

CONCEPCIONES DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA SOBRE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

SECONDARY SCHOOL TEACHERS' CONCEPTIONS
OF MATHEMATICAL PROOF AND ITS TEACHING AND LEARNING

ARCE, M., CONEJO, L., DOS SANTOS, C., ORTEGA, T. Y PECHARROMÁN, C.
Universidad de Valladolid

RESUMEN

Uno de los procesos más importantes de las matemáticas es la demostración matemática y, por ello, tiene una gran relevancia en la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. En la Universidad de Valladolid se han realizado varias investigaciones en torno a la demostración matemática, tomando como referencia tanto a los alumnos, como a los libros de texto y al profesorado. Este capítulo se centra en una de ellas, sobre las concepciones de varios docentes de Educación Secundaria de España y Portugal acerca de la demostración en la matemática escolar y su enseñanza y aprendizaje. Se ha detectado una gran diversidad de perfiles en el profesorado en relación al rol y las funciones que asignan a la demostración en las aulas de Secundaria y a cómo conciben su enseñanza y aprendizaje, lo que sin duda afectará al modo en que aparecerá ésta en su práctica de aula habitual.

Palabras clave: *concepciones, demostración, profesorado, Educación Secundaria.*

Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2019). Concepciones del profesorado de educación secundaria sobre la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 417-438). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

One of the most important processes of mathematics is the mathematical proof and, therefore, it has a great relevance in the teaching and learning of this science. Several research studies have been carried out in the University of Valladolid about the mathematical proof, related to students, textbooks and teachers. This chapter focuses on one of them, which is about the conceptions about proof in school mathematics, and about its teaching and learning, in several Secondary School teachers from Spain and Portugal. A great diversity of teacher's profiles has been detected. There are several profiles related to the role and the functions that the teachers assigned to proof in Secondary classes, and, also, how they conceive the teaching and learning of mathematical proof. Undoubtedly, these different profiles will affect on how the proof will appear in those teachers' teaching and usual classroom practice.

Keywords: *conceptions, proof, teachers, Secondary School.*

INTRODUCCIÓN

HAY UN COMÚN acuerdo en la comunidad científica internacional del campo de la educación matemática sobre la importancia y relevancia de la demostración matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Como afirman Hanna y Barbeau (2010), la demostración matemática es portadora de conocimientos matemáticos, ya que contiene los «métodos, herramientas, estrategias y conceptos que se necesitan para resolver problemas» (Rav, 1999, p. 6), y estos elementos suponen la esencia principal de las matemáticas.

Desde el último cuarto del siglo XX se han producido numerosas investigaciones sobre la demostración en el campo de la educación matemática. Algunas recopilaciones del conocimiento y avances obtenidos en esas investigaciones se han publicado en varios monográficos al respecto, que muestran la diversidad de líneas de trabajo en torno a la demostración matemática. En Mariotti (2006) se presenta una recopilación de estudios presentados durante 30 años en los congresos del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), organizándose la discusión en torno a tres temáticas: las demostraciones en la escuela, las dificultades de los estudiantes en torno a la demostración y las intervenciones de los profesores para resolver dichas dificultades. Hanna y de Villiers (2012) coordinaron el trabajo derivado del 19^o Estudio de la *International Commission in Mathematical Instruction* (ICMI), centrado en la demostración y prueba en educación matemática. En esta contribución se consideraron seis temáticas de trabajos: demostración y cognición, oportunidades y desafíos de la experimentación, perspectivas históricas y educacionales de la demostración, la demostración en los currículos escolares, la argumentación y la transición a niveles de educación superior y lecciones sobre las tradiciones culturales orientales. Por su parte, Mariotti,

Durand-Guerrier y Stylianides (2018) describieron los asuntos que han sido objeto de debate en las reuniones del grupo de Argumentación y prueba de los Congresos de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), clasificando las contribuciones en: asuntos históricos, epistemológicos y teóricos, el papel de la lógica en la argumentación y la prueba, la enseñanza de la demostración, y algunos asuntos emergentes, como el análisis de la demostración en los libros de texto. Por último, en el monográfico sobre la demostración del último Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-13 (Stylianides y Harel, 2018), se agrupan las investigaciones en: asuntos epistemológicos relacionados con la demostración, asuntos basados en las clases sobre la demostración, asuntos curriculares y cognitivos relacionados con la demostración, y asuntos relacionados con el uso de ejemplos en la demostración.

La comparación de los monográficos y sus temáticas permite detectar la amplia presencia de aspectos teóricos, epistemológicos y cognitivos asociados al aprendizaje de la demostración en los alumnos, y apreciar que ahora empieza a prestarse una mayor atención a otros temas, como los conocimientos y las concepciones que tienen los propios docentes de aspectos ligados a la demostración, su enseñanza y aprendizaje, así como al diseño y análisis de situaciones e intervenciones que traten de favorecer el aprendizaje de la demostración y superar las dificultades asociadas al mismo.

En la Universidad de Valladolid se han desarrollado un número importante de investigaciones en torno a la demostración matemática y a los procesos de enseñanza-aprendizaje asociados a ella, que también han aportado conocimiento relevante a esta área. En esta introducción se resumen varias de ellas para dar una mejor idea de la trayectoria del grupo, dedicándose el resto del capítulo a mostrar con más detalle una que está más directamente relacionada con el profesorado, uno de los focos de atención de este libro de la *RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores*.

La primera investigación realizada fue la de Ibañes y Ortega (1997), que hicieron una revisión de las formas de demostración que aparecen en los libros de texto de Bachillerato y Universidad. De ella surgió una clasificación atendiendo a diferentes aspectos. Uno de ellos es la estructura lógica del enunciado, de la que surge el tipo: en relación con la implicación, las demostraciones pueden ser «de condición necesaria», «de condición suficiente» y «de condición necesaria y suficiente»; y en relación al cuantificador existencial, una demostración puede ser de «no existencia», «de existencia simple», «de imposibilidad» y «de unicidad». Otro aspecto son los procedimientos lógicos utilizados en la demostración, que dan lugar al método y cuya casuística es la siguiente: silogismo, casos, reducción al absurdo, inducción completa, procedimiento constructivo (ejemplo o contraejemplo), analogía o dualidad. Del tercer aspecto, los procedimientos matemáticos, surge

el estilo, que puede ser geométrico, algebraico, de las coordenadas, vectorial, del análisis matemático, probabilístico o topológico. Del cuarto y último aspecto, el procedimiento de exposición, surge el modo, que puede ser sintético (o directo) y analítico (o indirecto).

