ACTIVIDADES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DERIVADAS DEL USO DE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ACTIVITIES FOR TEACHER INSTRUCTION DERIVED FROM THE USE OF GEOGEBRA DURING PROBLEM SOLVING

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J. y Hernández, A.
Universidad de La Laguna

RESUMEN

La formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria necesita introducir elementos que ofrezcan a los futuros profesores oportunidades para conocer, experimentar y reflexionar sobre cuál debe ser el papel de las tecnologías digitales en escenarios de resolución de problemas. El objetivo de este trabajo consiste en identificar eventos que emergen del uso de la tecnología cuando se resuelven problemas, con el fin de convertirlos en situaciones o actividades que promuevan el análisis, por parte del futuro profesor, de diversas ideas matemáticas que se relacionan con los conceptos matemáticos que aparecen involucrados. Se presenta un estudio de caso, el de una pareja de estudiantes del Grado en Matemáticas y se identifican tres situaciones que surgen al analizar las discusiones de los estudiantes durante el proceso de resolución de un problema con el Sistema de Geometría Dinámica GeoGebra.

Palabras clave: *Resolución de problemas, tecnologías digitales, GeoGebra, formación de profesores de Educación Secundaria*.

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J. y Hernández, A. (2019). Actividades para la formación de profesores derivadas del uso de GeoGebra en la resolución de problemas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 373-396). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

Mathematics teaching and learning processes in today's society, requires the introduction of new elements in teacher training, which offer future teachers opportunities to learn, experiment and reflect on what should be the role of digital technologies in those scenarios. The objective of this work is to identify events that emerge from the use of technology in solving mathematical problems in order to convert them into tasks for secondary school mathematics teachers training. We present the analysis of a case, that of a couple of students of the Degree in Mathematics, solving a problem with GeoGebra. Three situations were identified, by analyzing the students' discussions during the resolution process, in which the episodes of comprehension, exploration and search of multiple approaches to the situation were distinguished.

Keywords: *problem solving, technology, GeoGebra, secondary teachers' training*.

INTRODUCCIÓN

La incorporación de la tecnología en la Educación Secundaria ha provocado, en la última década, movimientos de innovación docente e investigaciones en didáctica de la matemática, referidos a cómo la tecnología produce cambios en la forma de enseñar, e incluso en qué enseñar. Algunas de esas investigaciones han mostrado, por ejemplo, que el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra, en la resolución de problemas matemáticos, permite a los resolutores representar y explorar una situación desde diversas aproximaciones, establecer relaciones entre diferentes conceptos, profundizar en los significados y razonamientos, formular conjeturas y argumentos, contribuyendo así al enriquecimiento de las discusiones matemáticas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009).

La aparición de esta riqueza matemática depende en gran medida de la forma en que la actividad se presente. Camacho-Machín, Afonso y Moreno (2014), a partir de la comparación del proceso de resolución de problemas con lápiz y papel y GeoGebra, diseñaron una *guía de implementación* que explicitaba diferentes aproximaciones para facilitar la resolución del problema, en la que se aprovechasen las potencialidades del uso del SGD. Si las actividades, además, se realizan en parejas o grupos, se genera un espacio que permite identificar elementos de la comprensión matemática de los estudiantes como su competencia conceptual o estratégica, la flexibilidad de sus razonamientos, las conexiones, conjeturas o justificaciones que realizan (Hernández, Perdomo-Díaz y Camacho-Machín, 2017). Los resultados de estas y otras investigaciones han promovido que la tecnología comience a considerarse como uno de los elementos centrales en la formación docente.

Este capítulo recoge parte de una investigación con estudiantes de la asignatura *Matemáticas para la Enseñanza*, optativa de 4º del Grado en Matemáticas, en la que se muestra un primer acercamiento a la profesión docente y donde la tecnología tiene un papel central. Entre los objetivos de la asignatura figuran: *desarrollar competencias teóricas, prácticas e instrumentales vinculadas a la actividad de enseñar matemáticas que capaciten para tomar decisiones adecuadas relativas a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Secundaria y de universidad; conocer, utilizar y elaborar estrategias heurísticas para la resolución de problemas de Matemáticas susceptibles de ser enseñadas en la Educación Secundaria; conocer y utilizar nuevos instrumentos interactivos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas haciendo uso de TIC.* Para el logro de estos objetivos, se diseñó un Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra.

En este capítulo se presenta el análisis de las discusiones, estrategias y razonamientos matemáticos que mostraron los estudiantes en ese Taller, al utilizar GeoGebra para resolver problemas. Nuestro interés radica en identificar momentos en los que el uso de la tecnología haya hecho aparecer discusiones o reflexiones de los estudiantes acerca de las matemáticas que conocen. A partir de este análisis, utilizando una metodología análoga a la propuesta por Heid, Wilson y Blume (2015) para generar actividades para la formación de profesores de matemáticas de Secundaria, se formula un conjunto de actividades que se espera que resulten útiles para la formación docente, contribuyendo al desarrollo de la comprensión matemática necesaria para la enseñanza de la disciplina en Educación Secundaria.

MARCO CONCEPTUAL

Existen distintos modelos para describir el conocimiento o la comprensión de las matemáticas que debe tener un profesor. La mayoría de esos modelos surgen del propuesto por Shulman (1986), que considera dos componentes básicas, el Conocimiento de la Materia y el Conocimiento Pedagógico, a partir de las cuales define el Conocimiento Didáctico de la Materia, en el que se enfatiza la necesidad de mirar los elementos didácticos desde la especificidad de cada materia. A raíz de esa necesidad, en el ámbito de la matemática surgieron modelos como el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames, y Phelps, 2008) o el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Contreras, y Flores, 2013). Kilpatrick (2015) propone un modelo para la comprensión matemática para la enseñanza en secundaria, denominado MUST por las siglas en inglés (Mathematical Understanding for Secondary Teaching). Este modelo considera importante la naturaleza dinámica del conocimiento de los profesores, al entender que éste está en un proceso de evolución continua, que se va enriqueciendo a medida que se enfrenta a situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los autores utilizan el término comprensión (understanding) en vez de conocimiento (knowledge) para recoger esa connotación dinámica (Kilpatrick, 2015).

El MUST describe la comprensión matemática que necesita tener un profesor de matemáticas de Educación Secundaria como un constructo que se puede observar desde tres perspectivas fuertemente relacionadas entre sí, que se denominan *Competencia Matemática, Actividad Matemática y Contexto Matemático de la Enseñanza*[1]. Cada una de estas perspectivas se describe a partir de componentes y aspectos necesarios en la enseñanza. La Competencia Matemática hace referencia a los conocimientos y las habilidades matemáticas que un profesor necesita para enseñar la disciplina en la Educación Secundaria, que incluye no solo las matemáticas correspondientes a este nivel educativo sino también las de los niveles anteriores y posteriores. La perspectiva denominada Actividad Matemática se refiere al conjunto de acciones matemáticas específicas que el docente tiene que realizar como parte de su profesión, tales como conectar conceptos, justificar argumentos o generalizar hechos matemáticos. Por último, el Contexto Matemático de Enseñanza incluye aspectos de la comprensión matemática que entran en juego de forma exclusiva en la profesión docente, tal como entender el pensamiento matemático de los estudiantes, reconociendo la naturaleza matemática de sus dudas y errores o reconocer cuándo un argumento o una solución proporcionada por un alumno está incompleta o satisface las condiciones de un problema.

