifiestan a primera vista o que se ponen en cuestión.
- Función de abstracción.
- Función de motivación.

Se percibe que los docentes declararon hacer más demostraciones cuanta mayor utilidad veían a las mismas. Aproximadamente la mitad expresaron que la demostración es el mejor medio para persuadir y convencer, la otra mitad indicaron otras posibles alternativas para ese propósito de convencer y persuadir, por ejemplo, los «esquemas intuitivos», «la semejanza con otros problemas», «los procesos numéricos», «los procesos geométricos», «los ejemplos concretos», o «el uso de la calculadora y el ordenador».

Esta alta valoración general de la demostración en la matemática escolar entra en contradicción con que más de la mitad de los docentes participantes declararan que hacen pocas demostraciones en su práctica de aula. Indicamos a continuación algunos argumentos (traducidos del portugués), dados por ellos, a favor o en contra de realizar demostraciones en el aula de matemáticas:

- A favor: «Da certeza y seguridad y ayuda a desarrollar capacidades de estructuración y razonamiento», «Estimula la comprensión matemática», «Facilita el aprendizaje de las matemáticas», «Permite saber que el resultado puede aplicarse en todas las situaciones», «Mostrar la interconexión de algunos conceptos», «Permite asimilar mejor el teorema, sus implicaciones y sus aplicaciones».
- En contra: «A los alumnos no les gustan las demostraciones», «Desmotivan a los alumnos», «El futuro requerirá otras tecnologías», «Los alumnos prefieren los ejercicios».

Muchos docentes manifestaron que perciben una actitud negativa en los alumnos cuando se realizan demostraciones en el aula, preguntando éstos «por qué tenemos que demostrar» o, en algunos casos, reclamando que ese tiempo se dedique a hacer ejercicios, o que no se hagan razonamientos generales «con letras» u objetos genéricos puesto que no entienden lo que se está haciendo. Además, algo más de un tercio de los docentes participantes afirmaron que no consiguen mantener la concentración de los alumnos cuando se hace una demostración en el aula, y que estos deberían ser formados en técnicas y estrategias demostrativas.

La mayor parte de los participantes coincidió en señalar que los libros de texto tienen pocas demostraciones, y que tampoco presentan alternativas a las demostraciones, aunque se mostraron contrarios a que se incluyan más ejemplos en detrimento de las demostraciones. Casi la mitad de los docentes indicó que procura hacer demostraciones independientemente de los manuales, ya que el docente debe complementar los mismos sirviendo de acompañamiento a los alumnos en el desarrollo de su comprensión. Un número similar de docentes declaró que deberían demostrarse todos los teoremas contenidos en el currículo de los cursos de matemáticas.

En relación a las características del aprendizaje de la demostración, más de la mitad de los profesores declararon conocer los esquemas de prueba analíticos e inductivos, pocos manifestaron conocer los empíricos y menos aún los de convicción externa. Sin embargo, pocos profesores declararon utilizar gran parte de ellos en las clases. Una gran mayoría reconoció que muchos alumnos no saben distinguir las demostraciones de otros procesos matemáticos, así como lo que es una hipótesis y una tesis en un teorema. Para avanzar en la superación de estas dificultades, sugirieron presentar los enunciados evidenciando cuál es la hipótesis y la tesis.

Además, la gran mayoría de los docentes destacó el escaso tiempo para hacer demostraciones que tienen por la carga horaria de la asignatura, y la escasa formación de muchos docentes al respecto, por lo que piensan que parte del problema con la demostración se suavizaría con una mayor formación de los docentes, una mayor carga horaria de la asignatura, un mayor nivel de exigencia, apostar por la búsqueda de un mayor rigor científico en las respuestas de los alumnos y tener una mayor preocupación por el desarrollo del alumno.

Resultados tras implementar la segunda versión del cuestionario y matización de los mismos con la entrevista semiestructurada

El análisis de las respuestas dadas por los profesores en la primera versión del cuestionario permitió inferir la presencia de concepciones muy diferentes sobre la demostración en la matemática escolar y sus procesos de enseñanza-aprendizaje, como se ha puesto de manifiesto en el subapartado anterior.