A esta investigación le siguieron otras relacionadas con la comprensión de la demostración matemática por alumnos de Bachillerato (como por ejemplo, Ibañes, 2001 o Ibañes y Ortega, 2001). Estos autores partieron de las funciones de la demostración descritas por de Villiers (1993, ver marco teórico) y del concepto de *esquema de prueba* de una persona propuesto por Harel y Sowder (1998), entendido como aquello que constituye convencimiento y persuasión sobre la validez del resultado para esa persona. Harel y Sowder (1998) propusieron una clasificación de esquemas de prueba, distinguiendo esquemas de convicción externa, basados en casos particulares o analíticos (entre los que se incluyen las verdaderas demostraciones). Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (2001) enriquecieron esa clasificación, distinguiendo diferentes casos de razonamientos inductivos (de un caso, de varios casos, sistemático...), y detectaron que la comprobación de un teorema en un ejemplo (esquema inductivo de un caso) era considerado por una buena parte de los alumnos como una auténtica demostración, opinión que no variaba cuando se les presentaba después una prueba axiomática del mismo enunciado, por lo que es una idea muy enraizada en ellos. La investigación anterior también permitió detectar que lo que los alumnos consideraban como demostración variaba según fuera el enunciado a justificar.

Así, se consideró necesario investigar si los alumnos de Bachillerato discriminaban las demostraciones matemáticas de otros procesos, es decir, si las distinguían e identifican cuando se presentan junto a otros procesos matemáticos, si son capaces de identificar el enunciado, y si conocen las posibilidades de aplicación de un resultado establecido mediante una demostración así como la imposibilidad de encontrar contraejemplos del mismo. Los principales resultados obtenidos (Ibañes y Ortega, 2003) indican que más de la cuarta parte de los alumnos no discriminaba una demostración de un ejemplo de un mismo enunciado, que muchos alumnos no identifican el enunciado de un resultado que se haya probado, que pocos alumnos consideraron que un teorema puede aplicarse directamente una vez que ya se ha demostrado y que casi la mitad de los alumnos pensaban que podría encontrarse un contraejemplo de un teorema demostrado. Además, se detectaron algunos problemas importantes relacionados con la identificación e implicación de una demostración matemática, así como con la identificación del enunciado y la comprensión del mismo, de lo que es la hipótesis y la tesis y del significado de «condición necesaria» o «condición suficiente». Todas estas dificultades de los alumnos pueden influir en las decisiones que toman los profesores a la hora de utilizar o no las demostraciones en sus clases, como se podrá observar en el trabajo sobre concepciones de los profesores sobre la demostración que se expone más adelante.

Posteriormente, González (2012) realizó una investigación doctoral en la que se buscó conocer las preferencias de estudiantes universitarios de ingeniería entre el uso de pruebas axiomáticas formales y de pruebas preformales en la docencia de algunos teoremas de Análisis Matemático. Las pruebas preformales, concebidas por van Asch (1993), son líneas de razonamiento que contienen la idea principal de una demostración formal y que pueden generalizarse a una prueba formal fácilmente. Se detectó que los alumnos consideraban que las pruebas formales eran de más ayuda para recordar los enunciados de los teoremas, pero preferían de forma mayoritaria las pruebas preformales al parecerles más sencillas, más claras, más concretas, más atractivas, más fáciles de comprender y más útiles para ilustrar las aplicaciones de los teoremas.

Otro grupo de investigaciones está ligada al análisis de la evolución de la demostración matemática en los libros de Bachillerato, desde la Ley General de Educación de 1970 hasta la Ley Orgánica de Educación (como por ejemplo, la descrita en Conejo, Arce y Ortega, 2015). En estos estudios se ha detectado una progresiva desaparición de la demostración matemática en dichos manuales, tendiendo a sustituir pruebas axiomáticas por esquemas de prueba de tipo inductivo. Además, también hay diferencias importantes en el modo de enunciar los teoremas, y en su orden de presentación, puesto que la ausencia de demostraciones provoca que surjan otros criterios de presentación diferentes de la sistematización axiomática de los mismos.

En este capítulo vamos a presentar una de las investigaciones sobre la demostración que está directamente ligada al profesorado (Dos Santos, 2010; Dos Santos y Ortega, 2013). Se trata de una investigación en la que han participado un grupo de profesores de matemáticas de Educación Secundaria, de España y de Portugal. En particular, los objetivos de investigación fijados para la parte que aquí se va a detallar son:

- Detectar cuáles son las concepciones que muestra el profesorado de matemáticas de Educación Secundaria sobre la demostración en la matemática escolar y sobre su enseñanza y aprendizaje.
- Identificar perfiles en el profesorado según estas concepciones en torno a diferentes temas de interés ligados a la demostración en el aula y a su enseñanza y aprendizaje.

LA DEMOSTRACIÓN Y EL PROFESORADO. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Estudiar el conocimiento, las concepciones o las creencias que tienen los profesores de matemáticas acerca de diversos temas relacionados con las matemáticas y con su enseñanza y aprendizaje son, en la actualidad, líneas de investigación a las

que se dedica una atención creciente. No obstante, conocimiento, concepciones y creencias del profesorado no son constructos con un significado común para la comunidad investigadora en didáctica de la matemática (como ponen de manifiesto las revisiones que hacen Thompson, 1992; o Philipp, 2007), pudiendo considerarse bien como constructos equiparables, bien subsumidos unos en otros o bien de distinta naturaleza.

En nuestro caso, coincidimos con Thompson (1992) al indicar dos diferencias entre conocimientos y creencias: las creencias pueden tener diferentes grados de convicción en ellas (algo que no admiten los conocimientos) y los conocimientos tienen un grado de consenso que no tienen las creencias (puede admitirse la existencia de diferentes creencias que no pueden refutarse). No obstante, se acepta la existencia de una interrelación y entrelazamiento entre ellos, ya que el conocimiento del docente sobre algunos temas influirá en sus creencias y estas también impregnarán su conocimiento y el desarrollo de éste (Aguilar-González, Muñoz-Catalán, Carrillo-Yáñez y Rodríguez-Muñiz, 2018). Es sin duda interesante, desde un punto de vista teórico, plantearse qué conocimientos y qué creencias tiene un profesor de matemáticas y tratar de vislumbrar relaciones entre conocimientos y creencias, como hacen Aguilar-González et al. (2018), pero son varios los autores que plantean la dificultad y la falta de utilidad de mantener siempre esta distinción en la práctica por su complejidad (Knuth, 2002a, 2002b; Thompson, 1992).

