

UNA MIRADA A LAS INVESTIGACIONES INTERNACIONALES SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y PROBLEMAS EMERGENTES

A VIEW AT INTERNATIONAL RESEARCH ON TEACHERS' KNOWLEDGE AND EMERGING PROBLEMS

OLIMPIA FIGUERAS¹ Y MARIANA SÁIZ²

¹*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,*

²*Universidad Pedagógica Nacional*

RESUMEN

El conocimiento del profesor es actualmente uno de los objetos de estudio importantes de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática. Desde finales de los años noventa se ha incrementado el interés por comprender mejor las características de ese conocimiento y su papel en el aprendizaje de los estudiantes. En este capítulo se delinearán direcciones de investigación para acceder a un entendimiento profundo de la compleja tarea de los profesores de matemáticas y de cómo su conocimiento les permite estructurar actividades en el salón de clase. La exposición se hace a través de cuatro preguntas sobre quién determina la efectividad de la práctica, qué sabe el profesor y cómo usa su conocimiento, cuál es el conocimiento esencial para enseñar matemáticas y si el profesor es usuario o productor de conocimiento.

Palabras clave: *conocimiento matemático, conocimiento para enseñar matemáticas, conocimiento práctico, enriquecimiento del conocimiento práctico.*

Figueras, O. y Sáiz, M. (2019). Una mirada a las investigaciones internacionales sobre el conocimiento del profesor y problemas emergentes. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 193-214). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

Teacher's knowledge is currently one important study object of the international community of researchers in mathematics education. Since the end of the nineties the interest in better understanding the structure of that knowledge and its role in students' learning has been growing. In this chapter, research directions to gain an understanding of the complex task of mathematics teachers and how their knowledge enables them to structure activities in the classroom are outlined. Presentation is made through four questions about who determines the effectiveness of the practice, what the teacher knows and how this knowledge is used, what is the substantial knowledge for teaching mathematics and whether the teacher is a user or a producer of knowledge.

Keywords: teachers' mathematical knowledge, knowledge for mathematics teaching, practical knowledge, enrichment of practical knowledge.

INTRODUCCIÓN

EN 2004, en la lista de los dominios de investigación para clasificar las propuestas que se enviaban a consideración del comité organizador del 28avo congreso anual del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (IGPME, por sus siglas en inglés) apareció por primera vez el 'conocimiento del profesor'. Este hecho, como mencionan Lin y Rowland (2016), es uno entre muchos indicadores de que la comunidad internacional de investigadores en educación matemática consideró esa temática como un 'campo legítimo de investigación'. Esto sólo quiere decir que 'el conocimiento del profesor' como objeto de estudio se reconoció tardíamente, porque desde 1976 (año de creación del IGPME) al 2003 se publicaron en las memorias anuales de los congresos de ese grupo una gran cantidad de informes de estudios sobre el profesor, su conocimiento, sus creencias y su práctica. da Ponte y Chapman (2006) dan cuenta del incremento en el interés de los miembros del IGPME por dicha temática desde mediados de la década de los noventa.

En contraste, en el campo de la educación, el estudio de los profesores y de la enseñanza desde diferentes perspectivas tenía ya una larga tradición. Como con muchos otros asuntos, investigadores de educación matemática adoptaron, adaptaron y construyeron sus conceptualizaciones sobre el conocimiento matemático del profesor a partir de marcos teóricos de referencia estructurados para el conocimiento del profesor en el ámbito de la educación en general. Entre esos, los que más influencia han tenido en la caracterización del conocimiento matemático del profesor son los marcos de:

- Shulman (1986), cuyo constructo 'conocimiento pedagógico del contenido' ha sido un elemento clave para modelos en la investigación en educación matemática (en esta parte del libro, tres de los cuatro capítulos citan a

este investigador, se puede vislumbrar una influencia de su marco teórico en la investigación sobre esta temática en España).

- Elbaz (1981, p. 43) hizo un esfuerzo por conceptualizar el papel del profesor de manera más adecuada que sólo mirarlo como un ente pasivo, o bien, como un operador del currículo y propuso considerar al profesor como poseedor y usuario de un ‘conocimiento práctico’.
- Schön (1983) distinguió entre la racionalidad técnica y la ‘práctica reflexiva’; afirmó que el conocer está en nuestra acción y en ese contexto se refiere a constructos como conocer-en-la-acción, reflexionar-en-la-acción, reflexionar-en-la-práctica y enmarcar y re-enmarcar.

Fenstermacher (1994) hace una revisión de concepciones de conocimiento usados en cuerpos de investigación sobre la enseñanza para identificar cuáles son las nociones de conocimiento empleadas y analizadas en programas de investigación que estudian a profesores y a su enseñanza. En esa revisión considera al conocedor y lo conocido y organiza la literatura a través de cuatro preguntas: ¿Qué se sabe acerca de la enseñanza efectiva?, ¿qué saben los profesores?, ¿cuál es el conocimiento esencial para enseñar?, y ¿quién produce conocimiento acerca de la enseñanza?

Menciona Fenstermacher (1994, pág. 4) que la pregunta: ¿qué se sabe acerca de la enseñanza efectiva? permite aproximarse al concepto conocimiento tal y como aparece en la investigación estándar o convencional de la ciencia del comportamiento. Los estudios proceso-producto sobre la enseñanza son quizás el ejemplo más conocido de esta noción.

La segunda pregunta, ¿qué saben los profesores?, apunta a la investigación con la cual se pretende comprender lo que los profesores saben como resultado de su experiencia como maestros. El filósofo lo llama conocimiento práctico y afirma que en las respuestas a esta pregunta aparecieron varias modalidades de este tipo de conocimiento, a saber: práctico, personal práctico, situado, local, relacional y tácito.

¿Cuál es el conocimiento esencial para enseñar? es una pregunta que se dirige al programa de investigación de Lee Shulman y sus colegas. Fenstermacher afirma que en el trabajo de este investigador no se introducen tipos de conocimiento diferentes de los que aparecen en las respuestas a las dos preguntas anteriores, sino que se intenta mostrar qué formas y tipos de conocimiento se requieren para enseñar de manera competente.