Para profundizar en ellas, se analizaron pormenorizadamente las respuestas y se rediseñó y refinó el cuestionario buscando detectar diferentes perfiles en grupos numerosos de profesores de Secundaria en ejercicio. El análisis de las respuestas permitió, de nuevo, contrastar la presencia de algunas concepciones comunes en algunos temas, pero de concepciones diversas en otros aspectos abordados en el cuestionario. Como dato, en todos los ítems del cuestionario con escala Likert fueron marcadas, al menos por un profesor, cada una de las puntuaciones posibles. Este contraste permitió clasificar a los docentes participantes en diferentes perfiles dentro de algunos de los temas tratados en el cuestionario, a partir de la comparación de sus respuestas dadas en los ítems o grupos de ítems asociados a un determinado tema. Esos resultados fueron matizados y ampliados con la entrevista, en la que se pudo profundizar, a través de las respuestas de los dos profesores entrevistados, en las características de algunos de los perfiles detectados. Pasamos a explicar los resultados obtenidos.

En relación a cómo perciben los docentes que es su formación sobre la demostración y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la misma, casi todos indican que en la universidad aprendieron a demostrar, pero no a tener una formación didáctica sobre la demostración y sobre cómo enseñar a demostrar o a desarrollar el aprendizaje de la demostración en el alumnado, emergiendo en algunos de ellos una formación de carácter autodidacta. En ese sentido, los dos docentes entrevistados afirmaron:

1. DPor: La actualización se hace con... no de una manera... ministerial, es decir, con el apoyo de elementos del Ministerio de Educación, sino por... por... mero... orgullo personal.
2. DEsp: Pienso que, en la formación universitaria, lo que hacemos es aprender a demostrar; pero, luego, para aprender a enseñar demostraciones en Secundaria… Para eso, va uno a hacer formación por su cuenta.

No se evidenció un consenso entre los participantes al concebir la demostración como una competencia esencial de un profesor de matemáticas, detectándose tres perfiles de docentes:

- *Pro-demostrativo*, que asume que la demostración es una competencia esencial del profesor de matemáticas.
- *Anti-demostrativo*, que no incluye la demostración entre las competencias fundamentales del profesor de matemáticas.
- *Neutro*, que deja que los programas formativos y curriculares se encarguen de determinar qué competencias ha de tener un profesor de matemáticas.

Casi dos tercios de los participantes fueron catalogados como pro-demostrativos, aunque son menos de la mitad los profesores participantes que declararon que tienen la costumbre de hacer en el aula las demostraciones de los teoremas más importantes, otros las sustituyen total o parcialmente por ejemplos, esquemas u otras formas de argumentar. Así, también hay diferentes visiones de la demostración como contenido propio del currículo.

Al preguntarles sobre el rol y las funciones de la demostración en la matemática escolar, emergió una contraposición en la cualidad más valorada en una demostración, entre su carácter formal y su carácter explicativo. Atendiendo a este aspecto, surge otra clasificación en tres grupos:

- *Explicativo*, con preferencia por demostraciones más explicativas.
- *Formal*, que considera prioritarias las demostraciones formales.
- *Estático*, que no se preocupa por las particularidades de las demostraciones.

Además, al igual que en la aplicación de la primera versión del cuestionario, se evidenció una división muy grande entre los docentes participantes sobre si consideraban (o no) a las demostraciones como el mejor camino para convencer y persuadir a los alumnos de la veracidad o falsedad de un enunciado matemático. Se encontraron así tres tipos de docentes:

- *Exactos*, que únicamente asocian el convencimiento y la persuasión a la demostración.
- *Intuitivos*, que dan más valor de convencimiento y persuasión a las argumentaciones evidentes o de carácter práctico o empírico que a las demostraciones.
- *Adaptables*, que aventuran que la forma de convencer y persuadir depende de las situaciones.

Los profesores valoran especialmente dos alternativas o complementos a la demostración, como son las pruebas visuales y las explicaciones de carácter escrito. En relación con este hecho, los dos profesores entrevistados mostraron un posicionamiento cambiante hacia métodos con un menor rigor. El profesor portugués indicó que «yo noto que nosotros, como profesionales de las matemáticas, muchas veces usamos los esquemas y los métodos más… más estandarizados, más usados, más vulgares», a lo que la profesora española replicó que «en realidad, tal como está ahora, muchas veces, no vemos obligados a limitarnos a la visualización...».