Thompson (1992) propone el uso de otro constructo, el de *concepciones*, que, no obstante, también ha sido usado con significados diversos en investigaciones (Philipp, 2007). Aquí adoptaremos el significado de concepción de un docente que propone Thompson (1992, p. 130), como «estructura mental más general, que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y aspectos similares a estos» (traducción de los autores). Es decir, vemos las concepciones como un constructo algo más general que las creencias, que contiene a estas pero que también puede contener elementos de conocimiento en las estructuras mentales que un docente va construyendo sobre un determinado tema, sin que sea objeto de este estudio el llegar a determinar qué elementos de esos esquemas manifestados por los docentes provienen de un conocimiento y cuáles de creencias a partir de la naturaleza de la información recogida.

En este caso, las concepciones que se busca analizar en los docentes de Educación Secundaria participantes españoles y portugueses son las concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y sobre su proceso de enseñanza-aprendizaje. Como hemos indicado anteriormente, el estudio del conocimiento, las concepciones o las creencias de docentes sobre la demostración y su enseñanza-aprendizaje son líneas de investigación en las que no hay demasiados estudios, y menos aún con profesores en ejercicio. Sí que es cierto que algunos modelos de conocimiento del profesor de matemáticas, como el modelo MTSK de Carrillo et al. (2018),

reconocen explícitamente la necesidad de que un docente conozca cómo demostrar, cómo enseñar a demostrar y cómo los alumnos aprenden las demostraciones y los procesos asociados a la misma. Además, destacados investigadores en educación matemática justifican que la demostración debe formar parte de cualquier currículo de matemáticas, ya que contribuye a la comprensión de los conceptos y a construir matemáticas conforme a los principios de esta ciencia (Hanna, 1995; Schoenfeld, 1994). Por tanto, estamos ante una línea de investigación altamente pertinente y necesaria.

Un número importante de los estudios en esta línea de investigación hacen uso, en su marco teórico, de las funciones de la demostración enunciadas por de Villiers (1993). Este autor distingue cinco funciones destacadas para la demostración matemática: *verificación*, pues demuestra la veracidad de una afirmación; *explicación*, pues profundiza en por qué es verdad una afirmación; *sistematización*, al organizar los resultados en un sistema de axiomas, definiciones y teoremas; *descubrimiento*, pues puede permitir encontrar otros resultados implícitos en el transcurso de una demostración o construir nuevas matemáticas; y *comunicación*, pues es el medio para comunicar y transmitir conocimiento matemático. En nuestro estudio también haremos uso de estas cinco funciones.

En cuanto a los estudios sobre conocimientos, creencias y concepciones de docentes sobre la demostración matemática escolar y su enseñanza y aprendizaje, en el panorama nacional señalamos a Vicario y Carillo (2005) y a Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva y Llinares (2010). En el primero se presenta un estudio de caso en el que se analizan las funciones que dos docentes de matemáticas de Secundaria en ejercicio atribuyen a cinco demostraciones diferentes sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Este análisis pone de manifiesto que, aunque reconocen la función explicativa en alguna de las demostraciones, demuestran ciertas lagunas de conocimiento en procesos asociados a la demostración matemática. Por su parte, Torregrosa-Gironés et al. (2010) realizan un estudio con 12 profesores sobre sus concepciones sobre la demostración matemática y las funciones que desempeñan, y clasificaron a los docentes participantes en tres categorías atendiendo a la función que resaltaron, a saber, convencer-comunicar, verificar y sistematizar. Además, se observa que el planteamiento en el profesorado de actividades de justificación los lleva a reflexionar sobre sus concepciones sobre la demostración y a identificar la importancia del trabajo con pruebas en el aula.

En el ámbito internacional destacamos los estudios de Knuth (2002a, 2002b) y de Kotelawala (2016), que versan sobre las concepciones, en el caso del primer autor, y sobre las actitudes y las creencias, en el caso de segundo, sobre la demostración matemática de profesores de enseñanza secundaria. Los trabajos de Knuth, que forman parte del mismo estudio, diferencian las concepciones de los profesores sobre la demostración matemática dentro de la propia disciplina matemática

(Knuth, 2002a) y las que tienen en el contexto de la educación secundaria (Knuth, 2002b). En ambos casos, el marco teórico de análisis de las respuestas de los profesores se deriva de las funciones de la demostración descritas anteriormente (de Villiers, 1993). En las conclusiones de ambos estudios se señala la influencia que tienen las concepciones de los profesores sobre la demostración en su enseñanza. Además, en Knuth (2002b) se defiende que las concepciones reveladas por los profesores hacen pensar que no estaban preparados para aplicar las reformas curriculares en las que se ha concedido una mayor importancia a la demostración, a través, por ejemplo, del planteamiento de actividades de prueba en las aulas y destinadas a todos los alumnos (y no sólo a unos pocos, como consideran muchos profesores). Por otro lado, de ambos trabajos se desprende también la necesidad de que los futuros profesores de enseñanza secundaria de matemáticas reciban una buena formación sobre la demostración tanto de los profesionales de la educación matemática, como de los profesores universitarios de matemáticas. Por último, Kotelawala (2016) analiza las actitudes y creencias de un grupo de 72 profesores de matemáticas de Secundaria en Estados Unidos, a través de un cuestionario. Este autor detectó que, aunque los profesores atribuyen un gran valor a la demostración en el aula, apenas plantean actividades asociadas a la demostración en sus clases en contraposición con tareas de aplicación de procedimientos. Así, esto parece mostrar que no consideran la demostración como un proceso a enseñar o, al menos, no le atribuyen el valor educativo que merece.