Para considerar la diferencia entre conocimiento generado por la investigación basada en universidades y el generado por profesores practicantes, Fenstermacher formula la cuarta pregunta, ¿quién produce conocimiento acerca de la enseñanza? El investigador cita el trabajo de Cochran-Smith y Lytle (ver por ejemplo, 1993) como prominente de esta categoría, el cual se relaciona con el profesor como productor de conocimiento. En educación matemática un ejemplo preponderante es el conocido como ‘Estudios sobre Lecciones’ (*Lesson Study*) del programa de investigación japonés estructurado por profesores de matemáticas (ver Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013).

Curiosamente, la organización de Fenstermacher a través de las cuatro preguntas permite estructurar una revisión de líneas de investigación de la comunidad internacional sobre el conocimiento matemático del profesor, por ello se decidió usarlas para estructurar la exposición.

Antes de iniciar, un comentario. Hay una gran cantidad de documentos relacionados con este tema. En la revisión de da Ponte y Chapman (2006) de las memorias del PME de 1976 a 2006, ellos identificaron 230 y Lin y Rowland (2016), en la década de 2006 a 2016, encontraron, en una primera clasificación, 975 documentos que aludían a algún aspecto sobre el conocimiento matemático del profesor y su práctica. En este capítulo se describen a grandes rasgos líneas de investigación y se usan ejemplos de programas de investigación que se consideran cumplen con las características de esas orientaciones de indagación. Imposible ser exhaustivo.

¿QUÉ SE SABE ACERCA DE LA ENSEÑANZA EFICIENTE?

De acuerdo con Murillo (2008), Scheerens, el investigador holandés de la enseñanza eficiente, es quien propone un primer modelo teórico global de eficiencia escolar, él consideró cuatro niveles: alumno individual, aula, centro educativo y contexto. Para Murillo (2008), la propuesta más concreta es la de Creemers, quien diseñó un modelo de eficiencia docente (ver Scheerens y Creemers, 1996), debido a que ya desde entonces se había encontrado que el nivel de aula es el que tiene más impacto en los logros de los estudiantes.

Miao (2015) comenta que entre los pocos estudios donde convergen las investigaciones de la educación matemática y de la enseñanza eficiente se encuentra el proyecto inglés, de 1997, Profesores Eficientes en Aritmética (*Effective Teachers of Numeracy*) que se enfocó en las creencias de los maestros acerca de las matemáticas y su enseñanza, y sus conocimientos de contenido pedagógico (en el sentido de Shulman, 1986) en relación con su enseñanza efectiva de dicha materia en las aulas. Entre los resultados de este proyecto está la distinción de tres estilos para enseñar matemáticas: orientados a la conexión, a la transformación o al descubrimiento, y el reconocimiento de que los maestros eficientes tendían a ser 'conexionistas', es decir, capaces de conectar diferentes ideas matemáticas y diferentes representaciones de cada idea por medio de una variedad de palabras, símbolos y diagramas (McDonough y Clarke, 2003). Otro hallazgo es que los maestros eficientes tenían conocimientos más profundos de las matemáticas, del conocimiento pedagógico del contenido y de los alumnos; aunque es necesario aclarar que, en dicho estudio, los maestros no eran típicos, provenían de escuelas consideradas de enseñanza eficiente.

Los estudios comparativos internacionales también muestran el interés por encontrar características que relacionen a las escuelas, los ambientes escolares o los maestros con los logros académicos de sus estudiantes. Respecto a matemáticas, los video estudios hechos en el contexto del Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (*Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS)), de 1995 y 1999, son ejemplos de ese tipo de indagación. Otro estudio más reciente es el Estudio de Educación y Desarrollo de Profesores de Matemáticas (*Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M)) implementado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA)), que lo define como «el primer estudio comparativo internacional enfocado exclusivamente en la formación de profesores». El TEDS-M se llevó a cabo en 2008; participaron Alemania, Botsuana, Canadá, Chile, España, Estados Unidos, Federación Rusa, Filipinas, Georgia, Malasia, Noruega, Omán, Polonia, Singapur, Suiza, Tailandia y Taipéi, con el objetivo de encontrar diferencias en la formación de los maestros en los distintos países, obtener datos sobre los conocimientos de los profesores e indagar relaciones entre algunas características de los programas formativos y los resultados de los estudiantes en matemáticas. Aunque el estudio es comparativo y no se hacen recomendaciones para lograr una enseñanza eficiente, sí se establecen hipótesis que pueden guiar investigaciones posteriores relacionadas con la eficiencia.

Una de tales hipótesis es que tres de las variables (máximo grado de preparación de los maestros, duración del programa y alcance de la especialización en la materia) podrían ser especialmente poderosas para aprender y obtener resultados. Y, en lo que respecta a los resultados de la pedagogía matemática, puede ser que una experiencia de campo más prolongada y una amplitud en el grado (en el que se va a trabajar) se asocien con puntuaciones de conocimiento más altas. Pero todo esto está sujeto a confirmación en posteriores análisis de TEDS-M diseñados para explorar qué tan bien los datos empíricos encajan con estas hipótesis (Tatto, 2013, p. 27).

Otro organismo que desde la década de los 90's ha coordinado estudios internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el Centro para la Innovación en la Enseñanza de las Matemáticas (CIMT, por sus siglas en inglés) de la Universidad de Exeter. Entre 2007 y 2009 se llevó a cabo un estudio comparativo, centrado en la formación del profesor, denominado Estudio Internacional Comparativo sobre la Formación de Maestros de Matemáticas (ICSM por algunas de sus siglas en inglés), en el cual participaron China, Finlandia, Hungría, Inglaterra, Irlanda, Japón, República Checa, Rusia, Singapur y Ucrania. Burghes (2011, pág. 8) afirma que:

El objetivo de este estudio fue buscar un entendimiento de la buena práctica en la formación de profesores de matemáticas (de primaria y secundaria). Está basado en evidencia de una variedad de países con alto desempeño y usa un estudio parcialmente longitudinal para proveer recomendaciones para la formación efectiva. Se usa el término «buena práctica» para reconocer que la formación de maestros está sujeta a gran variación dentro de y entre los países y reconoce que los procesos de formación varían de país en país por lo que se ha procurado ser agudos para identificar lo que todos estuvieran de acuerdo en considerar buena práctica, sin importar el contexto y la cultura.