En Heid, Wilson y Blume (2015, p.15) se describen las distintas componentes de las tres perspectivas. En este estudio se utilizan de forma explícita tanto en el análisis como en la propuesta de actividades, las que se describen con más detalle a continuación:

- Comprensión conceptual se describe como la capacidad de entender los conocimientos matemáticos y saber por qué se pueden deducir o cuál es su origen. (Competencia Matemática)
- Competencia estratégica se refiere a la capacidad de crear, evaluar e implementar estrategias de resolución de problemas. Para ello es necesario comprender distintas propiedades y ser capaz de ejecutar distintos procedimientos, con el fin de poder evaluar cuál sería la más efectiva. (Competencia Matemática)
- Razonamiento Matemático hace referencia a la actividad de observar, conjeturar y justificar o demostrar. Haciendo uso de lógica deductiva, propiedades matemáticas, regularidades y patrones, generalizaciones de casos particulares, restricciones de propiedades y extensiones a otras estructuras. (Actividad Matemática)
- Creación Matemática implica capacidad de encontrar nuevos caminos para expresar objetos matemáticos, generar nuevos y transformar su representación. Se muestra al elegir representaciones de objetos que resaltan su estructura, sus restricciones o sus propiedades, cuando se definen objetos nuevos

[1] Mathematical Proficiency, Mathematical Activity and Mathematical context of teaching.

y cuando se manipulan cambiando su forma, pero no su representación. (Actividad Matemática)

El modelo MUST fue desarrollado entre profesores e investigadores con el objetivo de conectar la formación con la práctica docente a partir del trabajo conjunto de ambos colectivos. Las sesiones de trabajo tenían como punto de partida una descripción breve de un evento que transcurrió durante alguna de las facetas de la práctica docente (que el modelo MUST denomina Prompt). Por ejemplo, una duda, pregunta o error de un estudiante durante una clase, alguna reflexión del docente durante la preparación de las clases o al reflexionar sobre lo ocurrido en ellas (Wilson y Zbiek, 2015, p.32).

Parte de la asignatura *Matemáticas para la Enseñanza*, contexto en que se realiza esta investigación, se dedica a la resolución de problemas con GeoGebra y el análisis, por parte de los estudiantes, de su propio proceso de resolución tratando de determinar esas situaciones que dan lugar a eventos similares a los Prompts. Los problemas utilizados abarcan contenidos incluidos en el currículo de matemáticas de la Educación Secundaria, por lo que muchas de las situaciones que se dan son susceptibles de ocurrir en un aula de ese nivel educativo. Se persigue así que las actividades propuestas sean un elemento que permita que los estudiantes de *Matemáticas para la Enseñanza* establezcan conexiones entre las matemáticas que conocen y la práctica docente en un ambiente de resolución de problemas en el que se hace uso de la tecnología.

El trabajo que presentamos comienza con el análisis del proceso de resolución de los estudiantes cuando usan GeoGebra para resolver un problema, describiendo los pasos seguidos e identificando qué aspectos de la comprensión matemática pueden observarse, en la mayoría de los casos desde la perspectiva Actividad Matemática. De ese análisis se extraen una serie de momentos que se transforman en actividades para la formación de profesores, similares a los Prompts, acompañándolas de un conjunto de ideas matemáticas asociadas con elementos de la actividad propuesta. De esta forma se busca generar un conjunto de actividades que hagan referencia explícita a un contexto de enseñanza en el que se resuelven problemas usando tecnología, en particular, situaciones que surgen directamente de la resolución de un problema cuando se utiliza el SGD GeoGebra.

METODOLOGÍA

Nuestro objetivo requiere partir de un entorno de clase de matemáticas en el que se use la tecnología, por lo que se diseñó un Taller de Resolución de Problemas haciendo uso de GeoGebra.

El Taller de Resolución de Problemas

En el diseño de las actividades del taller se pretendía que, haciendo uso de las tecnologías digitales para resolver problemas de matemáticas, se generara un escenario rico en discusiones matemáticas. Para ello se utilizaron los cinco episodios que Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) proponen como parte del proceso de resolución de problemas haciendo uso de tecnología: *Comprensión, Exploración, Búsqueda de múltiples aproximaciones, Extensión* y *Reflexión sobre el proceso*. Los autores además señalan que, en el contexto del uso de un SGD como GeoGebra, los tres primeros episodios cobran especial relevancia. Es por ello, que fijamos nuestra atención en estos tres episodios, diseñando el taller para que esta parte se realizara en las sesiones de clase.

El Taller tuvo una duración total de 18 horas, divididas en 9 sesiones de dos horas cada una. En el mismo participaron 18 estudiantes de 4º curso del Grado de Matemáticas, que fueron distribuidos en parejas. En total se propuso a los estudiantes cuatro problemas, previamente analizados por el equipo investigador, desde diferentes aproximaciones y con sus distintas opciones de solución.

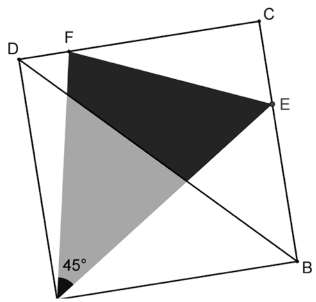
En este capítulo se presenta el estudio de un caso, correspondiente al trabajo realizado por una de las parejas de estudiantes, Sophie y Evan (pseudónimos), en uno de los problemas propuesto, denominado «*Ángulo 45º*» (Tabla 1). Con la información se trata de profundizar en el análisis del proceso de resolución de los estudiantes y explicar con detalle cómo, con vistas a la formación de profesores, se generan actividades y se identifican ideas matemáticas a partir de dicho análisis.

El problema «*Ángulo 45º*»

El enunciado del problema, tal cual se presentó a los estudiantes fue el siguiente:

Tabla 1: Enunciado del problema

Dado un cuadrado ABCD, se traza un ángulo de 45° interior al cuadrado y con vértice en A. De esta manera las dos semirrectas del ángulo cortan a los lados opuestos a A en dos puntos E y F (ver Figura). Estudia la relación que existe entre las dos partes en las que queda dividido el triángulo AEF por la diagonal BD.