En nuestra investigación, además de hacer uso de las funciones de la demostración (de Villiers, 1993) y del concepto de esquema de prueba (Harel y Sowder, 1998; Ibañez y Ortega, 2001), también hubo en los cuestionarios de recogida de información ítems sobre diferentes aspectos ligados a la situación de la demostración en la matemática escolar y a sus procesos de enseñanza y aprendizaje, que posibiliten detectar las concepciones sobre estos temas manifestados por los docentes. Como indica van Asch (1993), en muchos casos los alumnos no se interesan por las demostraciones, y tampoco valoran cuál es su importancia, al desconocer su papel y consecuencias (Ibañez y Ortega, 2003). Esa contraposición entre el papel que asigna un docente a la demostración en matemáticas y la visión de ella que tienen los alumnos puede generar dilemas y tensiones en el profesorado, que vayan forjando en los docentes diferentes concepciones sobre la demostración en la matemática escolar.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Debido a la ausencia, hasta donde conocen los autores, de instrumentos para analizar las concepciones de un docente de matemáticas sobre la demostración en la matemática escolar, se ha optado por utilizar una metodología de investigación

de diseño en el ámbito de la educación (Barab y Squire, 2004; Confrey, 2006). La aplicación de esta metodología persigue conocer e interpretar con mayor profundidad los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, buscando avanzar y aportar mejoras en estos procesos. Para ello, se diseñan y refinan los procedimientos seguidos, a través del análisis continuado de los procesos y de las respuestas obtenidas, con el propósito de aportar el máximo de información y de conocimiento sobre el tema de estudio.

En este caso, los procedimientos se basan en la recogida de datos a través de un instrumento específicamente creado para ello, como es un cuestionario sobre las concepciones de los docentes acerca de la demostración en la matemática escolar y su proceso de enseñanza-aprendizaje. Se han seguido tres fases en la aplicación de la metodología.

En la primera fase, y con un carácter fundamentalmente exploratorio, se diseñó un primer cuestionario *ad hoc* con 80 ítems que buscaba conocer las concepciones que tenían los docentes sobre el tema antes indicado. Este primer cuestionario puede consultarse en Dos Santos (2010). El cuestionario fue cumplimentado por un grupo de 20 docentes de Educación Secundaria portugueses (de la zona de Chaves), escogidos por disponibilidad, todos ellos con una amplia experiencia docente, de al menos 10 años, y con una proporción equilibrada entre hombres y mujeres.

El análisis de las respuestas dadas por los profesores al primer cuestionario permitió inferir la existencia de una diversidad de concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Para profundizar en la detección y caracterización de esas concepciones, el equipo investigador revisó pormenorizadamente las respuestas y los aspectos diferenciales emergentes para proponer un refinamiento y ampliación del cuestionario. La nueva versión del cuestionario fue sometida a un juicio de expertos compuesto tanto por profesores de Secundaria como por investigadores en Didáctica de la Matemática, tras lo cual se estableció el cuestionario definitivo con aquellos ítems validados por la mayoría de los expertos.

Esta versión final del cuestionario está compuesta por una primera parte sobre información profesional del docente (formación académica y experiencia como docente) y una serie de temas relacionados con las concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Cada tema estaba compuesto por ítems o grupos de ítems (ítems relacionados con un mismo encabezado común) con afirmaciones sobre las cuales los participantes tenían que expresar su grado de acuerdo a través de una escala Likert (con valores de 1 a 5, de «Nunca / Desacuerdo total» a «Siempre / Acuerdo total») o por otras cuestiones de respuesta abierta. En total, el cuestionario contiene 197 ítems con escala Likert y 15 cuestiones abiertas. El cuestionario completo puede encontrarse en Dos Santos

(2010). Mostramos a continuación los temas en los que se indagó cuáles eran las concepciones (en el sentido de Thompson, 1992) de los docentes, temas todos ellos relacionados con la demostración en la escuela y su enseñanza y aprendizaje. En cada tema se añade la indicación de algunos ítems o cuestiones abiertas a modo de ilustración.

- Autopercepción de la formación que tienen los docentes sobre la demostración y su enseñanza-aprendizaje (ejemplo de ítem con escala Likert: «Dominio técnicas para hacer demostraciones»).
- La demostración como competencia de un docente de matemáticas (ejemplo de ítem con escala Likert: «La demostración es una de las competencias esenciales del profesor de matemáticas»).
- Rol y funciones de la demostración en la Enseñanza Secundaria (ejemplo de un grupo de ítems, donde ha de valorarse cada ítem con escala Likert: «Valore los siguientes elementos como caminos para convencer y persuadir a los alumnos: demostraciones, apoyos multimedia, esquemas, argumentos informales, pruebas visuales, ejercicios, explicaciones orales, explicaciones escritas, ejemplos concretos, esquemas de prueba de los propios alumnos, pruebas hechas con ordenador o calculadora», junto con una pregunta abierta para añadir y valorar otras posibles alternativas a la demostración).
- Presencia de la demostración en el currículo, pruebas de evaluación y libros de texto (ejemplos de ítems con escala Likert: «Actualmente, la demostración es frecuente en los currículos de matemáticas» o «En mi escuela es habitual la presencia de demostraciones en las pruebas de evaluación»).
- Situación actual de la demostración en las aulas de Secundaria (ejemplos de ítems con escala Likert: «Se está perdiendo el rigor y el sentido matemático» o «El número de demostraciones en los manuales escolares está bajando»).
- La enseñanza de la demostración matemática por el docente (ejemplo de algunos ítems de un grupo, donde ha de valorarse cada ítem con escala Likert: «Valore su grado de acuerdo con los siguientes enunciados sobre la enseñanza de las demostraciones: partir de lo concreto para ir a lo general, partir de lo general para ir a lo concreto, hay que usar un lenguaje matemático formal, hay que usar un lenguaje matemático ajustado al nivel de los alumnos...»).
- Actitud del docente hacia la demostración en su práctica docente (ejemplos de ítems con escala Likert: «Actualmente, me gustan las demostraciones» o «La demostración es necesaria para aprender las matemáticas»).
- El aprendizaje de la demostración matemática y las dificultades de los alumnos (ejemplo de algunos ítems de un grupo, donde cada ítem se valora con escala Likert: «Valore su grado de acuerdo con los siguientes enunciados

como razones que pueden explicar la falta de comprensión de las demostraciones matemáticas: falta de estudio, falta de asimilación de los conceptos fundamentales, exceso de mecanización, indisciplina y falta de atención, falta de coordinación entre profesores de matemáticas...»).