Del análisis de la información recabada, los responsables de la investigación de cada país obtienen recomendaciones para la formación inicial de los maestros de primaria y de matemáticas de secundaria. Por ejemplo, para la selección de los futuros profesores sugieren elegir candidatos que tengan confianza en sus conocimientos y sean competentes en matemáticas en un nivel significativamente mayor a aquel en el cual se van a desempeñar y que hayan llevado cursos de esa materia sin interrumpir hasta ingresar a la carrera. A las instituciones formadoras les recomiendan un equilibrio entre teoría y práctica y usar la tecnología de ‘estudio de lecciones’ (*lesson study*) como el concepto más importante en el trabajo en las aulas formadoras. Otra recomendación es darle al formador tiempo suficiente para preparar sus lecciones, investigar y trabajar con expertos.

Los estudios comparativos han incluido una sección dedicada a observar las clases en diferentes países (por ejemplo, los estudios de video del TIMSS). El resultado es que la metodología de investigación se ha aplicado también, con buenos resultados, en la formación de maestros; en parte por el ejemplo de Japón donde surge el ‘estudio de lecciones’ como metodología de trabajo de los maestros. El recurso de observación en el aula también ha sido relacionado con la efectividad.

Quizás la razón más obvia para estudiar aulas de diferentes culturas es que la eficiencia de la escolarización, medida por el logro académico, difiere a través de las culturas ... Si las diferencias de logros transnacionales están vinculadas a variaciones culturales en la enseñanza, podemos descubrir formas de enseñar que funcionan mejor que las que nuestra sociedad emplea habitualmente. Esto nos permitiría aprovechar la experiencia de otros que comparten objetivos similares en todo el mundo (Stigler, Gallimore, y Hiebert, 2000, p. 87, citados por Clarke, 2003, pág. 11).

Otro ejemplo de estudio sobre la eficiencia, aunque a menor escala que los ya mencionados, es el Proyecto de Investigación sobre Conocimientos Tempranos de Matemáticas (*Early Numeracy Research Project* (ENRP)) de McDonough y Clarke (2003). Ellos estudian a maestros y alumnos de los tres primeros grados de primaria, observan el progreso de los alumnos de un año a otro y, basados en esa

información y algunas otras variables, eligen a seis maestros a quienes catalogan como maestros eficientes. De cada uno hacen un estudio de caso: observando su instrucción en el aula, haciéndoles entrevistas y entrevistando a otros miembros de las escuelas, entre muchas otras acciones. Del análisis de esta información obtienen un perfil de lo que es ser un maestro eficiente; entre otras características mencionan las siguientes: el profesor se enfoca en ideas matemáticas importantes y hace claro el enfoque a los niños, propone tareas significativas que los mantengan interesados y que se puedan resolver por distintos métodos, usa materiales variados, conecta con ideas de otras lecciones o temas, evita decir todo lo que hay que hacer a los niños, anima a que ellos expresen sus ideas, los invita a escuchar a sus compañeros con atención, tiene expectativas altas pero realistas de sus alumnos, reflexiona y finaliza sus lecciones con las ideas clave, usa muchos métodos para evaluar a los niños, se siente seguro de sus conocimientos y desempeño profesional.

Miao (2015) como resultado de su investigación comparativa entre escuelas primarias de Inglaterra y China obtiene una serie de recomendaciones para cada país. Para Inglaterra sugiere no usar clases tipo conferencia; incrementar interacciones del grupo completo entre sí y con su profesor; mejorar los conocimientos de contenido y de contenido pedagógico de los maestros y especializar a los maestros de primaria. Mientras que para China, el investigador considera que el problema no está en las aulas (excepto el de atender mejor a niños con necesidades educativas especiales), sino en los cambios en la sociedad y la política de un país que tiende a americanizarse; por lo que recomienda preservar los acercamientos educativos actuales y evitar cambios radicales en las aulas.

Un panorama general de lo que se ha hecho y lo que falta por hacer en la investigación sobre formación de maestros y su relación con los logros de los estudiantes es el siguiente:

Los temas que se han estudiado ampliamente y para los cuales existen numerosas publicaciones internacionales son: la efectividad de programas particulares de formación docente; el (re) aprendizaje de los docentes en los procesos de reforma y en comunidades profesionales y otros entornos institucionales. [...] Los problemas que no se han examinado son: el aprendizaje de los docentes en contextos donde la reforma no es el problema dominante; la naturaleza del aprendizaje de los maestros a partir de la experiencia; profesores que aprenden a tratar cuestiones de género, idioma y estatus socioeconómico; comparaciones de la efectividad de diferentes entornos de formación docente; y los efectos de extender los programas a entornos de aprendizaje diferentes (Gellert, Becerra Hernández y Chapman, 2013, pág. 330).

Además de los temas mencionados en la cita anterior y las cuestiones pendientes que provienen del TEDS-M, una futura dirección para continuar en esta línea

de investigaciones es el estudio de programas de formación eficientes que integren innovaciones basadas en resultados de investigación. Entre la problemática general de los programas de formación se encuentra la de la admisión de los aspirantes, cuáles deberían ser las características de los conocimientos y las aptitudes de una persona que aspira a ser profesor de matemáticas, esto sin duda tiene repercusiones en su formación docente y a la larga en su enseñanza. Un acercamiento a esta problemática es el estudio de Gorgorió y Albarracín (ver capítulo en este libro) quienes indagan sobre el conocimiento matemático de alumnos que acceden a un programa de formación para educación primaria.

¿QUÉ SABEN LOS PROFESORES?