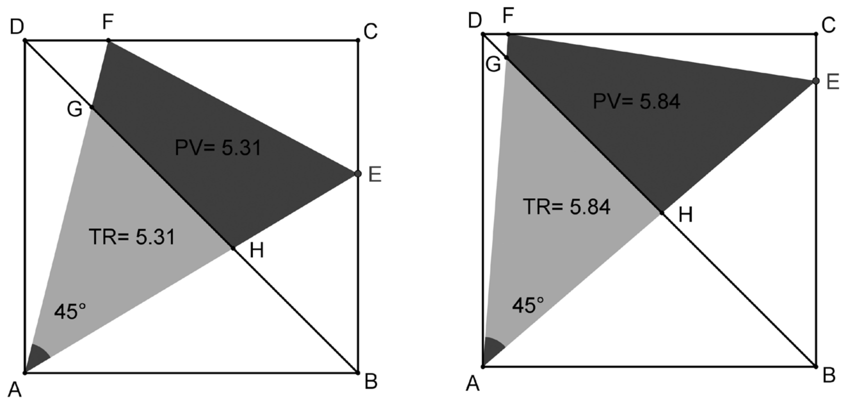
Una resolución de este problema haciendo uso de SGD

Usar GeoGebra para resolver este problema conlleva realizar una construcción dinámica que nos permita explorar las propiedades de la figura y hacer conjeturas útiles para realizar distintas aproximaciones a la solución. Presentaremos, a continuación, parte del análisis desarrollado por el equipo investigador previo a la presentación del problema a los participantes en la investigación.

Comprensión

Utilizando los datos del enunciado, realizamos una construcción dinámica (https://www.geogebra.org/m/becux5uh). Esta construcción permite visualizar, al arrastrar el punto E sobre el lado BC, distintas posiciones para el ángulo de 45º que dibuja distintos triángulos de vértices AEF (Figura 1). Al estudiar las dos partes en que queda dividido el triángulo, se puede observar que, aunque cambian de forma y de tamaño, el área de ambas coincide en cada caso.

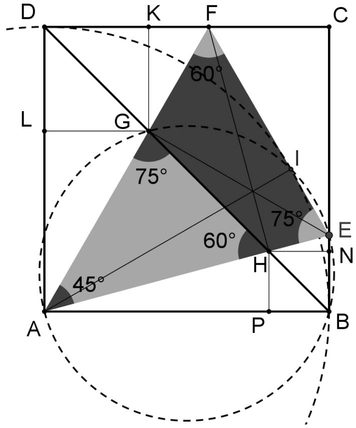
Figura 1: Distintas posiciones de la figura, al arrastrar E sobre BC



Exploración

Para poder tener una idea más clara del problema, se pueden trazar y añadir otros elementos a la figura, como rectas, segmentos, puntos, circunferencias y ángulos (Figura 2). Estudiando cada uno de ellos al arrastrar el punto E, se pueden observar regularidades y variaciones que permiten descubrir propiedades y hacer conjeturas. Por ejemplo: El punto medio de AE es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G; las diagonales del cuadrilátero EFGH coinciden con dos de las alturas del triángulo AEF; los cuadriláteros PBNH y DLGK son cuadrados (entre otras).

Figura 2: Construcción con elementos trazados durante la exploración



Búsqueda de múltiples aproximaciones

Al explorar la figura con los nuevos elementos se pueden descubrir varias propiedades, algunas de las cuáles se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Propiedades y conjeturas que hemos podido observar en la figura del problema

Observaciones	A1	A2	A3
Las diagonales del cuadrilátero EFGH coinciden con dos de las alturas del triángulo AEF.	□	■	■
La altura del triángulo AEF desde A hasta el lado EF es constante e igual a la medida del lado AB.	□	■	□
La circunferencia de centro A y radio el lado del cuadrado es tangente al segmento EF.	□	□	□
Los puntos A, B, E y G son cocíclicos. Igualmente, los puntos A, D, F y H.	□	■	■
El punto medio de AE es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G.	□	□	■
El segmento con extremos el punto medio de AE y G es una altura del triángulo AGH.	□	□	■
La suma de las áreas de los triángulos ABG y ADH coincide con las de BEG, CEF y DFH.	■	□	□
El triángulo AHG es semejante al triángulo AEF.	□	■	□
Los cuadriláteros PBNH y DLGK son cuadrados.	■	□	□

(A1, A2 y A3, son las diferentes aproximaciones o maneras de resolver el problema que se presentarán en lo que sigue)

Una parte importante de la resolución de problemas es abordar de distintas maneras el camino hacia la solución (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). En nuestro análisis del problema revisamos algunas aproximaciones distintas, que se apoyan en diferentes resultados matemáticos. Cada aproximación incluye las justificaciones de alguna de las propiedades (marcadas con ■) que observamos en la Tabla 2, al ser necesarias para formalizar la resolución. Estas tres aproximaciones las denominamos analítica (A1), basada en semejanza (A2) y geométrica (A3).

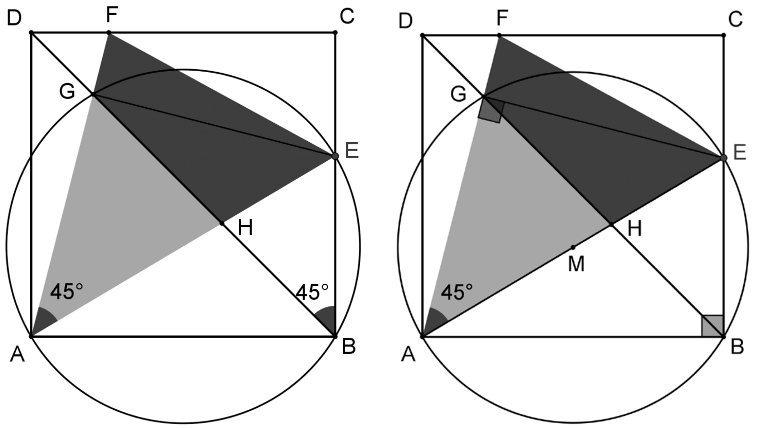
A1: Una aproximación analítica, que se basa en encontrar la relación entre la longitud del lado del cuadrado, las distancias de E y F a los vértices del cuadrado, y el ángulo de 45°. Partiendo de un cuadrado de lado la unidad, utilizando las observaciones hechas en la fase de exploración y que la tangente de 45° es uno, se presenta un sistema de ecuaciones que permite dar con la solución.

A2: Una aproximación basada en la semejanza de triángulos, que usa que la relación entre las áreas de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de proporcionalidad entre sus lados. Demostrando que los triángulos AEF y AGH son semejantes, sólo es necesario demostrar que la razón de proporcionalidad entre los lados del triángulo AGH y el triángulo AEF es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

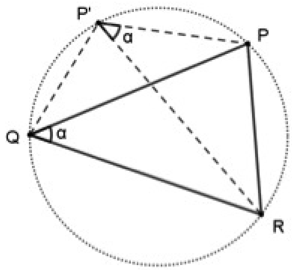
A3: Una aproximación geométrica, que presentamos a continuación como ejemplo, basada en calcular el área del cuadrilátero EFGH y demostrar que es la mitad que la del triángulo AEF. En cada uno de los pasos siguientes se demuestran propiedades necesarias para dar con la solución.