- Actitudes percibidas en los alumnos hacia la demostración matemática (ejemplo de un grupo de ítems, donde cada uno ha de valorarse con escala Likert: «La actitud de la mayoría de los alumnos cuando hace una demostración es: atención, interés, curiosidad, incomprensión, confusión, contestación, indiferencia, indisciplina», junto con una pregunta abierta para añadir otras actitudes mayoritarias no contempladas).
- Destinatarios de las demostraciones (ejemplo de un grupo de ítems, donde cada ítem ha de valorarse con escala Likert: «Las demostraciones son esencialmente para: matemáticos, investigadores, profesores, alumnos del grado de Matemáticas, todos los alumnos, los alumnos interesados en el asunto, todas las personas»).
- Sugerencias para mejorar la situación de la demostración en la matemática escolar (ejemplo de algunos ítems de un grupo, donde cada uno ha de valorarse con escala Likert: «Valore su grado de acuerdo con las siguientes propuestas para mejorar la situación de la demostración en la escuela: Crear y publicitar materiales con actividades sobre demostración, Introducir más rigor y formalidad en los currículos de matemáticas...»)

El cuestionario fue cumplimentado de forma anónima por una muestra de profesores de Matemáticas de Educación Secundaria más amplia y más diversificada que la anterior. La muestra también fue escogida por disponibilidad, participando 31 docentes portugueses (de la zona de Chaves) y 20 docentes españoles (de las zonas de Ourense y Valladolid). La mayor parte de estos profesores tenían entre 30 y 50 años, casi las tres cuartas partes eran licenciados en Matemáticas, con una media de 16 años de servicio, aunque con diferente número de años de experiencia (no obstante, en general, la mayoría eran profesores experimentados).

Para matizar y ampliar los resultados obtenidos en este segundo cuestionario, así como para poder profundizar en la explicación de algunas respuestas emitidas en el mismo, en la tercera y última fase se realizó una entrevista semiestructurada conjunta a un docente portugués (se identificará en los diálogos como DPor, traducándose al castellano sus intervenciones en la transcripción aquí realizada) y otro español (identificado como DEsp), ambos con suficiente experiencia docente, para que pudieran explicar sus concepciones sobre la demostración en la matemática escolar y establecer un diálogo entre ambos y el entrevistador, que adoptó el papel de moderador.

RESULTADOS

Dado que el desarrollo de la investigación está guiado por la evolución del cuestionario (junto con la entrevista semiestructurada tras la implementación de la segunda versión), dividimos la exposición de resultados sobre las concepciones detectadas en los docentes en relación a la demostración y a su enseñanza y aprendizaje en dos apartados, teniendo presente también el conocimiento desarrollado durante la implementación y análisis de datos derivado de la primera versión del cuestionario para la elaboración y refinamiento de la versión definitiva del mismo.

RESULTADOS TRAS APLICAR LA PRIMERA VERSIÓN DEL CUESTIONARIO

La característica principal que destacó en las respuestas dadas por los 20 profesores de Secundaria participantes fue la variedad entre unas y otras, atisbándose una importante heterogeneidad en las concepciones manifestadas. Se apreció una diferencia significativa entre los profesores con mayor experiencia docente, que hacen más demostraciones en el aula que los profesores con menos años de servicio. No se apreciaron diferencias significativas entre hombres y mujeres en su uso en el aula, aunque se detectó una mayor preocupación por la demostración entre los hombres.

Comenzando con la parte más ligada a las concepciones sobre la demostración, al presentarles a los docentes las funciones de la demostración de de Villiers (1993), casi las tres cuartas partes no encontraron otras funciones además de esas cinco. El resto de los docentes sí que enunciaron otras posibles funciones, entre las que destacan las funciones «de aprendizaje», «estética», «de satisfacción personal», «de estructuración», «de interpretación» y «de desarrollo». Además, al preguntar a los docentes por sus preferencias ante cinco pruebas distintas de la fórmula para sumar los primeros N números naturales, la mayoría se decantaron por la prueba de Gauss, por considerarla formal y explicativa, y por la prueba aplicando el principio de inducción, que encuentran formal y completa. Por el contrario, casi ninguno se decantó por pruebas de tipo geométrico, aunque son las que ellos consideran como más explicativas. Esa falta de valoración del rol explicativo es coincidente con lo obtenido por Knuth (2002a).

Desde un punto de vista de la demostración en la matemática escolar, un porcentaje muy alto (80%) de profesores afirmó que la demostración es necesaria para un aprendizaje eficaz de la matemática. Los docentes indican que las demostraciones ayudan a los alumnos a familiarizarse con los procesos matemáticos y con el lenguaje matemático, a distinguir las demostraciones de los ejemplos y a comprender mejor el teorema que se está anunciando. Además, también atribuyen otras funciones específicas a las demostraciones en el contexto escolar:

- Entrar en el dominio abstracto.
- Desarrollar razonamientos a través de principios verdaderos, con el fin de alcanzar, por medio de la evidencia y de la deducción, verdades que no se manifiestan a primera vista o que se ponen en cuestión.
- Función de abstracción.
- Función de motivación.

Se percibe que los docentes declararon hacer más demostraciones cuanto mayor utilidad veían a las mismas. Aproximadamente la mitad expresaron que la demostración es el mejor medio para persuadir y convencer, la otra mitad indicaron otras posibles alternativas para ese propósito de convencer y persuadir, por ejemplo, los «esquemas intuitivos», «la semejanza con otros problemas», «los procesos numéricos», «los procesos geométricos», «los ejemplos concretos», o «el uso de la calculadora y el ordenador».

Esta alta valoración general de la demostración en la matemática escolar entra en contradicción con que más de la mitad de los docentes participantes declararan que hacen pocas demostraciones en su práctica de aula. Indicamos a continuación algunos argumentos (traducidos del portugués), dados por ellos, a favor o en contra de realizar demostraciones en el aula de matemáticas:

- A favor: «Da certeza y seguridad y ayuda a desarrollar capacidades de estructuración y razonamiento», «Estimula la comprensión matemática», «Facilita el aprendizaje de las matemáticas», «Permite saber que el resultado puede aplicarse en todas las situaciones», «Mostrar la interconexión de algunos conceptos», «Permite asimilar mejor el teorema, sus implicaciones y sus aplicaciones».
- En contra: «A los alumnos no les gustan las demostraciones», «Desmotivan a los alumnos», «El futuro requerirá otras tecnologías», «Los alumnos prefieren los ejercicios».

