

LA MIRADA PROFESIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE INFANTIL EN SITUACIONES DE AULA Y PLANIFICACIÓN DE TAREAS DE APRENDIZAJE

PROFESSIONAL NOTICING OF PROSPECTIVE KINDERGARTEN TEACHERS IN CLASS SITUATIONS AND PLANNING LEARNING TASKS

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.¹, VALLS, J.², MORENO, M.² Y PÉREZ-TYTECA, P.²

¹Universidad de Sevilla, ²Universidad de Alicante

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es caracterizar el uso que los estudiantes para maestro hacen de una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual, en tareas profesionales de análisis de situaciones de aula y de planificación de tareas de aprendizaje, para la adquisición de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños. Los datos proceden de las respuestas de los estudiantes para maestro a dichas tareas profesionales. Los resultados muestran la dificultad de los estudiantes para maestro para usar la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual en ambos tipos de tareas profesionales, mostrando más limitaciones en las de planificación de tareas. El enfoque instrumental ha permitido identificar maneras diferentes en la que los estudiantes para maestro adquieren la competencia mirar profesionalmente.

Palabras clave: *mirada profesional, trayectoria de aprendizaje, instrumento conceptual, magnitud longitud y su medida, estudiantes para maestra de infantil.*

Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., Moreno, M. y Pérez-Tyteca, P. (2019). La mirada profesional de los estudiantes para maestro de infantil en situaciones de aula y planificación de tareas de aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 219-239). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

The aim of this research is to characterise the way that prospective kindergarten teachers use a learning trajectory of length magnitude and its measurement as a conceptual instrument, while solving professional tasks like analysis of class situations and planning learning tasks to develop professional noticing. Data come from prospective kindergarten teachers' answers to the professional tasks. Results show prospective kindergarten teachers' difficulty in using the learning trajectory as a conceptual instrument in both professional tasks. They show more difficulties with professional tasks related to planning and designing learning tasks. The instrumental genesis has let to identify ways in which prospective kindergarten teachers acquire the skill of professional noticing.

Keywords: noticing, learning trajectory, conceptual instrument, magnitude and its measurement, prospective kindergarten teachers.

INTRODUCCIÓN

ACTUALMENTE SON DIVERSAS las investigaciones centradas en la formación de los maestros o profesores de matemáticas y de su desarrollo profesional. Todas ellas intentan favorecer la reflexión del profesor sobre su práctica docente, a nivel individual o interactuando con otros docentes. Estas investigaciones, se han desarrollado a partir de diferentes modelos teóricos como el del Conocimiento y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) que plantean Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), la Lesson Study (Fernandez y Yoshida, 2004) y Mirar Profesionalmente (Mason, 2002).

Este trabajo se apoya en el modelo teórico Mirar Profesionalmente operativizado por Jacobs, Lamb y Philipp (2010) que caracterizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes mediante tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar los elementos relevantes en las respuestas de los estudiantes; (b) interpretar la comprensión de los estudiantes y (c) tomar decisiones sobre las acciones a desarrollar en la clase. Los trabajos de Krupa, Huey, Lesseig, Casey y Monson (2017) sobre el desarrollo de la mirada profesional concluyen acerca de la bondad del uso de trayectorias de aprendizaje como guías que apoyan a los profesores. Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) indican que una trayectoria de aprendizaje, en el sentido de Clements y Sarama (2004), ayuda a los profesores a tomar decisiones instruccionales por lo que se transforman en una herramienta útil para que los futuros profesores se inicien en la adquisición y desarrollo de la mirada profesional.

Diversas investigaciones, tanto en el ámbito nacional como internacional, han utilizado trayectorias de aprendizaje para favorecer el desarrollo de una mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos. Por ejemplo, Ivars, Fernández, Llinares y Choy (2018) para el

significado de fracción como parte-todo; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) para la derivada; Schack et al. (2013) para el estudio de la aritmética temprana; Wilson, Mojica, y Confrey (2013) para las nociones de equipartición, entre otros. Sin embargo, son escasas las investigaciones realizadas en el nivel de educación infantil, por lo que consideramos necesario profundizar en este ámbito. En general, todos estos estudios han mostrado el potencial que tienen las trayectorias de aprendizaje, en los programas de formación de maestros, para desarrollar las tres destrezas de la mirada profesional en diferentes situaciones de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

La mayoría de los trabajos sobre el desarrollo profesional, tanto si se apoyan en el uso de trayectorias de aprendizaje como si no, ponen su atención en identificar características de los estudiantes para maestro o profesor de algunas de las destrezas que caracterizan la competencia mirar profesionalmente. Sin embargo, en nuestros últimos trabajos (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo, 2018), profundizamos en el proceso de adquisición y desarrollo de las destrezas, proporcionando información sobre la mejora del diseño de los módulos de enseñanza en los programas formativos (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018).

Asimismo, hemos realizado otros trabajos (Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo, Pérez-Tyteca y Valls, 2017; Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018; Sánchez-Matamoros, Moreno, Valls y Callejo, 2018) que ponen el foco de atención en el uso que los estudiantes para maestro hacen de la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños, usando una adaptación del modelo de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

En este trabajo, usamos dicha adaptación del modelo de la génesis instrumental para examinar cómo estudiantes para maestro de educación infantil miran profesionalmente el pensamiento matemático de los niños de 3-6 años en dos tipos de tareas profesionales diferentes: interpretar situaciones de aula y planificar tareas de aprendizaje, apoyándose en una trayectoria de aprendizaje. Esta trayectoria es entendida, inicialmente, como un artefacto susceptible de transformarse en instrumento conceptual a partir de la construcción de diferentes esquemas, tanto de uso como de acción, los cuales informan de los procesos que realizan los estudiantes para maestro durante el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos.