PASO 1: Demostrar que el segmento EG es una de las alturas del triángulo AEF, análogamente el segmento FH también es una altura.

Figura 3: Paso 1 de la aproximación geométrica



- Se cumple que el ángulo GAE = 45°, y que el ángulo GBE mide también 45°, por estar delimitado por la diagonal y el lado del cuadrado. Teniendo en cuenta que ABGE es un cuadrilátero, se deduce que A, B, E y G pertenecen a la misma circunferencia, aplicando el siguiente resultado:



«Dado un triángulo PQR y sea α el ángulo QPR. Si P' es un punto tal que el ángulo PP'R es igual a α y PP'QR es un cuadrilátero simple entonces P' está en la circunferencia que pasa por P, Q y R.» (1)

- Se sabe que el ángulo ABE = 90° y que A, B, E y G pertenecen a la misma circunferencia, por tanto, el ángulo AGE mide 90°, ya que es suplementario al ángulo ABE. Esto se sustenta en (2).

«Los puntos P, R, Q y P' son cocíclicos si y solo si, los ángulos PP'Q y QRP son suplementarios» (2)

Otros resultados que usaremos y se deducen de (3) son: i) AE es el diámetro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G, ii) M, punto medio del segmento AE, es el centro de la circunferencia.

«Un ángulo inscrito en una circunferencia mide 90° si, y solo si, abarca un diámetro de esta» (3)

PASO 2: Demostrar que el triángulo AEG es isósceles y GM es perpendicular al lado AE.

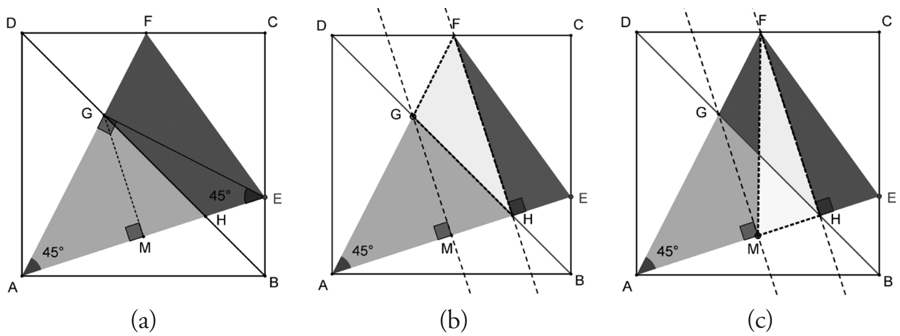
- El ángulo EAG mide 45° luego el ángulo AGE mide 90° y M es el punto medio de AE, se tiene que: el ángulo AEG mide 45°, el triángulo AEG es isósceles y GM su altura (Figura 4a).

PASO 3: Demostrar que el área del triángulo EFM es igual a la del polígono EFGH.

- Se parte de dos propiedades demostradas anteriormente: el ángulo FHA mide 90°, al ser FH altura del triángulo AEF, y el ángulo GMA mide 90°. Por tanto, la recta GM es paralela a la recta FH. Como consecuencia, cualquier triángulo, con vértices F, H y un tercero sobre la recta GM, tendrá de base FH y una altura de medida constante, esto es, los triángulos FGH y

FMH tienen la misma área (son equivalentes), es decir, el área del triángulo EFM es igual a la del polígono EFGH (Figura 4b y 4c)

Figura 4: Paso 2 y 3 de la aproximación geométrica



PASO 4: Demostrar que el área del triángulo AFE es el doble que la del polígono EFGH.

- Teniendo en cuenta que cada mediana de un triángulo lo divide en dos triángulos equivalentes y que FM es una mediana del triángulo AEF, se tiene que el área del triángulo EFM es la mitad del área del triángulo AFE. Usando la propiedad demostrada en el Paso 3 se cumplirá que el área del cuadrilátero EFGH mide la mitad del área del triángulo AFE, que es lo que se había conjeturado desde el momento inicial de comprensión del problema.

Datos

Durante las sesiones de clase se pidió a los estudiantes una construcción en GeoGebra que contemplara los datos del problema, una lista de propiedades o conjeturas observadas en la construcción, un plan para demostrar las conjeturas realizadas y tratar de resolver el problema y, por último, la resolución por escrito del problema.

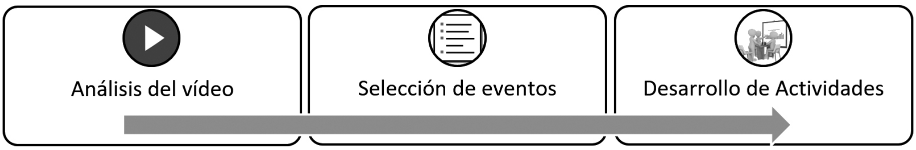
Para realizar el análisis se recopilaron tres tipos de datos: (i) los archivos GeoGebra con las construcciones realizadas por los estudiantes, (ii) los documentos escritos a lápiz y papel, que contenían la lista de propiedades y conjeturas de los estudiantes, su plan de solución y la resolución final del problema, y (iii) la grabación con OBS Studio de las sesiones de trabajo de la pareja, en la que se recogió conjuntamente la imagen de la pantalla del ordenador en el que estaban trabajando y las conversaciones que tuvieron, imagen y sonido, desde una webcam que los enfocaba.

Proceso de análisis

El instrumento principal para analizar la resolución de los estudiantes fue la grabación con OBS. El archivo GeoGebra con la construcción y las notas en papel de los estudiantes sirvieron de apoyo.

A partir del vídeo se identificaron eventos en los que la pareja de estudiantes mantenía una discusión matemática en torno a la resolución del problema planteado, teniendo en cuenta que un evento se identifica como una motivación matemática en forma de pregunta, duda o asunto que capta la atención y necesita resolución (Zbiek y Blume, 2015). El siguiente paso fue, siguiendo el esquema del MUST, pensar en distintas ideas matemáticas que intervendrían en la discusión (Figura 5).

Figura 5: Esquema del proceso seguido para la generación de actividades para la formación docente



En esta investigación se seleccionaron eventos que estuvieran directamente relacionados con el uso del GeoGebra y que mostraran evidencias de algunas de las componentes de la comprensión matemática según el modelo MUST. Dada la naturaleza del Taller, se puso el foco en las componentes *razonamiento matemático* y *creación matemática* de la Actividad Matemática.