Sobre la presencia y la situación de la demostración en el currículo, todos los docentes afirmaron que perciben una desaparición gradual de la demostración matemática en los currículos de matemáticas. Valgan como ejemplo estos extractos de la entrevista a los dos docentes:

1. DPor: Se redujo sustancialmente [la demostración] y se fue reduciendo prácticamente a… a cero... Por lo tanto, pocas son las demostraciones y, si existen demostraciones, son por observación geométrica.
2. DEsp: Con la normativa LOGSE, se perdió la demostración por completo; se ha ido de demostrar prácticamente todo a no demostrar nada... aunque quiera ya no hago algo de demostración.

También casi todos los docentes afirmaron que las demostraciones son poco frecuentes en los libros de texto. Sin embargo, no todos mostraron preocupación por esa desaparición gradual percibida. Aproximadamente dos tercios de los docentes sí mostraban descontento y preocupación por este aspecto, pero los restantes declararon su indiferencia ante este hecho.

La mayor parte de los profesores indicó que le gustan las demostraciones desde su formación universitaria, y que le siguen gustando como profesor, aunque afirmaron que hacen pocas demostraciones en su formación continua. En relación a qué rol conciben para la demostración en la enseñanza de las matemáticas, de nuevo una mayoría de docentes manifestó la necesidad de las demostraciones para desarrollar un buen aprendizaje de las matemáticas, aunque también hubo respuestas en otros sentidos. Así, los docentes pueden clasificarse en tres perfiles:

- *Favorable*, que se muestra a favor de la enseñanza de las demostraciones para un buen aprendizaje de las matemáticas y un buen desarrollo del razonamiento.
- *Contrario*, que es contrario a la enseñanza de las demostraciones, por no ver en ellas ningún beneficio educativo.
- *Imparcial*, que no es contrario ni favorable a la enseñanza de las demostraciones, depende del contexto, de los alumnos y de la propia demostración.

También se detectaron tres grupos en relación con el modo en que conciben que han de presentarse los enunciados y teoremas matemáticos en el aula:

- *Clásico/formal*, que suelen partir de lo general para llegar a lo concreto, de la demostración formal para hacer después un ejemplo de aplicación.
- *Práctico*, que suelen partir de lo concreto para llegar a lo general, del ejemplo particular a la demostración.
- *Didáctico*, que adaptan la forma de presentar los contenidos a las situaciones.

En relación al aprendizaje de la demostración matemática, y al igual que en la primera versión del cuestionario, los profesores afirmaron que gran parte de los alumnos no llegan a entender las demostraciones y su rol, aunque sí que los docentes dijeron hacerlas con una intencionalidad didáctica. Destacamos algunas respuestas:

- «La mayoría de los alumnos, generalmente, no entienden que un contraejemplo prueba que una proposición determinada es, al final, falsa».
- «La mayoría de los alumnos confunde demostraciones con ejercicios».
- «La mayor parte de los alumnos no entiende las demostraciones».
- «A veces, la mayoría de los alumnos no entienden los enunciados propuestos».

Al indagar en el cuestionario sobre cuáles creen que son los focos de que los alumnos tengan tantas dificultades con las demostraciones, en algunos casos se mencionó la conducta escolar, pero en otros también el sistema escolar y la concepción de las matemáticas que van desarrollando los estudiantes. Por ejemplo, algunos profesores destacaron los modos de estudio basados en la realización de ejercicios de forma mecánica, sin comprender «la teoría», o el poco uso y aprovechamiento por parte de los docentes de los propios esquemas de prueba de los alumnos en el desarrollo de la docencia. Además, en la entrevista surgió otro aspecto problemático, como son las dificultades en los alumnos para entender el lenguaje matemático del que, en particular, se hace uso en las demostraciones:

1. DPor: Para convencer al alumno es preciso que la comunicación matemática exista, o sea, que el alumno entienda al profesor. Esto tiene que variar a lo largo de la edad… en función de la edad del alumno y… Pero la matemática, por naturaleza, para que pueda entenderse tiene que ser… comprendida.
2. DEsp: Sí. Una de las cosas que decías, que es la dificultad que encuentran en el lenguaje… y es que ya incluso en el lenguaje cotidiano…

Al preguntarles sobre si suelen hacer uso de los esquemas de prueba manifestados por los propios alumnos al trabajar los teoremas en el aula, de nuevo hay una diversidad de respuestas en el profesorado participante, lo que permite establecer una clasificación en tres grupos:

- *Evolucionista*, que suele aprovechar las formas de pensar y los esquemas de prueba de los alumnos para tratar de mejorarlos gradualmente.
- *Flexible*, que únicamente considera a veces los mecanismos o esquemas de prueba de los estudiantes.
- *Egocéntrico*, que no se interesa por el estado de maduración de los esquemas de prueba de sus alumnos.