Por tanto, el objetivo de esta investigación es caracterizar el uso que los estudiantes para maestro hacen de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, en tareas profesionales que requieren del análisis de situaciones de aula y de la planificación de tareas de aula, para la adquisición de la competencia docente «mirar profesionalmente» el pensamiento matemático de los niños.

MARCO TEÓRICO

En el programa de formación de maestros de infantil se ha proporcionado una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida adaptada de la de Sarama y Clements (2009). Este concepto matemático está presente cuando los niños aprenden a apreciar algunas cualidades de los objetos al relacionarse con su entorno (largo-corto, alto-bajo, lleno-vacío, etc.), a realizar comparaciones (tan largo como..., más alto que..., menos grueso que..., etc.), o a resolver situaciones relacionadas con alguna magnitud y su medida. En el actual currículum de educación infantil de la Comunidad Valenciana (Decreto 38/2008) se contempla la iniciación al aprendizaje de la magnitud longitud, entendida como reconocimiento de propiedades de un objeto, como un aprendizaje progresivo, intuitivo y experimental.

Para caracterizar el uso de la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual adaptamos la perspectiva de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010; Verillon y Rabardel, 1995), cuyo enfoque se basa en las ideas de Vygotsky (1985). La perspectiva de la génesis instrumental diferencia entre artefacto e instrumento. En este caso, la trayectoria de aprendizaje, información que debe ser aprendida para realizar las tareas profesionales, es el artefacto que puede convertirse en instrumento cuando el estudiante para maestro la use de manera significativa para analizar las tareas profesionales. Es decir, cuando el estudiante para maestro integra la información proporcionada en la trayectoria de aprendizaje con la actividad que está realizando. Esta adaptación del modelo teórico de génesis instrumental a investigaciones sobre adquisición y desarrollo de la mirada profesional ya ha sido discutida en investigaciones recientes (Sánchez-Matamoros et al., 2017; Sánchez-Matamoros et al., 2018).

El proceso por el que la información de una trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento se llama génesis instrumental, y consiste en la formación de esquemas instrumentales (de uso o de acción instrumental) entendidos como formas estables de realizar las tareas (Trouche, 2004). La utilización de un artefacto por parte del sujeto permite la realización de una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización, de ahí que los estudiantes pueden usar un artefacto de manera diferente y desarrollar diferentes esquemas de uso y de acción instrumental (Rabardel, 1995). Los esquemas de uso son esquemas elementales básicos, directamente relacionados con el artefacto (Drijvers y Trouche, 2008), que pueden servir como bloques de construcción para esquemas de orden superior, los esquemas de acción instrumental. Los esquemas de acción instrumental, propios del proceso de instrumentación, permiten al estudiante para maestro entender las potencialidades y restricciones de la información dada por la trayectoria de aprendizaje y se constituyen progresivamente en técnicas que permiten una respuesta efectiva para resolver las tareas profesionales propuestas. La coordinación

de los esquemas de acción instrumental permite al estudiante para maestro usar toda la información de la trayectoria de aprendizaje (objetivos, modelo de progresión en el desarrollo de la comprensión y tipos de tareas) para mirar profesionalmente las tareas profesionales propuestas.

En esta investigación consideramos que la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en niños de 3 a 6 años es un artefacto cuando los estudiantes para maestro no realizan ningún proceso cognitivo, y podría convertirse en instrumento conceptual cuando el estudiante para maestro la usara para razonar sobre las tareas profesionales, es decir, construyera diferentes esquemas de uso y de acción instrumental.

De todo lo expuesto anteriormente, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación en este trabajo:

- ¿Cómo usan los estudiantes para maestro una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños en las tareas profesionales propuestas?
- ¿Permite el enfoque de la génesis instrumental describir los procesos cognitivos que los estudiantes para maestro construyen para adquirir la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños?

MÉTODO

Los participantes en esta investigación fueron 23 estudiantes para maestro de educación infantil (EPM) matriculados en la asignatura Aprendizaje de la Geometría, que se implementa en el sexto cuatrimestre del Grado en Maestro en Educación Infantil de la Universidad de Alicante.

En esta asignatura se desarrolló un módulo de enseñanza sobre la longitud y su medida en Educación Infantil. Este módulo constaba de cinco sesiones de 100 minutos. En el módulo de formación se propusieron diferentes tareas profesionales, unas sobre situaciones de aula (registros de la práctica en forma de videos y/o de interacción entre alumnos y maestra) y otras sobre planificación de tareas de aprendizaje. Todas las tareas profesionales se discutieron en gran grupo en las sesiones correspondientes.

Para realizar las tareas profesionales los EPM disponían de la trayectoria de aprendizaje (TA) de la magnitud longitud y su medida como guía para identificar los elementos matemáticos, interpretar/anticipar la comprensión de los alumnos y proponer nuevas tareas para progresar en su aprendizaje. La TA consta de un objetivo de aprendizaje, un modelo de progresión de la comprensión de la longitud y

su medida (Tabla 1), y tipos de tareas instruccionales para ayudar a progresar a los niños en su comprensión. Los elementos matemáticos, claves en la adquisición de la magnitud longitud y su medida, son: reconocimiento de la magnitud longitud, conservación y transitividad de la magnitud, unidad de medida, unicidad de la unidad de medida, iteración, acumulación, relación entre el número de iteraciones de la unidad de medida y el tamaño de esta.