Una vez seleccionados los eventos, una manera natural de identificar algunas ideas asociadas es plantearse qué respuesta se daría frente a esa situación o si se podrían dar diferentes respuestas, para luego concentrarse en conectar matemáticamente estas respuestas con el propio evento. De esta forma, cada evento tendrá asociados distintas ideas, las cuáles deben hacer referencia a alguna de las componentes que forman cada una de las perpectivas del MUST descritas en el marco.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Presentamos el análisis del proceso de resolución de Sophie y Evan atendiendo especialmente a los tres primeros episodios de Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009), que son los que transcurren durante las dos sesiones de clase que se le dedica a este problema de forma presencial. Dentro del análisis destacamos en tres tablas las transcripciones de discusiones matemáticas, que son el punto de partida para las actividades e ideas matemáticas que aparecen descritas en la siguiente sección.

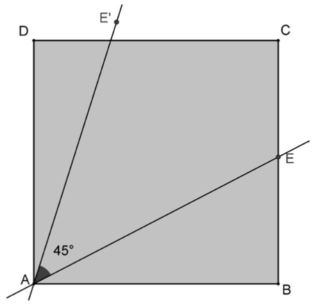
Episodio de comprensión

El uso de GeoGebra en la resolución de problemas pone el énfasis, en este primer episodio, en realizar una construcción que represente los objetos matemáticos que intervienen y permita explorar el problema. Esto es compatible con la idea aceptada de la fase de comprensión, en la que se busca la información relevante y una forma de representarla para poder abordar el problema matemáticamente. Para este problema, la construcción dinámica debe permitir visualizar un ángulo de 45° móvil inscrito en el cuadrado, de tal forma que, al arrastrar el ángulo se observen una familia de triángulos y cuadriláteros que conforman la figura. ¿De qué forma se puede trazar el ángulo para que permita su movimiento? Es una pregunta clave que hay que resolver para abordar este episodio.

La pareja de estudiantes comienza la resolución del problema, construyendo en GeoGebra la figura que presenta el enunciado. Construyen el cuadrado ABCD a partir de un segmento arbitrario AB. Seguidamente, en un primer intento, toman un punto arbitrario sobre el lado BC y otro sobre el lado CD. Luego, usando la herramienta *Ángulo,* usan dichos puntos para trazar el ángulo con vértice en A y arrastrarlos sobre los lados hasta conseguir una amplitud de 45°. Descartan lo que han hecho cuando comprenden que, de esta manera, no consiguen que la amplitud del ángulo permanezca constante si arrastran uno de los puntos. Observamos en este hecho, desde la perspectiva de la Actividad Matemática, la acción de *representar,* aspecto de la *creación matemática*, al elegir la manera de que el ángulo de 45° pueda ser arrastrado dentro del cuadrado. Darse cuenta de que su primer intento es una representación que no restringe la amplitud y, por tanto, no mantiene la amplitud al arrastrar indica que los estudiantes comprenden la importancia de este dato.

Tabla 3. Transcripción de la discusión junto a la imagen que aparecía en la pantalla

Sophie: ¿Y ahora? ¿E' lo hizo sólo?
Evan: … Sí, el E' lo hizo sólo
Evan: Ya, tienes que hallar la recta que pasa por E' y por A. Hallar el punto de corte con el lado CD y ese es el punto que hace el ángulo…
Sophie: Y lo mismo con E. Pero claro, el E lo pusiste tú.
Evan: Claro, pero como el E ya lo puse dentro pues…
Sophie: A ver, dibújalo
Evan: Si tú haces la recta de E a A…
Sophie: OK
Evan: …es el ángulo



A continuación, discuten como utilizar la herramienta *Ángulo dada su amplitud* para lograr su objetivo, conseguir trazar un ángulo de 45 grados desde el vértice A que se conserve al arrastrar uno de los puntos que lo define. Se apoyan en el punto E elegido de forma arbitraria sobre el lado BC y el vértice A para conseguirlo (Tabla 3). Una vez han trazado el ángulo de 45°, los estudiantes prosiguen con la construcción trazando el resto de segmentos necesarios para dibujar las figuras que se quieren comparar. El siguiente paso que dan es definir los puntos de corte G y H, cómo intersección de BD (diagonal) con los segmentos AF y AE respectivamente. De esta forma y usando la herramienta *Polígono* representan el triángulo AGH y el cuadrilátero EFGH (véase la Figura 4). Visualizando el valor del área de cada polígono y arrastrando E dentro del lado BC llegan a sus primeras conclusiones: que las áreas de las dos figuras son iguales, que sería lo que tienen que demostrar y que, en los casos extremos, E≅B y E≅C, la diagonal divide al triángulo en dos triángulos congruentes, es decir, la propiedad es evidente. Observamos en este proceso las acciones de *conjeturar*, *restringir* y *justificar* relacionadas con el *razonamiento matemático*. El enunciado no explicita la relación entre las figuras, por ello, los estudiantes estudian los atributos de las figuras para poder definir el objetivo del problema y forman un argumento matemático: las áreas de ambos coinciden para cualquier posición del punto móvil E. Esta conjetura la hacen basándose en la información que aporta el GeoGebra. Además, reconocen dos casos particulares, los extremos, que justifican visualmente basándose en que las diagonales del cuadrado dividen a este en cuatro partes de la misma área.

Tabla 4: Transcripción sobre el área de los triángulos inscritos junto a imágenes que aparecían en la pantalla

Sophie: La altura es la perpendicular a EF que pasa por el punto A.

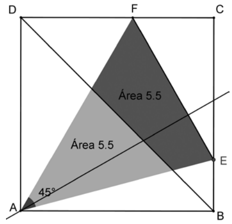
Evan: Vamos a hacerla…perpendicular.

Usan la herramienta Recta perpendicular, seleccionan el segmento EF y luego el punto A obteniendo la recta que pasa por A perpendicular a EF.

Sophie: Esa es la altura.

Evan: Vale. Claro es la altura en este momento.

Sophie: Muévela.



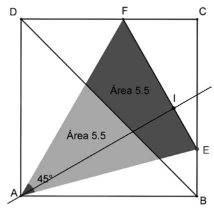
Discuten sobre lo que pasa en el caso extremo donde la altura coincide con el lado del cuadrado.

Sophie: Ahora el punto de intersección ese (se refiere a I).

Evan: Puntito… ese puntito de aquí y ahora vamos a calcular el segmento para poder borrar la recta.

Sophie: Si la borras…

Evan: Borrar no, ocultar.



Ocultan la recta y varias etiquetas.

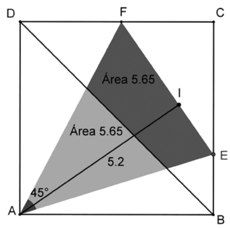
Evan: Vamos a animar… la altura siempre es la misma.

Observan los valores del segmento AI.

Sophie: ¿También? ...Sí, pero ¿por qué?

Evan: oh, Porque la distancia es la misma.

Sophie: …vale…a ver la altura tiene que ser la misma y entonces el segmento EF tiene que ser siempre el mismo… no sé si será el a (hace referencia por error al segmento base del cuadrado).