Como reacción a la forma de conceptualizar el papel de los profesores como transmisores pasivos de conocimiento, o bien agentes que implementan el currículum adaptando y cambiando los materiales producidos por otros, como se mencionó al inicio de este capítulo, Elbaz (1981) propone otra manera de concebir su actuar sosteniendo que el profesor tiene y usa ‘conocimiento práctico’.

Elbaz afirma que al iniciar su investigación quiso mirar primero la percepción que se tenía del desarrollo curricular, proceso en el cual el profesor tiene una participación importante. Si este proceso es visto como una progresión lineal, cuyos fines se separan de los medios, ella asevera que una consecuencia de esa apreciación es la distinción radical de la teoría y la práctica, con la consecuente problemática de cómo aplicar la primera en la segunda; es evidente que en última instancia es el profesor quien traduce las nociones teóricas a la práctica y que los eventos en el aula son la «concreción del currículo» (Westburry, 1977, citado en Elbaz, 1981, pág. 43).

En esta descripción se pone de manifiesto una problemática que ha perdurado, la brecha entre la práctica y la teoría. Black y Halliwell (2000) dicen «es preocupante que a los maestros les resulte difícil aplicar los conocimientos adquiridos mediante el estudio formal a las complejidades de la enseñanza» (pág. 103). Afirmación que subraya lo que piensan los profesores sobre lo que aprenden, en particular acerca de la teoría, en los programas de formación. Onk (2009) afirma que:

... la ‘vieja brecha’ entre la práctica y la teoría existe en diferentes formas y a diferentes niveles. Aun cuando Freudenthal, ya en 1987 sostenía que ‘la brecha no es necesaria’ (p. 14), investigadores recientes y educadores de profesores todavía se refieren –directa o indirectamente– a la existencia de este fenómeno (ver, Ball y Cohen, 1999; Jaworski, 2006; Van Zaten y Van Gool, 2007) (pág. 10).

Estudiar cómo estrechar esa brecha constituye una de las direcciones de la investigación en educación matemática. Y en este rumbo el conocimiento práctico¹ es un concepto que permite estudiar esa problemática y diseñar estrategias para acercar la teoría a la práctica a través de los programas de formación de profesores.

Oonk (2009) afirma que la investigación hecha por Elbaz (1981) y su conceptualización del conocimiento del profesor fue un factor que provocó un cambio de giro: de enfocarse en el estudio sobre el pensamiento del profesor a centrarse en la investigación acerca del conocimiento práctico del profesor. Para ella este conocimiento es personal y 'situacional'.

Fenstermacher (1994, pág. 11) tras hacer una revisión de las diferentes nociones que se usaron para estudiar al profesor y su enseñanza describe al conocimiento práctico como:

... aquel conocimiento o comprensión desarrollada de la participación en y la reflexión sobre la acción y la experiencia. Está limitado por la situación o el contexto en el cual surge, puede o no ser capaz de expresión inmediata a través de la palabra o la escritura. El conocimiento práctico del profesor está generalmente relacionado con cómo se hacen las cosas, o el mejor lugar y tiempo en el cual se hacen, o acerca de cómo ver e interpretar eventos relacionados con sus propias acciones.

Con la intención de incluir un ejemplo de un programa de investigación estructurado con el objeto de relacionar la práctica con la teoría y centrando la atención sobre el conocimiento práctico del profesor de matemáticas, se eligió un programa holandés que se vincula con el proyecto MILE (Goffree y Oonk, 2001) y con la investigación relacionada con el 'enriquecimiento-con-teoría del conocimiento practico' (*theory-enriched practical knowlede*) (Oonk, 2009).

MILE es un entorno multimedia de aprendizaje interactivo para la formación de profesores de primaria sustentado, a decir de Goffree y Oonk (2001), por medio de 7 orientaciones teóricas. La primera es que se considera una continuación de la investigación de desarrollo que se lleva a cabo en el Instituto Freudenthal. La segunda corresponde al concepto de conocimiento práctico de Elbaz y la tercera vinculado con una modalidad de ese tipo de conocimiento caracterizado por Fenstermacher (1994), a saber, con el concepto de 'practica reflexiva' de Schön. Como afirman los investigadores holandeses, «esas dos ideas han sacudido al mundo de los formadores de profesores» (Goffree y Oonk, 2001, pág. 112). El uso de narrativas en enseñanza, en aprendizaje y en aprendiendo a enseñar, constituye la cuarta

¹ El conocimiento práctico aparece en la literatura con diferentes nombres, entre otros: 'conocimiento personal práctico' (Clandinin, 1985), 'sabiduría de la práctica', 'conocimiento artesanal' (Grimmett y MacKinnon, 1992, citado en Oonk, 2009, pág. 22).

orientación². La quinta orientación teórica «tiene que ver con la construcción del conocimiento relacionada con el acercamiento socio-constructivista de Paul Cobb, quien obtuvo su inspiración de Kilpatrick (1987) y Schoenfeld (1987)» (pág. 112). La sexta orientación se vincula con la idea de Lampert y Ball (1998, citado en Goffree y Oonk, 2001) «investigar la práctica real para aprender de la práctica», la cual, afirman los investigadores holandeses, ha sido un punto clave por el impacto de su trabajo en MILE. Por último, los investigadores holandeses citan «el trabajo de Alan Tough (1971) sobre educación de adultos».

En ese entorno digital de aprendizaje se introducen situaciones de la realidad de los salones de clase como una fuente para analizar y coadyuvar a la construcción del conocimiento práctico de los estudiantes para profesor. Se puede considerar, afirma Oonk (2009), como una «representación completa de la práctica» que proporciona ejemplos de ‘buenas prácticas’ para el uso en la formación docente» (pág. 66). Esta representación se incluye en el entorno de aprendizaje de diferentes maneras – historias de maestros, estudios de caso, incidentes críticos, videos, trabajo de campo de los estudiantes y representaciones multimedia– (Goffree y Oonk, 2001).

MILE constituye el escenario en el cual Oonk (2009) pone a prueba su programa de formación y analiza cómo y a qué nivel los estudiantes para maestros de primaria pueden integrar la teoría y la práctica y cómo la organización de su entorno de aprendizaje, centrándose especialmente en las matemáticas y la pedagogía, pueden contribuir a eso.