Tabla 1. Un modelo de progresión del aprendizaje de la longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la magnitud longitud: <ul style="list-style-type: none"> • Identifican las cualidades de la magnitud longitud. • Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: <ul style="list-style-type: none"> • Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: <ul style="list-style-type: none"> • Comparaciones indirectas. • Ordenaciones de objetos. • Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida: <ul style="list-style-type: none"> • Realizan iteraciones de la unidad de medida. • Reconocen la propiedad de acumulación. Reconocen la universalidad de la unidad de medida.
5	Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones.

INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

Previo a la implementación del módulo de enseñanza, se diseñó el instrumento de recogida de datos formado por tres tareas profesionales, dos de ellas hacen referencia a las funciones docentes que ha de realizar un maestro en una situación de aula, es decir, interpretar la comprensión de los niños/as, en este caso, sobre la magnitud longitud y su medida, y la toma de decisiones, a partir de la interpretación realizada, para que los niños/as progresen en el aprendizaje (Tabla 2). La otra se corresponde con la planificación de una tarea de aprendizaje, es decir, el EPM debía seleccionar una tarea, identificar y establecer el objetivo coherente con la misma, anticipar posibles respuestas de los niños/as y tomar decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de estos (Tabla 3). De este modo, estas tareas profesionales sirven para trabajar los contenidos del programa formativo de los estudiantes para maestro y para recoger los datos necesarios para esta investigación.

Tabla 2. Descripción de las tareas profesionales de análisis de situaciones de aula

Tarea	Descripción de la situación de aula	Elementos matemáticos
Magnitud	Está compuesta por 4 viñetas extraídas del vídeo Van den Heuvel-Panhuizen y Buys (2005). En la Viñeta 1, la maestra propone a los niños recortar una tira de papel tan larga como ellos. En la Viñeta 2, los niños hacen diversos ensayos (de pie, en el suelo, de pie, pero apoyados en un armario...) para hacer una señal en la tira para que quede exactamente de su altura. En las viñetas 3 y 4, decoran las tiras y las comparan de dos en dos y, posteriormente, la maestra las ordena.	Reconocimiento (Viñeta 1) Conservación (Viñeta 2)
Medida	A través de 5 viñetas, adaptadas de Alsina (2011), se muestra una salida de los niños, en dos equipos, a un parque para medir el contorno del árbol seleccionado por cada equipo, a partir del trozo de cuerda proporcionado. El equipo A seleccionó un árbol de tronco delgado que midió con el trozo de cuerda (Viñeta 1), mientras que el árbol elegido por el equipo B, al ser grueso, no pudo ser medido con el trozo de cuerda (Viñeta 2). Ante tal hecho, los niños de ambos equipos decidieron rodear cada árbol con sus brazos (equipo A: una niña, equipo B: cuatro niños) (Viñetas 3 y 4, respectivamente). La maestra pregunta qué pasaría si cambiasen dos de los cuatro niños por otros dos (Viñeta 5).	Elección de una unidad de medida (Viñeta 1 y 2) Unicidad (Viñeta 3 y 4) Iteración y acumulación (Viñeta 4) Relación entre el número y la unidad de medida (Viñeta 5)

Para facilitar que los EPM analizaran de manera estructurada las situaciones de enseñanza se les plantearon las siguientes cuestiones:

- Cuestión 1. Justifica las **características de la comprensión** de los niños puestas de manifiesto en cada una de las viñetas indicando los **elementos matemáticos** que están implícitos.

- Cuestión 2. Según las características de la comprensión de los niños identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** los situarías? Justifica tu respuesta.
- Cuestión 3. Suponiendo que eres la maestra de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje** y propón **una tarea** para que los niños sigan **avanzando** en la comprensión de la magnitud longitud y su medida.

Una vez realizadas y analizadas las tareas profesionales correspondientes a las situaciones de aula, se les pidió a los EPM que planificaran una tarea de aprendizaje (Tabla 3).

Tabla 3. Descripción de la tarea profesional de planificación de una tarea de aprendizaje

Objetivos de la tarea profesional	Enunciado de la tarea
Seleccionar la tarea e identificar y establecer objetivo	Selecciona una tarea de la magnitud longitud y su medida para Educación Infantil (libros, proyectos, web, etc.) e indica: Objetivo de aprendizaje de la tarea.
Anticipar características de la comprensión	Elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea ¿Qué características de la comprensión debería mostrar un niño que fuera capaz de resolverla?
Tomar decisiones	¿Qué tarea propondrías a continuación para avanzar en la comprensión de la magnitud longitud y su medida? Diseñala, indica el objetivo de aprendizaje y justifica tu respuesta.

ANÁLISIS DE DATOS

Los datos son las respuestas de los EPM a las tareas profesionales descritas anteriormente (Tabla 2 y 3). El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado en dos fases.

En la primera fase se analiza conjuntamente el uso que hacen los EPM de la TA en las situaciones de aula y en la de planificación de una tarea de aprendizaje. Se inicia esta fase analizando cómo los EPM usan el modelo de progresión del aprendizaje de la longitud para interpretar, a partir de los elementos matemáticos identificados, las características de la comprensión de los niños/as, en las situaciones de aula, y en la planificación de tareas de aprendizaje, para seleccionar la tarea, identificar y establecer el objetivo de aprendizaje y anticipar la comprensión. Posteriormente, analizamos si los EPM, haciendo uso del modelo de progresión en

el aprendizaje, de los tipos de tareas de la TA y la comprensión interpretada/anticipada, proponen nuevas tareas para favorecer, en ambos casos, el aprendizaje de los niños/as. En la segunda fase, se compararon los usos que los EPM hicieron de la TA en las tareas profesionales de análisis de situaciones de aula y de planificación.