La casi totalidad de los profesores estuvo de acuerdo en afirmar que las demostraciones son para los matemáticos, pero hubo mayor controversia al preguntar si también eran algo para los alumnos o no. Algunos docentes expresaron que creen que las demostraciones son esenciales para todos los alumnos, otros pensaban que las demostraciones han de ser solo para los alumnos más interesados.

Los profesores encuestados manifestaron que perciben que son pocos los alumnos que muestran interés, curiosidad o atención cuando se realiza una demostración en clase. Por el contrario, indicaron que son muchos los estudiantes que adoptan comportamientos indisciplinados, contestatarios, indiferentes, confusos y manifiestan no llegar a comprender el rol de la demostración. Ante esta situación, la actitud que adoptan los profesores es muy diferente, pudiéndose clasificar los profesores en tres grupos:

- *Rendido*, que desiste de hacer una demostración ante el rechazo de los alumnos.
- *Persistente*, que intenta hacer demostraciones, incluso contra las objeciones del alumnado.
- *Adaptativo*, que busca alternativas que permitan demostrar lo deseado.

Sobre esta cuestión también se preguntó a los dos profesores entrevistados, sobre cuál es su reacción cuando los alumnos rechazan una demostración que se está haciendo. El profesor portugués afirmó que «intento… ir por otros caminos… se intenta hacer de otras formas», mostrando un perfil adaptativo. Mientras, la profesora española mostró un perfil más persistente: «yo trato de convencerles… de la importancia de la demostración, de que aprendan a demostrar como forma de razonamiento».

A MODO DE CONCLUSIÓN

La investigación descrita anteriormente evidencia que existe una amplia variedad de concepciones en el profesorado en ejercicio acerca de la demostración en la matemática escolar, y a su proceso de enseñanza y aprendizaje. Estas concepciones influirán en la práctica docente de los diferentes profesores, por lo que es una línea de investigación que precisa de una mayor atención en la investigación en educación matemática. En particular, aquí se han generado perfiles de docentes atendiendo a temas concretos ligados a esas concepciones, pero queda pendiente como paso siguiente buscar una detección de perfiles más global en relación con la demostración matemática, y su enseñanza y aprendizaje.

Además, se observan ciertos resultados recurrentes en las diferentes investigaciones realizadas en torno a las concepciones del profesorado sobre la demostración, y que nos llevan a postular las siguientes ideas:

- La demostración en la enseñanza de las matemáticas ha ido desapareciendo a lo largo de los años con las diferentes reformas curriculares: ha disminuido su presencia en los libros de texto, como se desprende de Conejo, Arce y Ortega (2015), pero también de la práctica docente de muchos docentes en ejercicio, como declaran los profesores encuestados en este estudio, o como se deduce del realizado por Kotelawala (2016). Esto se puede deber a varias razones, entre las que se puede destacar la falta de interés del alumnado en las mismas así como las importantes dificultades que se presentan en la comprensión de este proceso por parte de los estudiantes, que parecen querer evitarse (y no tratar de superarse).
- En contraposición al punto anterior, la mayoría de los profesores en ejercicio consideran este proceso como un proceso muy importante tanto en las matemáticas como en su enseñanza, y destacan su función de explicación en la matemática escolar (y no tanto cuando hablan de la demostración desde un punto de vista matemático) frente a otras funciones de la demostración. Esta función, como defiende Hanna (1995), es una de las más importantes, puesto que las demostraciones permiten una mayor profundización en la comprensión de algunos conceptos. Por este motivo, llama más la atención

el hecho de que a pesar de la importancia que le conceden los profesores en ejercicio a este proceso, no busquen incorporarla más en su práctica docente.

- Además del desinterés de los alumnos, motivo manifestado por algunos profesores para no utilizar la demostración en sus clases, se desprende del estudio de Dos Santos (2010), así como del de Knuth (2002a, 2002b) y el de Vicario y Carrillo (2005), que podrían existir ciertas lagunas de formación que tiene el profesorado de matemáticas tanto sobre la demostración matemática como proceso como sobre los aspectos didácticos de la misma.