Para lograr los objetivos Oonk (2009) hace 4 estudios diferentes. Dos exploratorios, el primero con 2 estudiantes para profesor y la intención de saber cuáles son las características de los procesos de investigación en MILE y cuál es el resultado de su aprendizaje en términos de construcción de conocimiento. El segundo con 25 estudiantes estuvo centrado en las evidencias del uso de la teoría inmersas en sus reflexiones sobre situaciones de práctica estudiadas en MILE. El tercer estudio, de pequeña escala con 14 participantes de 2 centros de formación, tenía el objetivo de responder las preguntas de qué manera y en qué grado los estudiantes usan el conocimiento teórico al describir situaciones prácticas después de estudiar en un entorno de enseñanza que invita al uso de la teoría, y obtener información sobre el grado de la relación entre el uso de la teoría y el nivel de dominio de la aritmética. El estudio a gran escala con 269 estudiantes de 11 centros tiene por objeto saber

² Connelly y Clandinin (1990, citado en Fenstermacher, 1994) al concebir al profesor como poseedor de conocimiento práctico personal vieron la necesidad de encontrar nuevas formas de aprender lo que sabe sin emplear métodos que distorsionen, destruyan o reconstruyan ese conocimiento. Ellos han contribuido al desarrollo de la indagación narrativa, metodología que no sólo se ha utilizado en la investigación, sino que algunos de sus elementos han servido también como recurso en la formación de los profesores.

en qué grado los futuros profesores son capaces de hacer conexiones entre la teoría y la práctica.

Entre los resultados del proyecto de investigación dirigido por Oonk (2009), además de enriquecer el entorno de aprendizaje MILE, se encuentra la construcción de un instrumento que permite la descripción del uso de la teoría por parte de los estudiantes. Las variables, la naturaleza del uso de la teoría –descripción de hechos, interpretación, expresión y respondiendo a– y nivel de uso –no hay un uso visible, uso mecánico o reproductor, integración y síntesis– se emplean para el diseño de un instrumento que puede utilizarse tanto para fines de sondeo, como de evaluación.

Oonk (2009) describe en el resumen de su tesis los resultados que encontró:

Casi todos los estudiantes pudieron integrar la teoría y la práctica de una manera natural a través de la obtención del llamado 'conocimiento práctico enriquecido-con-teoría'. [...] En tal situación, los estudiantes utilizan principalmente la teoría para analizar la práctica o para responder a situaciones prácticas. Sin embargo, hay diferencias significativas, que se expresan, entre otras cosas, en la relación entre la naturaleza y el nivel de uso de la teoría y las variables relacionadas con los estudiantes, como el grado de estudio, la educación previa y el dominio de la aritmética. El aumento en el nivel de uso de la teoría por parte de los estudiantes se produce principalmente durante la interacción dirigida por el formador de maestros. [...] Entre otras cosas, los resultados del estudio apuntan hacia la necesidad de medidas pedagógicas adicionales para aquellos estudiantes con una educación vocacional secundaria superior sin matemáticas, así como para estudiantes con una educación preuniversitaria con matemáticas.

Otros programas de investigación se han llevado a cabo con marcos de referencia y recursos metodológicos y tecnológicos semejantes, tales como: Un Marco Basado en la Práctica del Conocimiento Matemático de los Profesores para Enseñar (*A practice-based framework for teachers' knowledge for teaching*) del equipo de la Universidad Estatal de Michigan, en Estados Unidos (ver por ejemplo, Petrou y Goulding, 2011) y el implementado en España en la Universidad de Alicante (ver por ejemplo el capítulo de Llinares, Ivars, Bufon y Groenwald en este libro).

¿CUÁL ES EL CONOCIMIENTO ESENCIAL PARA ENSEÑAR?

La discusión sobre cuál es el conocimiento esencial para enseñar matemáticas tiene una larga historia. Fennema y Franke (1992) mencionan que pese a las creencias sobre la importancia del conocimiento de las matemáticas y la evidencia de que algunos maestros no tienen el conocimiento de matemáticas adecuado para enseñar, la investigación antes de la década de los ochenta había aportado pocas

evidencias para sostener la existencia de una relación directa entre el conocimiento de matemáticas del profesor y el aprendizaje de sus estudiantes. Ellas comentan que los estudios que se hicieron para intentar establecer esa relación no arrojaron los resultados esperados debido a cómo se caracterizaba el conocimiento matemático del profesor, por ejemplo por medio del número de cursos universitarios de matemáticas que se habían acreditado, sin considerar lo que se había aprendido en ellos.

El marco de referencia de Shulman (1986) fue un factor, entre otros, que contribuyeron a centrar la atención en el conocimiento del profesor y el uso que hace de ese en su enseñanza, lo que posibilitó la búsqueda por caracterizar el conocimiento matemático del profesor. Shulman propuso tres dimensiones del conocimiento del profesor acerca del contenido, la categoría que ha tenido más influencia es la llamada ‘conocimiento pedagógico del contenido’ (PCK, por sus siglas en inglés), un conocimiento complementario al del contenido de la materia a enseñar, que en el caso de las matemáticas se abrevió como MCK (por sus siglas en inglés).

Desde entonces se ha generado una amplia discusión sobre esta temática y se han propuesto varios modelos teóricos del conocimiento matemático del profesor (ver por ejemplo Fennema y Franke 1992, y Petrou y Goulding, 2011) usados por los investigadores en educación matemática para estudiar la enseñanza y mejorar los programas de formación. En esta sección se describen a grandes rasgos las características de dos modelos y sus alcances; la exposición se inicia con el modelo que a decir de Lin y Rowland (2016) es «el marco teórico dominante en la investigación actual en el campo» (pág. 487), este es el de Ball y colaboradores, sustentado en la práctica.