Como resultado de ambas fases de análisis identificamos distintos niveles de instrumentación de la TA y, en consecuencia, describimos cómo, a partir de la génesis instrumental, los EPM construyen los procesos cognitivos que favorecen la adquisición y desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as. Por ejemplo, en las tareas de análisis de las situaciones de aula propuestas, se construye un primer esquema de uso cuando el EPM solo usa la TA para identificar los elementos matemáticos implícitos en la situación de aula. El EPM construye un segundo esquema de uso al proponer una nueva tarea, secuencialmente posterior a la tratada en la situación de aula analizada, sin considerar la comprensión inferida y los tipos de tareas facilitadas en la TA. Asimismo, el EPM construye un primer esquema de acción instrumental cuando usa el modelo de progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida para interpretar la comprensión del niño/a, desde los elementos matemáticos identificados, pero no propone tareas para su progresión. Finalmente, se construye un segundo esquema de acción instrumental, cuando el EPM usa los tipos de tareas y el modelo de progresión del aprendizaje facilitado en la TA para proponer nuevas tareas teniendo en cuenta la comprensión inferida. La instrumentación de la TA implica la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental.

RESULTADOS

En esta sección se describen conjuntamente los resultados obtenidos sobre el uso que los EPM han hecho de la TA de la magnitud longitud y su medida en las tareas profesionales propuestas, y los procesos cognitivos que construyen para adquirir la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as. Hemos caracterizado a los EPM en cuatro grupos tal y como se describe a continuación.

LOS EPM NO USAN LA TA PARA RESOLVER LAS TAREAS PROFESIONALES

Solo tres de los 23 EPM participantes no usaron la TA ni para analizar las situaciones de aula propuestas ni para planificar tareas de aprendizaje, por lo que consideraron la TA como un artefacto.

Así, estos tres EPM, al mirar profesionalmente las situaciones de aula no identificaron los elementos matemáticos implícitos en las mismas, o bien, reprodujeron retóricamente la información del documento teórico proporcionado, por lo que

no interpretaron la comprensión de los niños/as. Tampoco utilizaron la TA para identificar el objetivo de la tarea de aprendizaje seleccionada por ellos mismos. Por ejemplo, Miranda, al analizar la situación de aula, correspondiente a la magnitud longitud (Tabla 2), argumenta:

Miranda: En las viñetas [tabla 2, viñetas de la tarea de magnitud] aparece el reconocimiento de la magnitud longitud, ya que reconocen que sí pueden hacer que la tira sea igual a su altura. Además, el niño sabe que debe dividir la tira en unidades de la misma longitud que su cuerpo, por ello se da la equipartición. También, podemos visionar que aparece la iteración de la unidad de medida, la transitividad, la conservación y la acumulación. Los niños están en un nivel de comprensión 3 y 4 ya que reconocen que la tira es más grande que su longitud.

Miranda nombra elementos matemáticos sin aportar evidencias de la mayoría de ellos, e incluso, sin que estos formen parte de dicha situación de aula (transitividad, unidad de medida, iteración, equipartición y acumulación). Además, no tiene en cuenta el modelo de progresión del aprendizaje para interpretar la comprensión de los niños/as, ya que los sitúa en un nivel 4, argumentando que «reconocen que la tira es más grande que su longitud», cuando realmente están en el nivel 2 de comprensión (conservación de la magnitud).

En el análisis de la situación de aula, correspondiente a la medida de la longitud (Tabla 2), Miranda no tiene en cuenta el modelo de progresión en el aprendizaje al asignar un nivel diferente de comprensión a cada equipo según la viñeta que está analizando; si bien dado el carácter inclusivo de los niveles de comprensión, debería haber mirado la situación globalmente y no viñeta a viñeta.

Por último, cuando se le pide que planifique una tarea de aprendizaje, Miranda propone la siguiente tarea y objetivo de aprendizaje:

Tarea: Las tizas. La maestra mostrará a los niños diferentes tizas de distintos tamaños: unas más largas, otras más cortas [...] Los niños deben clasificar las tizas de clase dependiendo de su tamaño, si es corto o si es largo. Medir la estatura de los niños con las diferentes tizas.

Objetivo: Reconocer la propiedad de acumulación. Identificar la unidad de medida para realizar iteraciones. Realizar ordenaciones de objetos comparando la longitud de las tizas. Realizar mediciones con las tizas.

Esta EPM ha propuesto una tarea en la que les pide a los niños que clasifiquen las tizas y midan su estatura con ellas. Sin embargo, en el objetivo habla

de ordenar, y al describir los elementos matemáticos necesarios para su resolución nombra la transitividad, refiriéndose a ella como «tiza más grande-menos tizas para medir/tiza más corta-más tizas para medir», Miranda confunde los conceptos de ordenar-clasificar-relación inversa entre el número y la unidad de medida. También indica como objetivo «Reconocer la propiedad de acumulación», propiedad que describe como «deben contar las iteraciones de la unidad de medida a lo largo de la longitud de la tiza», cuando en realidad, para medir a los niños hay que contar las iteraciones de la tiza a lo largo de la longitud de los niños. Por tanto, esta EPM no usa el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para identificar el objetivo de aprendizaje de la tarea seleccionada.