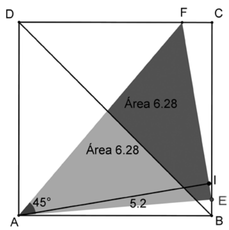
Localizan la longitud del segmento EF en la vista algebraica.

Evan: Este es el EF… este sí varía.

Sophie: ¿por qué varía? …no debería de variar.

Evan: Sí varía.

Sophie: Ah sí, sí claro, tiene que variar por qué el área está variando. Digo el área no se mueve, pero el área si cambia.



Episodio de exploración

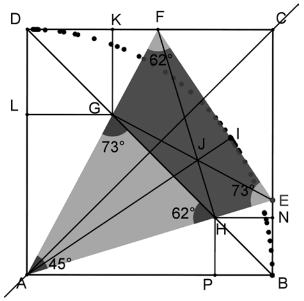
Este episodio es al que los estudiantes dedicaron más tiempo durante la primera sesión de clase. La búsqueda de distintas propiedades que les diera una idea de cómo demostrar la igualdad, fue abordada por la pareja de distintas formas: observando la construcción en movimiento, realizando búsquedas en internet de triángulos inscritos o de razones trigonométricas, haciendo preguntas al profesor y poniendo en común sus ideas con todo el grupo. Durante este episodio, usaron GeoGebra fundamentalmente para representar otros objetos matemáticos que completaran la construcción, observando si permanecían invariantes o no frente al movimiento. El movimiento ordenado y la cuantificación de atributos son dos de las heurísticas propias de SGD (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno, 2015), que se identifican en la resolución de la pareja, a su vez que el uso de fórmulas conocidas o tratar de resolver problemas más simples. Desde la Competencia Matemática, identificamos la capacidad de utilizar diferentes propiedades observadas para generar posibles estrategias y la evaluación de estas como posibles caminos a la solución, como la *competencia estratégica* de la pareja. En el siguiente episodio detallamos las estrategias que evaluaron.

Una de las discusiones matemáticas, que transcurrió en el episodio de exploración, giró alrededor de la familia de triángulos inscrita en el cuadrado. (Ver Tabla 4) Durante la sesión el profesor entregó a cada pareja una hoja para que anotaran las propiedades observadas durante el proceso de resolución. No era obligatorio demostrarlas, sino que bastaba con explicitarlas al visualizar la construcción dinámica. Al final de la clase, todas las parejas expusieron sus observaciones, lo que sirvió para aumentar la lista de cada pareja. Las propiedades que entregó la pareja del estudio fueron las siguientes (trascripción literal adaptando la notación a la Figura 6):

- Las áreas de cada polígono obtenidos al cortar el triángulo AEF con la diagonal DB coinciden.
- La altura AI del triángulo AEF es constante, por tanto, si el área varía debe variar el segmento EF.
- Cuando el punto E coincide con alguno de los vértices adyacentes (B o C) entonces el área del triángulo es la mitad del área del cuadrado, esto es trivial, ya que uno de los lados del triángulo, AF o AE coincide con la diagonal AC y el cuadrado queda dividido en dos partes iguales.
- La altura desde F hasta AE pasa siempre por H.
- La circunferencia de centro A y radio AB es tangente al triángulo AEF.
- J es el ortocentro de AEF (Teorema: Dos alturas se cortan en el ortocentro y la tercera también).

- Si logramos ver que la suma de las áreas de los triángulos ABH y AGD es igual a la suma de las áreas de los triángulos BEH, CFE y DGF, veremos que el área de AHG es igual al área de EFGH.
- Los triángulos AGH y AEF son semejantes, porque ambos tienen dos ángulos comunes, el generado de 45°, es decir, GAH y FAE son iguales y AFE y AHG también son iguales.
- Al calcular las alturas de todos los triángulos, observamos que la altura de los triángulos ABH y BEH coinciden, y la altura de los triángulos DGF y DGA son iguales.

Figura 6: Construcción de la pareja, al finalizar la sesión de clase



ABCD es un cuadrado
BD diagonal del cuadrado
E punto arbitrario del lado BC
F punto de CD tal que AEF=45º
H intersección de BD con AE
G intersección de BD con AF
J ortocentro de AEF

Buscando múltiples aproximaciones a la solución

El episodio anterior y este se entrecruzan, ya que, la tecnología en la resolución de problemas permite conjeturar la solución de forma empírica, al explorar con la construcción el problema. Además, las propiedades observadas anteriormente permiten abrir distintas vías para resolverlo, que se apoyan en diferentes conceptos y recursos. Esta diversidad de aproximaciones favorece el desarrollo de la comprensión conceptual de los conceptos y la destreza en la resolución de problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009).

Al finalizar la primera sesión, y durante la siguiente, la pareja aborda la demostración de la igualdad de áreas que habían conjeturado. Desde el principio, plantea un camino de cálculo directo de las áreas que les lleva a: i) expresar el área del triángulo AEF, sabiendo que su altura es constante y de la misma medida que el lado del cuadrado, ii) realizar búsquedas en Google relacionadas con triángulos inscritos para encontrar alguna expresión algebraica que relacione el área de un triángulo inscrito con el lado del cuadrado iii) buscar expresiones algebraicas para las áreas de todos los triángulos que aparecen, estudiando las alturas como segmentos en GeoGebra y observando qué pasa al animar E (ver Tabla 5).

La aproximación a la que le dedican más tiempo, la trabajan con lápiz y papel, y señalan (hablando a la cámara) que su plan es demostrar que las áreas de los triángulos ABH y AGD es igual a la suma de las áreas de los triángulos BEH, CFE y DGF:

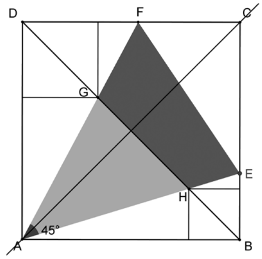
> Sophie: Para demostrar el problema lo que vamos a hacer es sumar las dos áreas de la parte inferior de la diagonal, los dos triángulos, y la vamos a igualar a las áreas de los tres triángulos de arriba para ver si son iguales… Vamos a suponer que son iguales y dar con una relación para que se cumpla.

Hacen avances en esta dirección, no llegan a terminar una demostración formal, pero en el plan entregado y en la grabación se puede observar que tienen todas las relaciones algebraicas necesarias. Observamos bajo las perspectivas de Competencia y Actividad Matemática, como en los episodios anteriores, acciones relacionadas con el *razonamiento matemático* y la *competencia estratégica* de la pareja, asimismo, se observa que todo gira alrededor de uno de los aspectos principales del razonamiento matemático: *justificar*. Esto es posible dado que GeoGebra les permite la cuantificación de los valores de las áreas y alturas de los cinco triángulos que intervienen en esta aproximación. Combinando la cuantificación con el movimiento controlado del punto E, la pareja consigue realizar un estudio de casos exhaustivo de las familias de triángulos. Esto le da soporte para enunciar el argumento. Además, la pareja reconoce las limitaciones de este argumento, al estar sustentado únicamente en la representación, dando pie a la búsqueda de una justificación formal. Para ello, escribe las propiedades observadas como fórmulas conocidas y comienza a implementar una secuencia lógica basada en ellas.