Ball, Thames y Phelps (2008) con miras a definir las categorías de Shulman para el caso de la enseñanza de las matemáticas, han desarrollado un gran número de estudios. De éstos obtuvieron propuestas para los constructos PCK y CK específicos para las matemáticas. Por un lado, dividen el PCK en tres partes: ‘conocimiento del contenido y de los estudiantes’ (Knowledge of Content and Students (KCS)), ‘conocimiento del contenido y la enseñanza’ (Knowledge of Content and Teaching (KCT)) y ‘conocimiento del currículum’ (Knowledge of Curriculum (KC)). Por el otro, crean el MCK y lo dividen en tres partes también. Una es el ‘conocimiento común del contenido’ (*Common Content Knowledge* (CCK)), en el cual la palabra ‘común’ se refiere a un conocimiento matemático compartido con otros profesionales mientras que el otro, el denominado ‘conocimiento especializado del contenido’ (*Specialized Content Knowledge* (SCK)), sería aquel de quienes enseñan matemáticas. La tercera parte corresponde al conocimiento del contenido de horizonte (*Horizon Content Knowledge* (HCK)) el cual se refiere a la apreciación de cómo se relacionan unos tópicos matemáticos con otros. Al marco teórico de Ball y colaboradores se le conoce de forma abreviada como MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*), referido al conocimiento del contenido necesario para enseñar matemáticas.

De acuerdo con Depaepe, Verschaffel, y Kelchtermans (2013) los cambios antes mencionados, provocan que lo que era un constructo teórico quede convertido en uno empírico que condensa el conocimiento del contenido, o de la materia, y el conocimiento pedagógico del contenido. Para ellos el cambio tiene ventajas, el concepto MKT tiene tres méritos:

Primero, el MKT es el resultado de la investigación empírica sobre el conocimiento que los profesores necesitan para la enseñanza de las matemáticas, y como tal proporciona fundamentos empíricos al PCK. En segundo lugar, [...] convierte el concepto de Shulman en un concepto operativo a través del desarrollo de una medida del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza, el cuestionario del MKT. Si bien este instrumento de evaluación incluye típicamente elementos para cuatro categorías del modelo (CCK, SCK, KCS, y KCT), se centra en particular en las categorías de conocimiento de contenidos comunes y especializados. Las preguntas se refieren a las tres áreas de contenido que se enseñan con mayor frecuencia: (1) conceptos numéricos, (2) operaciones y (3) patrones, funciones y álgebra [...]. En tercer lugar, el concepto MKT proporciona evidencia empírica para una relación positiva entre el PCK de los docentes y los resultados del aprendizaje de los alumnos (Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013, p. 14).

Existe un gran número de investigaciones que usan este marco teórico, ya sea siguiendo directamente a Shulman o las modificaciones establecidas por Ball y sus colaboradores, y sería infructuoso incluir todos los elementos relacionados con el conocimiento esencial para la enseñanza extraídos de esos estudios. Una alternativa es buscar coincidencias de lo que forma parte del PCK para obtener una idea de qué puede ser lo esencial en este constructo. Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans (2013) analizaron los significados dados al PCK en 60 artículos, elegidos de manera sistemática en las bases de datos más reconocidas a nivel mundial. Ellos encontraron que para casi todos los autores el PCK tiene que ver con los conocimientos de los profesores; la conexión entre el contenido y la pedagogía es específica de la enseñanza, y tiene como prerrequisito el conocimiento del contenido. Respecto a los componentes del PCK ellos encuentran que todos los autores coinciden en que este tipo de conocimiento incluye el específico sobre las concepciones erróneas de los estudiantes y sobre estrategias de resolución de problemas y representaciones de los contenidos matemáticos. Por lo que las variables que aquí se han mencionado pueden considerarse conocimientos esenciales para un profesor de matemáticas.

Entre los programas de investigación que usan ideas relacionadas con el marco teórico de Ball y colaboradores para sustentar y diseñar la formación inicial de profesores se encuentra el uso del modelo teórico desarrollado en la Universidad de Huelva (ver Montes, Carrillo, Contreras, Liñan-García y Barrera-Castarnado, en un capítulo de este libro).

Con el estudio TEDS-M, comentado antes en este capítulo, se pretendió medir tanto el MCK, como el MPCK, el cual es el PCK específico para matemáticas y, aunque sus reactivos para medir estos conocimientos han sido criticados por diversos autores (ver por ejemplo Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014), las características consideradas para el diseño de estas preguntas posiblemente aportan elementos que pueden ser aceptados como esenciales para la enseñanza de las matemáticas, aunque éstos sean difíciles de medir. Respecto al MCK, TEDS-M considera tres dominios cognitivos para describirlo, éstos son: saber, aplicar y razonar. Para cada uno señalan algunas conductas que los ejemplifican, por ejemplo, un maestro que recuerda, reconoce, calcula o mide está actuando en el saber; cuando selecciona, modela, representa o resuelve problemas rutinarios está actuando en el aplicar y si deduce, generaliza, sintetiza, justifica y resuelve problemas no rutinarios está en el razonar y todas estas actividades describen conocimiento esencial englobado en el constructo MCK. Para el caso del MPCK las dimensiones que se reconocen son: el conocimiento del currículo de matemáticas, conocimiento para planear la enseñanza y el aprendizaje (diseño de lecciones y evaluaciones) y uso y aplicación de las matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje (explicar o representar conceptos matemáticos o procedimientos, generar buenas preguntas, diagnosticar las respuestas de los alumnos incluyendo las concepciones erróneas).

También en una tradición cognitiva, se estableció otro marco de referencia teórico para el conocimiento matemático del profesor, el Cuarteto del Conocimiento (*The Knowledge Quartet* (KQ)). Ese marco de referencia conceptual basado empíricamente surge de la investigación acerca del conocimiento matemático del contenido de futuros profesores de educación elemental, indagación inscrita en el proyecto SKIMA desarrollado por miembros de la Universidad de Cambridge. Petrou y Goulding (2011) afirman que «el proyecto se sustentó en el marco teórico de Shulman (1986) pero responde a Fennema y Franke (1992) porque categoriza situaciones del aula en las cuales el conocimiento matemático surge en la enseñanza» (pág. 18). Turner y Rowland (2011) afirman que el KQ

... proporciona un marco para el análisis del contenido matemático que conforma las percepciones del docente cuando éstas se reúnen todas juntas en la práctica, de modo que la distinción entre diferentes tipos de conocimiento matemático es de menor importancia que la clasificación de las situaciones en las que surge el conocimiento matemático en la enseñanza (pág. 196).