LOS EPM USAN LA TA PARA RESOLVER LAS TAREAS DE ANÁLISIS DE SITUACIONES DE AULA, PERO NO PARA LA DE PLANIFICACIÓN

En este grupo 12 de los 23 EPM usaron la TA como instrumento conceptual para resolver las dos tareas de análisis de situaciones de aula, aunque construyeron diferentes procesos cognitivos. Nueve de ellos construyeron un primer esquema de uso para las situaciones de aula relacionadas con la magnitud o/y medida al usar la TA para identificar los elementos matemáticos implícitos en las tareas de magnitud de longitud, de medida o de ambas, aunque no usaron dicha TA para interpretar la comprensión de los niños/as. Los tres restantes usaron el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para mirar profesionalmente las tareas de análisis de las situaciones de aula, interpretando la comprensión de los niños/as de la situación de magnitud, de medida o de ambas, a partir de los elementos identificados, por lo que construyeron un primer esquema de acción instrumental. Ninguno de estos 12 EPM usó la TA para mirar profesionalmente la tarea de planificación, esto es, la consideraron como un artefacto. Estos EPM identificaron un objetivo que no era coherente con la tarea seleccionada. Por ejemplo, Pilar, utilizó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para interpretar la comprensión de los niños de la situación de aula de medida a partir de los elementos matemáticos identificados (primer esquema de acción instrumental para la medida), como se observa en su respuesta:

Pilar: El equipo A se encuentra en la transición del nivel de comprensión 3 al 4, ya que son conscientes de que se deben realizar iteraciones de la misma medida a lo largo de la longitud sin superposiciones ni saltos. El equipo B está en la transición del nivel 4 al 5 porque al final deducen una relación inversa entre las medidas de las unidades y el número de unidades de medida.

Pilar ha interpretado la comprensión de los niños aportando evidencias concretas cuando hace alusión, en el caso del equipo A, a las iteraciones de la cuerda que

realizan para medir el contorno del árbol y, en el caso del equipo B, a la relación inversa que deducen los alumnos entre el tamaño de los brazos de los niños y el número de niños que harán falta para medir el contorno del árbol. En la tarea de planificación, la EPM Pilar propone una tarea en la que los niños tienen que ordenar de mayor a menor sus calcetines y los de sus compañeros. En este caso, Pilar identifica como objetivo de aprendizaje «ordenar las longitudes de mayor a menor» pero no identifica la transitividad como elemento matemático necesario para resolver la tarea, lo que pone de manifiesto que no ha usado la TA para mirar profesionalmente la tarea de planificación.

LOS EPM USAN LA TA PARA RESOLVER LAS TAREAS PROFESIONALES

Encontramos siete EPM que usaron la TA como instrumento conceptual para resolver las tareas profesionales, tanto las de análisis de situaciones de aula como la de planificación de tareas de aprendizaje. En las tareas de análisis de situaciones de aula, todos la usaron para identificar los elementos matemáticos. Pero cuatro de estos siete EPM no pasaron de esta identificación de elementos matemáticos implícitos en las situaciones de magnitud (tres EPM) o en ambas (un EPM), por lo que construyeron un primer esquema de uso para magnitud y/o medida, mientras que los otros tres EPM usaron el modelo de progresión en el aprendizaje para interpretar la comprensión de los niños/as, a partir de los elementos matemáticos identificados, en las situaciones de magnitud y/o medida, por lo que construyeron un primer esquema de acción instrumental.

El uso de la TA para la tarea de planificación de los cuatro EPM que habían construido un primer esquema de uso en las tareas de análisis de situaciones de aula fue diferente: uno de ellos solo seleccionó una tarea y un objetivo coherente con la misma, desarrollando un primer esquema de uso; otro EPM usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para establecer un objetivo coherente con la tarea seleccionada y anticipar la comprensión de un niño que fuera capaz de resolver la tarea seleccionada, por lo que desarrolló el primer esquema de acción instrumental; y los otros dos EPM, además de usar el modelo de progresión del aprendizaje de la TA también usaron los tipos de tareas de la misma para proponer una nueva tarea para que el niño progresara en su aprendizaje, es decir, instrumentaron la TA. Por ejemplo, Cayetana usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para identificar los elementos «reconocimiento de la magnitud longitud» y «conservación» en las respuestas de los niños a la situación de magnitud, como vemos en su respuesta:

Cayetana: Los niños consideran la longitud de forma intuitiva (percepción directa). Además, comprenden que si se mueve un objeto su longitud

no cambia (conservación de la magnitud longitud) ya que marcan su longitud en la tira tanto de pie como tumbados.

Sin embargo, no interpretó su comprensión correctamente ya que estableció un nivel de comprensión de los niños viñeta a viñeta y no planteó su comprensión al final de la situación de aula. Esto indica que esta EPM no era consciente del carácter inclusivo de los niveles de comprensión (primer esquema de uso para magnitud).

En la tarea de planificación Cayetana instrumentó la TA, al seleccionar una tarea y establecer un objetivo de aprendizaje coherente con la misma:

Tarea: Juntar y ordenar, de menor a mayor longitud, todos los lápices de la clase.

Objetivo: Hacer comparaciones directas entre dos o más objetos y ordenarlos según su longitud.