Tabla 5: Transcripción sobre la igualdad de las alturas
junto a la imagen que aparecía en pantalla

Evan: ¿estas alturas coincidirán?

Trazan las perpendiculares a los lados AD y CD que pasan por G y las perpendiculares a AB y BC que pasan por H. Los puntos de corte con los lados del cuadrado y esas rectas para dibujar los segmentos y ver cuánto miden.



Evan: Aquí tenemos que… d1 e I1 las alturas son las mismas (Habla de las alturas de los triángulos ABH y BEH desde el vértice H).

Sophie: Muévelo.

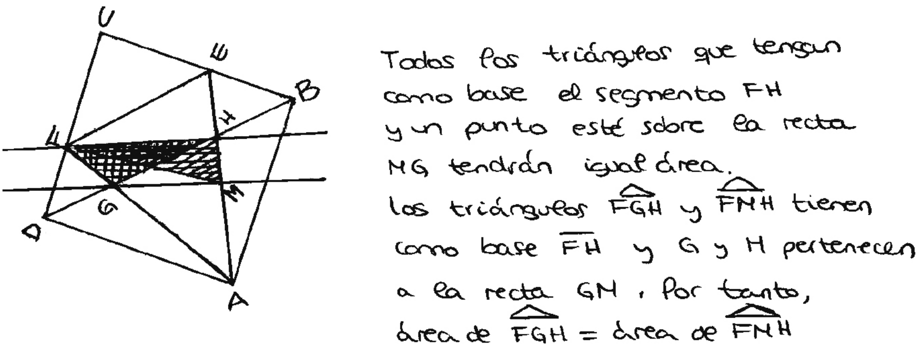
Evan: Siempre iguales y estas son siempre iguales (Se refiere a las alturas de DGF y AGB desde G).

Evan: Esta relación me encanta porque la podemos usar.

Finalmente, exploran otra aproximación a la solución utilizando las propiedades de semejanza de los triángulos AGH y AEF, aunque no llegan a demostrarlo durante la sesión. Los planes de resolución se discuten con todo el grupo, se dan varias ideas y se esbozan los pasos a seguir.

En otra sesión, el profesor presenta la aproximación geométrica (véase A3) incidiendo en la necesidad de demostrar cada una de las propiedades necesarias para dar cada uno de los pasos. La pareja toma nota y entrega una demostración completa como solución del problema (Figura 7).

Figura 7: Parte de la resolución entregada por la pareja



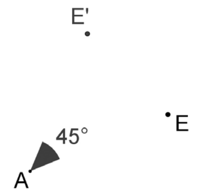
ACTIVIDADES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

El problema *«Ángulo 45º»*, u otro similar, podría plantearse en Educación Secundaria, ya que los contenidos y procedimientos quedan incluidos en el currículo de esa etapa. Tiene sentido pensar que un profesor podría encontrarse con situaciones parecidas a las expuestas en la sección anterior. Para esta sección generamos tres actividades matemáticas (una por cada evento señalado en las tablas 3, 4 y 5) que tienen como fin ser el punto de partida para la formación de profesores en un contexto de uso de tecnología para la resolución de problemas. Estas propuestas no son únicas, un mismo evento puede enfocarse de otra manera y generar una actividad distinta. Esto se debe a que, junto a cada una de esas actividades se presenta un conjunto de ideas matemáticas, asociando ideas distintas se obtendría otra actividad. El fin de estas ideas es tratar de reflejar partes la comprensión matemática necesarias para gestionar una situación de aula similar a la de la actividad, usando definiciones, propiedades matemáticas o relaciones matemáticas (Heid et al., 2015).

Trazar un ángulo

Cómo trazar un ángulo de una amplitud determinada es una actividad matemática que se introduce en la Educación Primaria. Algunas preguntas que surgen cuando uno se lo plantea son ¿qué es un ángulo? y ¿cómo lo mido? La necesidad de usar un instrumento de medida, el transportador de ángulos, para su construcción en lápiz y papel es trasladada al uso de tecnología buscando una herramienta de GeoGebra similar: *Ángulo dada su amplitud*. De este hecho extraemos la primera actividad propuesta para generar discusión durante la formación de profesores.

Tabla 6: Actividad asociada al evento de la Tabla 3
e ideas matemáticas asociadas

Actividad 1	
Dos estudiantes quieren trazar un ángulo de 45° con vértice en un punto A. En primer lugar, usan la herramienta *Ángulo dada su amplitud* y luego se preguntan, ¿cómo podría hacerlo sin usar la herramienta?	
Ideas matemáticas	
1. Dado un punto y un ángulo orientado, se puede realizar una rotación en el plano de un objeto. 2. Se puede construir un ángulo de 45° sobre un segmento, a partir del cuadrado que lo tenga como lado. 3. Usando la relación entre ángulo central e inscrito de una circunferencia se puede construir uno de 45°. 4. En la geometría aparecen, de forma recurrente, algunos ángulos que están relacionados con triángulos rectángulos e isóceles y polígonos regulares. Como 30°, 45°, 60°, 90°… 5. El concepto de ángulo se define a partir de una relación de equivalencia y una orientación.	

La actividad plantea desarrollar las cinco ideas matemáticas conectando los aspectos de la comprensión matemática: comprensión conceptual (1 y 5), representar (1, 2, 3 y 4) y reconocer distintas estructuras de las matemáticas (1, 3 y 5), con los estándares de aprendizaje del currículo de matemáticas en Educación Secundaria: reconocer e identificar ángulos, usar ángulos interiores y centrales en geometría plana, estudios de las posiciones relativas de rectas y la medida de ángulos.

Triángulo de altura constante

La caracterización de triángulos dados sus ángulos o sus lados se introduce desde los primeros cursos de geometría en la educación secundaria, por ejemplo, al representar triángulos a partir de algunas de sus dimensiones. Frecuentemente se presentan ejemplos donde existe una solución única y no se abordan casos sin solución o cuya solución es una familia de ellos. En el problema, aparece implícitamente una familia de triángulos cuya altura es constante y uno de sus ángulos es 45º, un hecho que se puede extraer de la forma siguiente.