En esta afirmación de Turner y Rowland subyacen las diferencias entre su marco teórico y el elaborado por Ball y colaboradores, ponen foco en objetos de estudio distintos.

El acercamiento de los investigadores del grupo de la Universidad de Cambridge para estudiar la relación del conocimiento matemático de la materia (SMK)

y PCK de futuros profesores fue observar y videgrabar las clases de matemáticas que los estudiantes imparten en escuelas de educación elemental con la guía de un mentor de la propia escuela. Los alumnos hacen esta actividad durante la mitad del curso de posgrado con duración de un año, en el departamento de educación de una universidad de Inglaterra o Gales, para obtener un certificado de educación, requisito para dar clases en una escuela primaria. Después de observar en el aula al estudiante, el mentor proporciona una reflexión sobre su actuación en el salón de clase. En ocasiones el tutor universitario también participa en esas reuniones, empero afirman Turner y Rowland (2011) que «con frecuencia la revisión versa sobre la gestión y pocas veces se le presta atención al contenido matemático de las lecciones de esa materia» (pág. 196). Por ello los miembros del grupo se propusieron desarrollar un marco de referencia que permitiera enfocar la reflexión en el contenido matemático de la lección y el papel del conocimiento matemático de la materia (SMK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) de quien se está capacitando para ser maestro. Turner y Rowland (2011) afirman que:

Si bien creemos que cierto tipo de conocimiento es deseable para la enseñanza elemental de matemáticas, estamos convencidos de la inutilidad de afirmar lo que un profesor principiante o uno más experimentado debería saber. Nuestro interés es lo que el maestro sabe y cree, y cómo se pueden identificar las oportunidades para mejorar el conocimiento. Hemos encontrado que el Cuarteto del Conocimiento, el marco que surgió de esta investigación, proporciona un medio para reflexionar sobre la enseñanza y el conocimiento del profesor, con miras a desarrollar ambos (pág. 197).

El KQ está formado por cuatro dimensiones: Fundamento, Transformación, Conexión y Contingencia; resumidas por Petrou y Goulding (2011, pág. 18) de la manera siguiente:

(Fundamento) consiste en el conocimiento de los alumnos, las creencias y la comprensión adquiridos en la academia, en preparación para su papel en el aula. Dichos conocimientos y creencias conforman las elecciones y estrategias pedagógicas de una manera fundamental [...] la segunda categoría (Transformación) se refiere al conocimiento en acción, como se demuestra tanto en la planificación para enseñar, como en el acto de enseñar en sí mismo [...] Conexión une ciertas elecciones y decisiones que se toman para las partes más o menos discretas del contenido matemático [...] Contingencia se refiere a eventos en el aula que son casi imposibles de planificar (Rowland et al., 2003, págs. 97-98).

Este marco de referencia puede usarse como herramienta para clasificar las formas en las cuales los conocimientos de la materia y pedagógico del contenido entran en juego en el salón de clase. El KQ se aplica para sustentar el desarrollo de

la enseñanza en carreras iniciales de profesores en Inglaterra y para estructurar la formación inicial de profesores en Irlanda. Para el desarrollo de su tesis de doctorado, Petrou usó este marco teórico con el objeto de comprender qué relación podía observarse entre el conocimiento matemático de futuros profesores de Chipre y su enseñanza. Ella argumenta que en términos generales el KQ sirvió al clasificar el conocimiento de los estudiantes en las situaciones de enseñanza en las cuales los conocimientos matemáticos de los futuros docentes emergen (Petrou, 2009, citado en Petrou y Goulding, 2011, pág. 19).

Aun cuando en el KQ no se consideraron aspectos relacionados con la interpretación y el uso de libros de texto, sí fueron importantes en el análisis de las lecciones de matemáticas que se enseñan en las aulas chipriotas. Petrou y Goulding (2011) sugieren que al adaptar el KQ es importante tener cuidado con las diferencias entre el contexto en el cual el marco se construyó y en el que se quiere aplicar. Petrou (2009, citado en Petrou y Goulding, 2011, pág. 19) argumenta que quizá los libros de texto son menos visibles en Inglaterra de lo que son en Chipre, pero también podría ser que debido a que el estudio original se centró en PCK y MCK y no en el conocimiento del curriculum este aspecto del conocimiento del profesor se echa en falta en el KQ, ya que el conocimiento del curriculum es importante en cualquier intento por comprender qué necesitan saber los profesores para poder enseñar matemáticas eficientemente.

Los constructos MCK, PCK y sus derivados son producto de una manera de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero existen otras. Las perspectivas socio-culturales se enfocan en aspectos que parecen muy diferentes a los que hasta ahora se han mencionado.

Los enfoques discursivos de investigación en educación matemática se describen como «participacionistas» y están típicamente yuxtapuestos a aquellos etiquetados como «adquisicionistas» (Kieran, Forman, & Sfard, 2002) que, a menudo, han sido cuestionados en los terrenos metodológicos y epistemológicos (Sriraman y Nardi, 2013): los métodos clínico-experimentales pueden estar alejados de donde se produce el aprendizaje; y, el aprendizaje no es invariante del contexto universal. Como Kieran et al. (2002) notan, las perspectivas discursivas apuntan a unir dimensiones individuales y sociales del aprendizaje, propugnan el principio socio-cultural de que el aprendizaje ocurre en, y es co-constituido por el medio situacional, cultural e histórico, y enfatizan el pensamiento humano como un tipo de comunicación (Gagatsis & Nardi, 2016, pág. 187).