Además, Cayetana identificó los elementos matemáticos implicados en la tarea, aportando evidencias de los mismos, como refleja su respuesta:

Cayetana: Dentro de los elementos matemáticos distinguimos entre:

Elementos de magnitud:

Reconocimiento de la magnitud: los niños deben tener en cuenta que para medir un objeto deben considerar la distancia entre dos puntos como atributo.

Transitividad: si la longitud de un lápiz A es igual a la de un lápiz B, y la longitud del lápiz B es igual a la del lápiz C, entonces la longitud del lápiz A es igual a la de C.

Elementos de medida: No se observan.

Cayetana también, anticipó la comprensión de un niño que resolviera correctamente la tarea, indicando que éste debería realizar comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva y también por desplazamiento de los objetos y utilizar la propiedad transitiva para realizar ordenaciones de objetos, características del nivel 3 de comprensión.

Al planificar una tarea para que este niño pudiera progresar en su aprendizaje, propuso:

Cayetana: Que el niño mida cada uno de los lápices en «deditos», sin superponer ni hacer saltos. Finalmente, debe decir a la maestra cuántos «deditos» tienen sus lápices y discutir sobre los resultados en clase. El objetivo de esta tarea es subdividir un objeto en unidades de la

misma longitud y realizar mediciones de longitudes comparando un objeto (lápiz) con otro elegido de antemano (deditos) que se usará para indicar cuántas veces cabe uno en el otro (medida).

Esta tarea supone una iniciación al trabajo de los elementos matemáticos de medida de la longitud, que caracterizan el nivel 4 de comprensión (iteración, unicidad, acumulación, etc.), por lo que resulta adecuada para que el niño progrese desde el nivel 3 de comprensión que mostraban en la tarea anterior. Así, Cayetana pasó de desarrollar un primer esquema de uso de la TA para magnitud, al analizar la situación de aula, a instrumentar la TA tanto para magnitud como para medida en la situación de planificación.

De los tres EPM restantes, uno de ellos usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para interpretar la comprensión de los niños/as implicados en ambas situaciones de aula, magnitud y medida, sin embargo, solo usó la TA para seleccionar una tarea de magnitud y establecer un objetivo coherente con la misma. Los otros dos EPM usaron el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para interpretar la comprensión de los niños implicados en ambas situaciones de aula, magnitud y/o medida, a partir de los elementos matemáticos identificados, así como para seleccionar una tarea con un objetivo coherente con la misma y anticipar la comprensión del niño que fuera capaz de resolverla, en consecuencia, en ambas tareas profesionales construyeron un primer esquema de acción instrumental. Por ejemplo, Pedro desarrolla un primer esquema de acción instrumental en la situación de aula relacionada con la medida, al usar el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para identificar los elementos matemáticos de acumulación, iteración y unicidad de la unidad de medida, aportando evidencias de los mismos, e interpretar a partir de ellos la comprensión de los niños implicados en dicha situación de aula, si bien no propone una tarea que les ayude a progresar (Sánchez-Matamoros et al., 2017). En la planificación de la tarea de aprendizaje, este EPM usa la TA para proponer una tarea cuyo objetivo de aprendizaje es profundizar en la adquisición de la universalidad de la unidad de medida. La tarea es la siguiente:

Pedro: Los alumnos tendrían que medir dos longitudes iguales y una diferente con los pies, por lo que obtendrán medidas distintas entre todos ellos. Posteriormente se les dará un metro para que todos midan con una unidad de medida universal y vean que de esta forma distintos niños obtienen el mismo resultado para una misma longitud.

Así, este EPM ha propuesto una tarea de introducción del metro para que los niños reflexionen sobre la necesidad de emplear una medida universal para homogeneizar las mediciones de un objeto. Al anticipar la comprensión de un niño que fuera capaz de resolver con éxito la tarea, indica:

Pedro: Debe ser capaz de reconocer la universalidad de la unidad de medida por lo que tendrá que tener adquirido el reconocimiento de la magnitud longitud y su conservación, la propiedad transitiva y la capacidad para hacer equiparticiones de objetos.

Pedro usa la TA para seleccionar una tarea y proponer un objetivo de aprendizaje coherente con ella y para anticipar la comprensión de los niños que la resolverán, ya que ha propuesto una tarea de transición del nivel 4 (unidad de medida) al nivel 5 (universalidad de la unidad de medida) de comprensión y anticipa que un alumno capaz de resolverla tiene que tener adquiridos los elementos matemáticos implicados en los niveles anteriores, esto es, los elementos referentes a la magnitud (reconocimiento, conservación y transitividad) y los abordados en el cuarto nivel de comprensión (equipartición de la longitud de un objeto, lo que conlleva hacer «partes» de igual longitud –unicidad– e iterarlas de manera correcta –iteración–). Sin embargo, este EPM no ha propuesto ninguna tarea de progreso para ellos, quedándose así en la construcción del primer esquema de acción instrumental.

LOS EPM NO USAN LA TA EN LAS SITUACIONES DE AULA Y LA USAN COMO INSTRUMENTO CONCEPTUAL EN LA PLANIFICACIÓN

A este grupo solo pertenece un estudiante que no puso de manifiesto ninguna de las tres destrezas de la mirada profesional al analizar las situaciones de aula propuestas por lo que consideró la TA como un artefacto. Sin embargo, usó el modelo de progresión del aprendizaje de la TA para seleccionar una tarea de magnitud, establecer un objetivo coherente con esta y anticipar la comprensión de un niño que fuera capaz de resolverla, es decir, construyó el primer esquema de acción instrumental en la planificación de una tarea de aprendizaje.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar el uso que los estudiantes para maestro de educación infantil hacen de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual, en tareas profesionales que requieren del análisis de situaciones de aula y de la planificación de tareas de aprendizaje, para la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as.