Tabla 7: Actividad asociada al evento de la Tabla 4
e ideas matemáticas asociadas

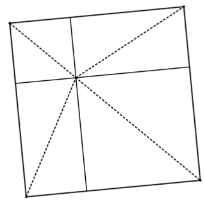
Actividad 2
Dos estudiantes utilizan el GeoGebra para construir un triángulo con un ángulo de 45º y una altura de 5 unidades, de forma que la altura es la que parte del vértice correspondiente al ángulo de 45º. Representan algunos triángulos que cumplen esas características y se preguntan ¿tendrán todos el mismo área?
Ideas matemáticas
1. Un triángulo puede determinarse (hallar sus tres ángulos y lados) conociendo la medida de: i) Tres de sus lados ii) Dos de sus lados y uno de sus ángulos iii) Uno de sus lados y dos de sus ángulos. 2. De forma dinámica se puede representar la familia de triángulos de altura 5 unidades y con un ángulo de 45º. Se coloca un vértice sobre una recta, apoyándose en él se traza un ángulo de 45º de forma que abarque el lado opuesto sobre una paralela a la primera recta, trazada a una distancia de 5 unidades.

Se plantea desarrollar estas dos ideas para conectar la capacidad de justificar y conjeturar (1 y 2), aspectos de la Actividad Matemática, con los estándares: estudiar elementos que caracterizan los triángulos y uso de la geometría dinámica para afianzar conceptos de geometría plana.

Distancia desde la diagonal

Muchas propiedades geométricas de los polígonos, y de sus elementos, pueden ser exploradas y descubiertas haciendo uso del software. Descubrir estas propiedades y reescribir definiciones de objetos o de familias de polígonos, permite extender la comprensión conceptual e introducir el razonamiento matemático en el aula. El hecho de que los estudiantes noten que las distancias a los lados desde la diagonal de un cuadrado coinciden dos a dos es un ejemplo de cómo el GeoGebra origina oportunidades para discutir de matemáticas.

Tabla 8: Actividad asociada al evento de la Tabla 5
e ideas matemáticas asociadas

Actividad 3
En una clase de geometría con tecnología, se representa un cuadrado y una de sus diagonales. Desde un punto de la diagonal se trazan los segmentos hasta los otros dos vértices (ver figura). Estudiando las alturas de estos triángulos un estudiante se da cuenta que son iguales dos a dos. Se lo indica al profesor y le pregunta ¿esto sólo pasa en el cuadrado? ¿pasa en otros cuadriláteros? 
Ideas matemáticas
1. Un cuadrado tiene distintas definiciones, de forma que, lo que era una definición puede ser una propiedad deducible de otra. 2. Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, las dos diagonales y las dos mediatrices de sus lados. 3. Relación entre las logitudes, ángulo que forman y punto en que se cortan dos diagonales de un cuadrilátero para determinar de cuál se trata. 4. Los cuadriláteros se pueden clasificar por el paralelismo de sus lados o sus longitudes y la amplitud de sus ángulos interiores.

El desarrollo de estas cuatro ideas conecta aspectos de la Actividad Matemática, como definir (1 y 3), manipular (2 y 3), restringir y extender (1 y 4), con las matemáticas de secundaria, haciendo referencia a los estándares: clasificación de figuras planas y resolver problemas geométricos utilizando herramientas tecnológicas.

CONCLUSIONES

Tal y como se ha evidenciado en diversas investigaciones, el uso de GeoGebra en la resolución de problemas hace emerger una amplia variedad de discusiones matemáticas entre los participantes, estudiantes y profesores (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009; Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno, 2015) que de alguna manera permiten profundizar en la comprensión de los conceptos matemáticos que subyacen a la propia actividad de resolución de problemas haciendo uso de herramientas de los SGD. Incidir en la necesidad de hacer construcciones que contengan implícitamente las propiedades matemáticas enunciadas, para luego explorar propiedades, permite conjeturar resultados que obligan a plantear preguntas. Al aflorar estos cuestionamientos, los estudiantes se ven motivados a buscar respuestas y ello les lleva a profundizar en la comprensión de los conceptos matemáticos implicados (Hernández et al., 2017). Este quehacer matemático mostrado a la hora de resolver problemas de matemáticas bien elegidos, cuando está presente la tecnología, es un elemento importante para mejorar la comprensión de muchas propiedades y resultados contenidos en las matemáticas de la Educación Secundaria.

Durante la resolución de problemas usando la tecnología, surgen situaciones que provocan dudas, discusiones e interés en los resolutores. Del análisis de estos momentos surge una oportunidad para proponer actividades para la formación de profesores de matemáticas. Zbiek y Blume (2015) argumentan que en un contexto de formación de futuros profesores, desarrollar Situaciones es una oportunidad para pensar en el contenido de los currículos de Educación Secundaria. Nosotros tomamos esa idea para el desarrollo de actividades que toman como punto de partida eventos relacionados con el uso de GeoGebra. Actividades que generan oportunidades para pensar paralelamente en los contenidos del curriculum y en las ideas matemáticas explorables con SGD, y para conectar ambas. Consideramos que este tipo de actividades deben formar parte de la formación inicial de profesores de matemáticas, ya que permite el desarrollo de su comprensión matemática cuando se trabaja cada idea matemática en relación con aspectos como conjeturar, definir, demostrar y representar.

En este capítulo, como resultado de nuestro trabajo de investigación, proponemos tres situaciones (Trazar un ángulo, Triángulo de altura constante y Distancia desde la diagonal) que pueden motivar una discusión matemática guiada por la comprensión de las matemáticas necesaria para un futuro profesor de Educación Secundaria. Además, nuestras propuestas están pensadas para hacer frente a situaciones que surgen al usar la tecnología en la resolución de problemas, de esta manera contribuyen a desarrollar la comprensión matemática de estudiantes de matemáticas que se orientan hacia la docencia en la Educación Secundaria, en un escenario donde interviene la tecnología.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido cofinanciado por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional del MICINN con Referencia EDU2017-84276-R.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Make It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Camacho-Machín, M., Afonso, M. C. y Moreno, M. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de

Software de Geometría Dinámica. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* 11, 81-104.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Hernández, A. Perdomo-Díaz, J. y Camacho-Machín (2017). Comprensión matemática para la enseñanza secundaria en estudiantes de Grado en matemáticas cuando resuelven un problema con GeoGebra. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,*12, 49-68.

Heid, M., Wilson, P. S. y Blume, G. W. (Eds.). (2015). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations.* United States of America: NCTM and IAP.

Kilpatrick, J. (2015). Background for the Mathematical Understanding Framework. In M. K. Heid, P. Wilson, y G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 1-8). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Santos-Trigo, M., y Camacho-Machín, M. (2009). Towards the Construction of a Framework to Deal with Routine Problems to Foster Mathematical Inquiry. *PRIMUS*, *19*(3), 260-279.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. y Ortega-Moreno, F. (2015). Fostering and supporting the cordinated use of digital technologies in mathematics learning. *International Journal Learning Technology (*Vol. 10, pp. 251-270). Inderscience Enterprises Ltd.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Wilson, P. y Zbiek, R. M. (2015). Development of Practice-Based Situations. In M. K. Heid, P. Wilson, y G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 31-39). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Zbiek, R. M. y Blume, G. (2015). Creating New Situations as Inquiry. In M. K. Heid, P. Wilson, y G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 57-64). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.