Muchos docentes manifestaron que perciben una actitud negativa en los alumnos cuando se realizan demostraciones en el aula, preguntando éstos «por qué tenemos que demostrar» o, en algunos casos, reclamando que ese tiempo se dedique a hacer ejercicios, o que no se hagan razonamientos generales «con letras» u objetos genéricos puesto que no entienden lo que se está haciendo. Además, algo más de un tercio de los docentes participantes afirmaron que no consiguen mantener la concentración de los alumnos cuando se hace una demostración en el aula, y que estos deberían ser formados en técnicas y estrategias demostrativas.

La mayor parte de los participantes coincidió en señalar que los libros de texto tienen pocas demostraciones, y que tampoco presentan alternativas a las demostraciones, aunque se mostraron contrarios a que se incluyan más ejemplos en detrimento

de las demostraciones. Casi la mitad de los docentes indicó que procura hacer demostraciones independientemente de los manuales, ya que el docente debe complementar los mismos sirviendo de acompañamiento a los alumnos en el desarrollo de su comprensión. Un número similar de docentes declaró que deberían demostrarse todos los teoremas contenidos en el currículo de los cursos de matemáticas.

En relación a las características del aprendizaje de la demostración, más de la mitad de los profesores declararon conocer los esquemas de prueba analíticos e inductivos, pocos manifestaron conocer los empíricos y menos aún los de convicción externa. Sin embargo, pocos profesores declararon utilizar gran parte de ellos en las clases. Una gran mayoría reconoció que muchos alumnos no saben distinguir las demostraciones de otros procesos matemáticos, así como lo que es una hipótesis y una tesis en un teorema. Para avanzar en la superación de estas dificultades, sugirieron presentar los enunciados evidenciando cuál es la hipótesis y la tesis.

Además, la gran mayoría de los docentes destacó el escaso tiempo para hacer demostraciones que tienen por la carga horaria de la asignatura, y la escasa formación de muchos docentes al respecto, por lo que piensan que parte del problema con la demostración se suavizaría con una mayor formación de los docentes, una mayor carga horaria de la asignatura, un mayor nivel de exigencia, apostar por la búsqueda de un mayor rigor científico en las respuestas de los alumnos y tener una mayor preocupación por el desarrollo del alumno.

RESULTADOS TRAS IMPLEMENTAR LA SEGUNDA VERSIÓN DEL CUESTIONARIO Y MATIZACIÓN DE LOS MISMOS CON LA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

El análisis de las respuestas dadas por los profesores en la primera versión del cuestionario permitió inferir la presencia de concepciones muy diferentes sobre la demostración en la matemática escolar y sus procesos de enseñanza-aprendizaje, como se ha puesto de manifiesto en el subapartado anterior.

Para profundizar en ellas, se analizaron pormenorizadamente las respuestas y se rediseñó y refinó el cuestionario buscando detectar diferentes perfiles en grupos numerosos de profesores de Secundaria en ejercicio. El análisis de las respuestas permitió, de nuevo, contrastar la presencia de algunas concepciones comunes en algunos temas, pero de concepciones diversas en otros aspectos abordados en el cuestionario. Como dato, en todos los ítems del cuestionario con escala Likert fueron marcadas, al menos por un profesor, cada una de las puntuaciones posibles. Este contraste permitió clasificar a los docentes participantes en diferentes perfiles dentro de algunos de los temas tratados en el cuestionario, a partir de la comparación de sus respuestas dadas en los ítems o grupos de ítems asociados a un determinado tema. Esos resultados fueron matizados y ampliados con la entrevista, en la que se pudo profundizar, a través de las respuestas de los dos profesores

entrevistados, en las características de algunos de los perfiles detectados. Pasamos a explicar los resultados obtenidos.

En relación a cómo perciben los docentes que es su formación sobre la demostración y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la misma, casi todos indican que en la universidad aprendieron a demostrar, pero no a tener una formación didáctica sobre la demostración y sobre cómo enseñar a demostrar o a desarrollar el aprendizaje de la demostración en el alumnado, emergiendo en algunos de ellos una formación de carácter autodidacta. En ese sentido, los dos docentes entrevistados afirmaron:

1. DPor: La actualización se hace con... no de una manera... ministerial, es decir, con el apoyo de elementos del Ministerio de Educación, sino por... por... mero... orgullo personal.
2. DEsp: Pienso que, en la formación universitaria, lo que hacemos es aprender a demostrar; pero, luego, para aprender a enseñar demostraciones en Secundaria... Para eso, va uno a hacer formación por su cuenta.

No se evidenció un consenso entre los participantes al concebir la demostración como una competencia esencial de un profesor de matemáticas, detectándose tres perfiles de docentes:

- *Pro-demostrativo*, que asume que la demostración es una competencia esencial del profesor de matemáticas.
- *Anti-demostrativo*, que no incluye la demostración entre las competencias fundamentales del profesor de matemáticas.
- *Neutro*, que deja que los programas formativos y curriculares se encarguen de determinar qué competencias ha de tener un profesor de matemáticas.

Casi dos tercios de los participantes fueron catalogados como pro-demostrativos, aunque son menos de la mitad los profesores participantes que declararon que tienen la costumbre de hacer en el aula las demostraciones de los teoremas más importantes, otros las sustituyen total o parcialmente por ejemplos, esquemas u otras formas de argumentar. Así, también hay diferentes visiones de la demostración como contenido propio del currículo.

Al preguntarles sobre el rol y las funciones de la demostración en la matemática escolar, emergió una contraposición en la cualidad más valorada en una demostración, entre su carácter formal y su carácter explicativo. Atendiendo a este aspecto, surge otra clasificación en tres grupos:

- *Explicativo*, con preferencia por demostraciones más explicativas.
- *Formal*, que considera prioritarias las demostraciones formales.
- *Estático*, que no se preocupa por las particularidades de las demostraciones.

Además, al igual que en la aplicación de la primera versión del cuestionario, se evidenció una división muy grande entre los docentes participantes sobre si consideraban (o no) a las demostraciones como el mejor camino para convencer y persuadir a los alumnos de la veracidad o falsedad de un enunciado matemático. Se encontraron así tres tipos de docentes:

- *Exactos*, que únicamente asocian el convencimiento y la persuasión a la demostración.
- *Intuitivos*, que dan más valor de convencimiento y persuasión a las argumentaciones evidentes o de carácter práctico o empírico que a las demostraciones.
- *Adaptables*, que aventuran que la forma de convencer y persuadir depende de las situaciones.