Hemos organizado esta sección en dos apartados que dan respuesta al uso que hacen los estudiantes para maestro de infantil de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual para mirar profesionalmente (primera pregunta de investigación) y al papel del enfoque instrumental

como indicador de la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños/as (segunda pregunta de investigación).

EL USO DE LA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DE LA MAGNITUD LONGITUD Y SU MEDIDA COMO INSTRUMENTO CONCEPTUAL PARA MIRAR PROFESIONALMENTE

La instrumentación de la trayectoria de aprendizaje pasa por desarrollar los dos esquemas de acción instruccional para interpretar, anticipar, inferir y comparar la comprensión de los niños, y, a partir de ahí, proponer tareas que favorezcan la progresión en el aprendizaje de la magnitud longitud y su medida. Los resultados han mostrado que, de los 23 estudiantes para maestro, solo dos han manifestado haber instrumentalizado la trayectoria de aprendizaje en una tarea de planificación, y ninguno en la de análisis de una situación de aula. De estos resultados podemos concluir que la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje y, por tanto, la adquisición de una mirada profesional para los estudiantes para maestro es un proceso complejo que puede favorecerse mediante las prácticas profesionales en un módulo de enseñanza durante la formación inicial y debería continuar con el ejercicio profesional.

Asimismo, 20 estudiantes para maestro han iniciado la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje al considerarla como instrumento conceptual para relacionar dos de las tres destrezas que conforman la mirada profesional (identificar e interpretar). De estos veinte, 12 de ellos sólo manifiestan el uso de la trayectoria de aprendizaje en el análisis de situaciones de aula, pero no en la planificación de tareas de aprendizaje. Los ocho estudiantes para maestro restantes hacen uso de la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual en las tres tareas profesionales y, de ellos, sólo dos llegan a manifestar la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, al interrelacionar las tres destrezas que conforman la mirada profesional, en la tarea de planificación, pero no en las de análisis de situaciones de aula. A la vista de estos resultados, se evidencia que los estudiantes para maestro pueden llegar a instrumentar la trayectoria de aprendizaje en determinadas situaciones (en nuestro caso, en la planificación de tareas) pero no instrumentarla en todas las situaciones relacionadas con dicha competencia (en nuestro caso, en el análisis de situaciones de aula). Podemos concluir que el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente a través de la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje, en los módulos de enseñanza, además de contemplar tareas profesionales, variadas como pueden ser las de análisis de situaciones de aula o la de planificación de tareas de aprendizaje, es necesario establecer relaciones entre dichas tareas profesionales que lleven al estudiante para maestro a la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje en cualquier situación relacionada con la competencia de la mirada profesional.

La dificultad de los tres estudiantes para maestro que no adquirieron ninguna de las tres destrezas de la competencia, al considerar la trayectoria de aprendizaje como un artefacto, podría deberse a la dificultad de establecer relaciones entre su conocimiento de matemáticas y su conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños. Esta dificultad ya ha sido indicada en investigaciones sobre la mirada profesional de los estudiantes para maestro (Son, 2013; Wilson et al., 2015), en las que se concluía que para poder establecer esta relación era necesario que los estudiantes para maestro anticiparan o identificaran la corrección o no de las respuestas de los niños y determinaran cómo estas eran o no significativas, desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas. El resto de estudiantes para maestro (20 EPM) al iniciar la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, ya sea como esquema de uso o como esquema de acción instrumental, han empezado a establecer relaciones entre el conocimiento matemático de la magnitud longitud y su medida y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños y niñas, necesario para adquirir la mirada profesional (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

A la vista de estos resultados, concluimos que el análisis del uso de una trayectoria como instrumento conceptual es una herramienta útil para describir los procesos cognitivos, tales como esquemas de uso o de acción instrumental, que llevan a cabo los estudiantes para maestro para interpretar o anticipar las características de la comprensión y tomar decisiones para el progreso del aprendizaje. Asimismo, la instrumentación de una trayectoria de aprendizaje y, por tanto, la adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente, es un proceso complejo para los estudiantes para maestro, es progresivo y no uniforme, ya que la interrelación entre las destrezas de identificar, interpretar o anticipar y tomar decisiones se ha manifestado en los estudiantes para maestro de maneras diferentes.

PAPEL DEL ENFOQUE INSTRUMENTAL COMO INDICADOR DE LA ADQUISICIÓN DE LA COMPETENCIA DOCENTE MIRAR PROFESIONALMENTE

El uso del enfoque instrumental como marco teórico nos ha permitido describir el proceso de adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños e identificar los procesos cognitivos que han desarrollado los estudiantes para maestro.

Los resultados nos permiten identificar maneras diferentes de adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños en las situaciones de aula y en planificación de tareas de aprendizaje (Figura 1).