En relación al último punto, el trabajo de Torregrosa-Gironés et al. (2010) evidencia que las tareas de reflexión sobre la demostración y su enseñanza llevan a los docentes a considerar su importancia en el proceso de aprendizaje matemático, lo que nos lleva a postular que dentro de la formación del profesorado en Secundaria es totalmente necesaria y pertinente la formación sobre aspectos del propio proceso de demostrar así como de una formación didáctica sobre el mismo, idea que además es defendida por Knuth (2002a, 2002b). En este sentido, creemos que dicha formación modificaría las concepciones (Thompson, 1992) del profesorado en torno a la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje, bien sea porque matizan el significado que los docentes asignan a la demostración, principalmente en la etapa de Enseñanza Secundaria, o porque puedan modificar sus creencias en torno a las funciones de este proceso en la enseñanza del mismo. Creemos que a esta formación contribuyen las otras investigaciones realizadas en la Universidad de Valladolid y que se han descrito brevemente en este capítulo, como son las conclusiones obtenidas de los estudios de Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (1997, 2001, 2003), entre las que destacamos la importancia de conocer los diferentes esquemas de prueba que puede tener un alumno, y utilizarlos para hacerlos progresar hacia esquemas de prueba de tipo analítico, y ser conscientes de que las demostraciones matemáticas formales (esquemas de prueba axiomáticos) no siempre son entendidas por los alumnos, ni son capaces de identificar el enunciado de un resultado que se ha demostrado o distinguir las hipótesis y la tesis.

Por otro lado, y viendo la relevancia que tienen las concepciones del profesorado acerca de la demostración en la matemática escolar, consideramos que es totalmente necesario continuar estudiando si esas concepciones están basadas en elementos de conocimiento o en creencias desarrolladas por el docente, y plantear estudios en los que profundizar en la interrelación de conocimientos y creencias. Avances en estos aspectos permitirían detectar elementos de mejora de la práctica docente y realmente aprovechar las ventajas didácticas de la demostración, lo que en nuestra opinión contribuiría a mejorar la motivación del alumnado, así como a mostrar una versión más real de lo que es la ciencia matemática, alejada de la simple mecanización de algoritmos y recetas.

REFERENCIAS

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, *13*(1), 41-61.

Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 51-71.

Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-151). New York, NY: Cambridge University Press.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon, 26,* 15-30. Original de 1990.

Dos Santos, C. (2010). *A demostraçao matemática e o profesor. Formulaçao e ensino.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Dos Santos, C. y Ortega, T. (2013). Perfiles del Profesorado sobre la Enseñanza y Uso de la Demostración. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4*, 27-45.

González, J. C. (2012). *Estudio de Contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). New York, NY: Springer.

Hanna, G. y de Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study.* New York, NY: Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de 1º curso de bachillerato.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática, 9*(2), 65-104.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO, 28*, 39-60.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 49-63.

Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 61-88.

Kotelawala, U. (2016). The Status of Proving Among US Secondary Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(6), 1113-1131.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-203). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 75-89). Londres, Reino Unido: Routledge.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester, Jr. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age.

Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5-41.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective.* Cham, Suiza: Springer.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the reserach. En D. A. Grouws (Ed.), *Handook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Nueva York, NY: MacMillan Publishing Company.

Torregrosa-Gironés, G., Haro, M. J., Penalva, M. C. y Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación, 352*, 379-404.

Van Asch, A. G., (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301-313.

Vicario, V. y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz-Machado, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 145-152). SEIEM: Córdoba.

AQUILAFUENTE, 271

Este libro presenta una panorámica de investigaciones con el foco en el profesor de matemáticas, desde distintas perspectivas teóricas y metodológicas, e incluyendo desde la formación de profesores a la práctica de aula, considerando al profesor como aprendiz y como profesional reflexivo. Está organizado en cuatro secciones que se centran respectivamente en: el análisis de la práctica docente, el conocimiento del profesor, el aprendizaje del profesor y el desarrollo de competencias, y el desarrollo profesional y el dominio afectivo.

Las secciones integran capítulos que narran diferentes aproximaciones a la investigación sobre la problemática foco de la sección con capítulos que presentan una visión de la investigación a nivel internacional, identificando líneas de investigación emergentes.

El contenido del libro recoge el trabajo de investigadores de la RED8-EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y FORMACIÓN DE PROFESORES (financiada por el Ministerio de Economía, Industria y competitividad, de España) y de otros expertos en la temática.

Al mostrar una amplia diversidad de investigaciones sobre el profesor de matemáticas, puede ser de interés para investigadores (en formación o expertos), profesores de matemáticas, formadores de profesores y personas interesadas en general en la Educación Matemática.

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS
1218 ~ 2018