Los profesores valoran especialmente dos alternativas o complementos a la demostración, como son las pruebas visuales y las explicaciones de carácter escrito. En relación con este hecho, los dos profesores entrevistados mostraron un posicionamiento cambiante hacia métodos con un menor rigor. El profesor portugués indicó que «yo noto que nosotros, como profesionales de las matemáticas, muchas veces usamos los esquemas y los métodos más... más estandarizados, más usados, más vulgares», a lo que la profesora española replicó que «en realidad, tal como está ahora, muchas veces, no vemos obligados a limitarnos a la visualización...».

Sobre la presencia y la situación de la demostración en el currículo, todos los docentes afirmaron que perciben una desaparición gradual de la demostración matemática en los currículos de matemáticas. Valgan como ejemplo estos extractos de la entrevista a los dos docentes:

1. DPor: Se redujo sustancialmente [la demostración] y se fue reduciendo prácticamente a... a cero... Por lo tanto, pocas son las demostraciones y, si existen demostraciones, son por observación geométrica.
2. DEsp: Con la normativa LOGSE, se perdió la demostración por completo; se ha ido de demostrar prácticamente todo a no demostrar nada... aunque quiera ya no hago algo de demostración.

También casi todos los docentes afirmaron que las demostraciones son poco frecuentes en los libros de texto. Sin embargo, no todos mostraron preocupación por esa desaparición gradual percibida. Aproximadamente dos tercios de los docentes sí mostraban descontento y preocupación por este aspecto, pero los restantes declararon su indiferencia ante este hecho.

La mayor parte de los profesores indicó que le gustan las demostraciones desde su formación universitaria, y que le siguen gustando como profesor, aunque

afirmaron que hacen pocas demostraciones en su formación continua. En relación a qué rol conciben para la demostración en la enseñanza de las matemáticas, de nuevo una mayoría de docentes manifestó la necesidad de las demostraciones para desarrollar un buen aprendizaje de las matemáticas, aunque también hubo respuestas en otros sentidos. Así, los docentes pueden clasificarse en tres perfiles:

- *Favorable*, que se muestra a favor de la enseñanza de las demostraciones para un buen aprendizaje de las matemáticas y un buen desarrollo del razonamiento.
- *Contrario*, que es contrario a la enseñanza de las demostraciones, por no ver en ellas ningún beneficio educativo.
- *Imparcial*, que no es contrario ni favorable a la enseñanza de las demostraciones, depende del contexto, de los alumnos y de la propia demostración.

También se detectaron tres grupos en relación con el modo en que conciben que han de presentarse los enunciados y teoremas matemáticos en el aula:

- *Clásico/formal*, que suelen partir de lo general para llegar a lo concreto, de la demostración formal para hacer después un ejemplo de aplicación.
- *Práctico*, que suelen partir de lo concreto para llegar a lo general, del ejemplo particular a la demostración.
- *Didáctico*, que adaptan la forma de presentar los contenidos a las situaciones.

En relación al aprendizaje de la demostración matemática, y al igual que en la primera versión del cuestionario, los profesores afirmaron que gran parte de los alumnos no llegan a entender las demostraciones y su rol, aunque sí que los docentes dijeron hacerlas con una intencionalidad didáctica. Destacamos algunas respuestas:

- «La mayoría de los alumnos, generalmente, no entienden que un contraejemplo prueba que una proposición determinada es, al final, falsa».
- «La mayoría de los alumnos confunde demostraciones con ejercicios».
- «La mayor parte de los alumnos no entiende las demostraciones».
- «A veces, la mayoría de los alumnos no entienden los enunciados propuestos».

Al indagar en el cuestionario sobre cuáles creen que son los focos de que los alumnos tengan tantas dificultades con las demostraciones, en algunos casos se mencionó la conducta escolar, pero en otros también el sistema escolar y la concepción de las matemáticas que van desarrollando los estudiantes. Por ejemplo, algunos profesores destacaron los modos de estudio basados en la realización de ejercicios de forma mecánica, sin comprender «la teoría», o el poco uso y aprovechamiento por parte de los docentes de los propios esquemas de prueba de los alumnos en el

desarrollo de la docencia. Además, en la entrevista surgió otro aspecto problemático, como son las dificultades en los alumnos para entender el lenguaje matemático del que, en particular, se hace uso en las demostraciones:

1. DPor: Para convencer al alumno es preciso que la comunicación matemática exista, o sea, que el alumno entienda al profesor. Esto tiene que variar a lo largo de la edad... en función de la edad del alumno y... Pero la matemática, por naturaleza, para que pueda entenderse tiene que ser... comprendida.
2. DEsp: Sí. Una de las cosas que decías, que es la dificultad que encuentran en el lenguaje... y es que ya incluso en el lenguaje cotidiano...

Al preguntarles sobre si suelen hacer uso de los esquemas de prueba manifestados por los propios alumnos al trabajar los teoremas en el aula, de nuevo hay una diversidad de respuestas en el profesorado participante, lo que permite establecer una clasificación en tres grupos:

- *Evolucionista*, que suele aprovechar las formas de pensar y los esquemas de prueba de los alumnos para tratar de mejorarlos gradualmente.
- *Flexible*, que únicamente considera a veces los mecanismos o esquemas de prueba de los estudiantes.
- *Egocéntrico*, que no se interesa por el estado de maduración de los esquemas de prueba de sus alumnos.

La casi totalidad de los profesores estuvo de acuerdo en afirmar que las demostraciones son para los matemáticos, pero hubo mayor controversia al preguntar si también eran algo para los alumnos o no. Algunos docentes expresaron que creen que las demostraciones son esenciales para todos los alumnos, otros pensaban que las demostraciones han de ser solo para los alumnos más interesados.

Los profesores encuestados manifestaron que perciben que son pocos los alumnos que muestran interés, curiosidad o atención cuando se realiza una demostración en clase. Por el contrario, indicaron que son muchos los estudiantes que adoptan comportamientos indisciplinados, contestatarios, indiferentes, confusos y manifiestan no llegar a comprender el rol de la demostración. Ante esta situación, la actitud que adoptan los profesores es muy diferente, pudiéndose clasificar los profesores en tres grupos:

- *Rendido*, que desiste de hacer una demostración ante el rechazo de los alumnos.
- *Persistente*, que intenta hacer demostraciones, incluso contra las objeciones del alumnado.
- *Adaptativo*, que busca alternativas que permitan demostrar lo deseado.