En las situaciones de aula y en la planificación de tareas de aprendizaje la adquisición de la competencia se inicia con la consideración de la trayectoria de aprendizaje como un artefacto (Rabardel, 2002; Verillon y Rabardel, 1995), lo que supone que los estudiantes para maestro no realizan ningún proceso cognitivo

con la trayectoria de aprendizaje. Por tanto, no adquieren la competencia docente. En un segundo momento de la adquisición de la competencia los estudiantes para maestro desarrollan un primer esquema de uso (Drijvers y Trouche, 2008) en el análisis de situaciones de aula y en la planificación de tareas de aprendizaje, el estudiante para maestro usa la trayectoria de aprendizaje para identificar los elementos matemáticos implícitos en la situación de aula planteada o en la selección de tareas y objetivos coherentes realizada en la planificación, sin tener en cuenta la comprensión. Este proceso cognitivo, en el que se evidencia un esquema de uso de la trayectoria de aprendizaje, le podría servir como bloque de construcción para desarrollar el primer esquema de acción instrumental que constituye el tercer momento de adquisición de la competencia.

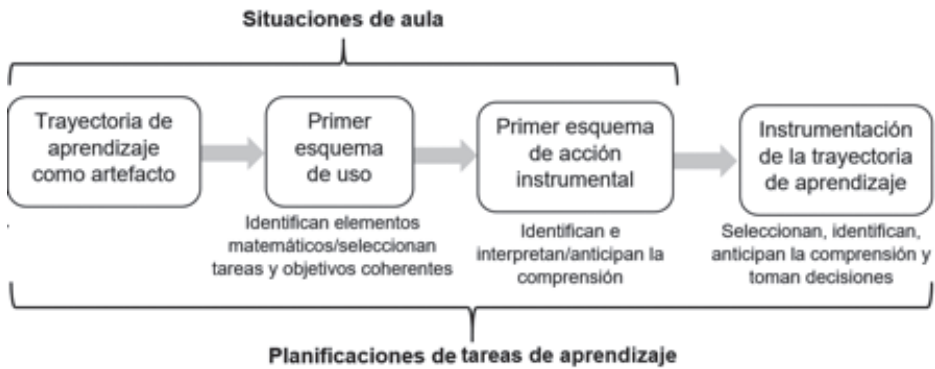


Figura 1. Adquisición de la competencia docente mirar profesionalmente y procesos cognitivos realizados en el análisis de las situaciones de aula y en la planificación de tareas de aprendizaje

En el tercer momento de adquisición de la competencia, los estudiantes para maestro desarrollan el primer esquema de acción instrumental, al relacionar el modelo de progresión del aprendizaje con las evidencias de la situación de aula planteada para interpretar la comprensión de los niños a partir de los elementos matemáticos identificados o para anticipar la comprensión en la planificación de una tarea de aprendizaje. Por último, el cuarto momento de adquisición de la competencia se caracteriza por la instrumentación de la trayectoria de aprendizaje, momento que solo se da en la planificación de tarea de aprendizaje. Este momento supone el desarrollo y la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental, al relacionar el modelo de progresión del aprendizaje con la anticipación de la comprensión que mostrarían los niños al resolver la tarea que estaban considerando para la planificación, a partir de los elementos matemáticos identificados (primer esquema de acción instrumental) y proponer nuevas tareas coherentes con la comprensión anticipada, relacionando el modelo de progresión del aprendizaje

y los tipos de tareas de la trayectoria de aprendizaje (segundo esquema de acción instrumental).

Un estudiante para maestro tiene desarrollada la competencia profesional, cuando construye ambos esquemas de acción instrumental lo que se pondría de manifiesto en la resolución de tareas profesionales. En nuestra investigación, no tenemos evidencias de ello. Estos resultados deben ser tenidos en cuenta en el diseño de módulos de enseñanza en los programas de formación de maestros para crear oportunidades de aprendizaje que potencien la interrelación entre las destrezas de identificar, interpretar/anticipar y tomar decisiones instruccionales (Mason, 2002), considerando el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes, organizado mediante trayectorias de aprendizaje con el objetivo de favorecer el inicio de la adquisición o desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo contó con la ayuda del Proyecto EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España y GV/2018/066 de la Generalitat Valenciana.

REFERENCIAS

- Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. I.C.E. Universitat de Barcelona. Hosori Editorial, S. L. (p. 176).
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Decreto 38/2008, de 28 de marzo, del Consell, por el que se establece el currículo del segundo ciclo de la Educación Infantil en la Comunitat Valenciana. [2008/3838] (DOGV núm. 5734 de 03.04.2008).
- Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.
- Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 2, 363-392.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 143-162.

- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.
- Fernandez, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Mahwah, EEUU: Erlbaum.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science, and Technology Education*, 14(11), em 1599.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. O. Schack et al. (Eds.). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-71). Springer.
- Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(8), 2155-2170. doi:10.12973/eurasia.2016.1295a
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Rabardel, P. (2002). People and technology-A cognitive approach to contemporary instruments. Recuperado el 12 de febrero de 2018, de: <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr>.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(6), 305-1329.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente»: un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P. y Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 21(2), 203-228.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Use of a learning trajectory as a conceptual instrument to develop the competence of professional noticing. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of*

- the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 107-114). Umeå, Sweden: PME.
- Sarama J. y Clements D. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. London and New York: Routledge.
- Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education* 16, 379-397.
- Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 49-70.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147-156.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. TAL Project*. Freudenthal Institute, Utrecht University and National Institute for Curriculum Development. Utrecht. The Netherlands.
- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of psychology of education*, 9(3), 77-101.
- Vygotsky, L. S. (1985). La méthode instrumentale en psychologie. En B. Schneuwly y J. P. Bronckart (Eds.), *Vygotsky aujourd'hui* (pp. 39-47). Neudchâtel: Delachaux & Niestlé.
- Wilson, P. H., Mojica, G. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 227-244.