Sobre esta cuestión también se preguntó a los dos profesores entrevistados, sobre cuál es su reacción cuando los alumnos rechazan una demostración que se está haciendo. El profesor portugués afirmó que «intento... ir por otros caminos... se intenta hacer de otras formas», mostrando un perfil adaptativo. Mientras, la profesora española mostró un perfil más persistente: «yo trato de convencerles... de la importancia de la demostración, de que aprendan a demostrar como forma de razonamiento».

A MODO DE CONCLUSIÓN

La investigación descrita anteriormente evidencia que existe una amplia variedad de concepciones en el profesorado en ejercicio acerca de la demostración en la matemática escolar, y a su proceso de enseñanza y aprendizaje. Estas concepciones influirán en la práctica docente de los diferentes profesores, por lo que es una línea de investigación que precisa de una mayor atención en la investigación en educación matemática. En particular, aquí se han generado perfiles de docentes atendiendo a temas concretos ligados a esas concepciones, pero queda pendiente como paso siguiente buscar una detección de perfiles más global en relación con la demostración matemática, y su enseñanza y aprendizaje.

Además, se observan ciertos resultados recurrentes en las diferentes investigaciones realizadas en torno a las concepciones del profesorado sobre la demostración, y que nos llevan a postular las siguientes ideas:

- La demostración en la enseñanza de las matemáticas ha ido desapareciendo a lo largo de los años con las diferentes reformas curriculares: ha disminuido su presencia en los libros de texto, como se desprende de Conejo, Arce y Ortega (2015), pero también de la práctica docente de muchos docentes en ejercicio, como declaran los profesores encuestados en este estudio, o como se deduce del realizado por Kotelawala (2016). Esto se puede deber a varias razones, entre las que se puede destacar la falta de interés del alumnado en las mismas así como las importantes dificultades que se presentan en la comprensión de este proceso por parte de los estudiantes, que parecen querer evitarse (y no tratar de superarse).
- En contraposición al punto anterior, la mayoría de los profesores en ejercicio consideran este proceso como un proceso muy importante tanto en las matemáticas como en su enseñanza, y destacan su función de explicación en la matemática escolar (y no tanto cuando hablan de la demostración desde un punto de vista matemático) frente a otras funciones de la demostración. Esta función, como defiende Hanna (1995), es una de las más importantes, puesto que las demostraciones permiten una mayor profundización en la comprensión de algunos conceptos. Por este motivo, llama más la atención

el hecho de que a pesar de la importancia que le conceden los profesores en ejercicio a este proceso, no busquen incorporarla más en su práctica docente.

- Además del desinterés de los alumnos, motivo manifestado por algunos profesores para no utilizar la demostración en sus clases, se desprende del estudio de Dos Santos (2010), así como del de Knuth (2002a, 2002b) y el de Vicario y Carrillo (2005), que podrían existir ciertas lagunas de formación que tiene el profesorado de matemáticas tanto sobre la demostración matemática como proceso como sobre los aspectos didácticos de la misma.

En relación al último punto, el trabajo de Torregrosa-Gironés et al. (2010) evidencia que las tareas de reflexión sobre la demostración y su enseñanza llevan a los docentes a considerar su importancia en el proceso de aprendizaje matemático, lo que nos lleva a postular que dentro de la formación del profesorado en Secundaria es totalmente necesaria y pertinente la formación sobre aspectos del propio proceso de demostrar así como de una formación didáctica sobre el mismo, idea que además es defendida por Knuth (2002a, 2002b). En este sentido, creemos que dicha formación modificaría las concepciones (Thompson, 1992) del profesorado en torno a la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje, bien sea porque matizan el significado que los docentes asignan a la demostración, principalmente en la etapa de Enseñanza Secundaria, o porque puedan modificar sus creencias en torno a las funciones de este proceso en la enseñanza del mismo. Creemos que a esta formación contribuyen las otras investigaciones realizadas en la Universidad de Valladolid y que se han descrito brevemente en este capítulo, como son las conclusiones obtenidas de los estudios de Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (1997, 2001, 2003), entre las que destacamos la importancia de conocer los diferentes esquemas de prueba que puede tener un alumno, y utilizarlos para hacerlos progresar hacia esquemas de prueba de tipo analítico, y ser conscientes de que las demostraciones matemáticas formales (esquemas de prueba axiomáticos) no siempre son entendidas por los alumnos, ni son capaces de identificar el enunciado de un resultado que se ha demostrado o distinguir las hipótesis y la tesis.

Por otro lado, y viendo la relevancia que tienen las concepciones del profesorado acerca de la demostración en la matemática escolar, consideramos que es totalmente necesario continuar estudiando si esas concepciones están basadas en elementos de conocimiento o en creencias desarrolladas por el docente, y plantear estudios en los que profundizar en la interrelación de conocimientos y creencias. Avances en estos aspectos permitirían detectar elementos de mejora de la práctica docente y realmente aprovechar las ventajas didácticas de la demostración, lo que en nuestra opinión contribuiría a mejorar la motivación del alumnado, así como a mostrar una versión más real de lo que es la ciencia matemática, alejada de la simple mecanización de algoritmos y recetas.

REFERENCIAS

- Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13(1), 41-61.
- Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 51-71.
- Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-151). New York, NY: Cambridge University Press.
- de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30. Original de 1990.
- Dos Santos, C. (2010). *A demonstração matemática e o professor. Formulação e ensino*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.
- Dos Santos, C. y Ortega, T. (2013). Perfiles del Profesorado sobre la Enseñanza y Uso de la Demostración. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 27-45.
- González, J. C. (2012). *Estudio de Contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). New York, NY: Springer.
- Hanna, G. y de Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study*. New York, NY: Springer.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Ibañez, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de 1º curso de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.
- Ibañez, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*, 9(2), 65-104.
- Ibañez, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.

- Ibañes, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), 49-63.
- Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.
- Kotelawala, U. (2016). The Status of Proving Among US Secondary Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(6), 1113-1131.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-203). Rotterdam, Países Bajos: Sense.
- Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 75-89). Londres, Reino Unido: Routledge.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester, Jr. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age.
- Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5-41.
- Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80.
- Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective*. Cham, Suiza: Springer.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Nueva York, NY: MacMillan Publishing Company.
- Torregrosa-Gironés, G., Haro, M. J., Penalva, M. C. y Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación*, 352, 379-404.
- Van Asch, A. G., (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(2), 301-313.
- Vicario, V. y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz-Machado, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 145-152). SEIEM: Córdoba.