Una de las teorías discursivas más influyentes es la teoría de la comognición de Sfard (explicada y usada por Gavilán-Izquierdo, Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Fernández-León, ver capítulo en este libro). Esta teoría considera a las matemáticas como un discurso y distingue cuatro elementos que lo caracterizan

como discurso matemático: Uso de palabras, mediadores visuales, narrativas (que describen objetos, procesos y relaciones entre ellos, por ejemplo, las definiciones y los teoremas) y rutinas (modo de justificar, modo de multiplicar, patrones de comportamiento). Sfard considera que la comunicación humana está regulada por reglas y que esas reglas son a nivel objeto (narrativas que informan sobre el comportamiento regular de los objetos del discurso) y meta reglas, esto es, «patrones de comportamiento que se observan en la actividad de los participantes del discurso cuando estos tratan de producir, corroborar o justificar narrativas a nivel objeto» (ver Gavilán et al, capítulo en este libro).

Por otro lado, con esta teoría el aprendizaje se manifiesta como un cambio de discurso, el cual se divide en dos tipos: aprendizaje a nivel objeto y aprendizaje a nivel meta (cuando se produce un cambio en las meta reglas del discurso). Estas diferencias llevan a pensar que desde esta perspectiva los conocimientos esenciales para enseñar matemáticas no serían los que ya se han mencionado, sino que se centrarían en aquellos indicadores de los cambios de discurso, las maneras en que éstos se estructuran y las habilidades o competencias necesarias para promover esos cambios.

¿QUIÉN PRODUCE CONOCIMIENTO ACERCA DE LA ENSEÑANZA?

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, esta pregunta tiene como propósito distinguir el conocimiento producido por medio de la investigación llevada a cabo en las universidades y aquella hecha por el profesor. En las secciones anteriores todas las líneas descritas se han enfocado en el primer tipo, en esta parte la descripción se centrará sobre la investigación del profesor resaltando su papel como un productor de conocimiento. Dos modalidades se distinguen, una en la cual el profesor produce el conocimiento a partir de su experiencia y la reflexión sobre su práctica, y otra en la que el profesor produce conocimiento junto con otros colegas e investigadores.

Cochran-Smith y Lytle (1993), habiendo sido tanto profesoras como investigadoras, se niegan a privilegiar un papel sobre el otro, y delimitan su postura de la siguiente manera (posición 145-161):

... hemos tratado de cuestionar la suposición común de que el conocimiento para la enseñanza debe ser principalmente «de afuera hacia adentro», generado en la universidad y luego utilizado en las escuelas, una posición que sugiere que la transmisión se hace sin problemas desde una fuente a un destino. En contraste, ... [nuestra postura] se basa en la noción de que el conocimiento para la enseñanza es «de dentro hacia afuera», una yuxtaposición destinada a enfocar la atención en los maestros como conocedores y en las complejas relaciones, claramente no lineales, entre conocimiento y enseñanza, en tanto están inmersos en los contextos y las relaciones de poder que estructuran el trabajo diario de profesores y alumnos tanto en la escuela, como en la universidad.

Las maestras/investigadoras definen la investigación del profesor como «una indagación sistemática e intencional hecha en su propia escuela y sobre su propio trabajo educativo» (posición 384). Sistemática en relación a las formas de recoger y almacenar información, de documentar las experiencias dentro y fuera del aula, de hacer registros escritos de situaciones. Intencionada ya que es planificada, más que espontánea. Broomer (1987 citado por Cochram-Smith y Lytle) afirma que «aprender deliberadamente es investigar», y por ello el carácter de intencional en la investigación del profesor; ésta se puede considerar como un ejemplar de la investigación acción, la cual se caracteriza como una «indagación sistemática de la propia práctica con el objeto de aprender sobre ella y hacer cambios para sustentar el aprendizaje de los estudiantes» (Herbel-Eisenmann, 2009, citado en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013, pág. 382).

Un programa de investigación de profesores en el contexto de la educación matemática es el conocido como «Estudio de lecciones» (*Lesson study*) diseñado e implementado por profesores japoneses para profesores japoneses. Fernández y Yoshida (2004, citados en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013, pág. 375) dicen que sus orígenes se pueden ubicar alrededor de 1900. En la década de los 60's los profesores empezaron a combinar el estudio de lecciones con un desarrollo profesional basado-en-la-escuela para profesores en activo. Una década más tarde el gobierno reconoció el valor de este tipo de actividades y lo apoyó financieramente. El estudio de lecciones se ha convertido por mucho en el programa de desarrollo profesional más común en Japón.

Kieren, Krainer y Shaughnessy (2013) dicen que después de elegir la lección a estudiar en una escuela, el programa se conforma de 6 etapas: (1) planear colectivamente una lección, (2) observar la lección en acción, (3) discusión sobre la lección, (4) corregir la lección (opcional), (5) enseñar la nueva versión de la lección (opcional), y (6) compartir reflexiones acerca de la nueva versión de la lección. A veces se hacen invitaciones a asesores externos, sus recomendaciones y observaciones son altamente valoradas. Pueden hacerse clases abiertas para la puesta en marcha de una lección y en ocasiones se hacen informes sobre un proceso de estudio de una lección. Hay profesores que participan en varios grupos de estudio de lecciones en otras instituciones diferentes a su escuela.

Ciertas características se consideran factores clave y al mismo tiempo factores de éxito. Murata (2011, citado en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013) identificó 5 de estos factores. El estudio de lecciones está centrado en los intereses de los profesores, se enfoca en los estudiantes, se hace la investigación de lecciones, es un proceso reflexivo y colaborativo. Fernández y Yoshida (2004, citado en Kieren, Krainer y Shaughnessy, 2013) mencionan otros elementos clave. Afirman que el estudio de lecciones tiene sus raíces en movimientos sólidos (por ejemplo, en un aprendizaje centrado en los estudiantes o bien en la resolución de problemas),

considera a la enseñanza como una tarea compleja y una empresa profunda y es parte de la cultura del desarrollo profesional basado en la escuela, una manera de involucrar a los profesores principiantes en actividades académicas serias y una forma de superarse a uno mismo viendo a otros. Alrededor de todo este programa autónomo se advierte un reconocimiento y una confianza en los profesores.

Como ya se mencionó, una de las recomendaciones del TEDS-M es que se utilice el estudio de lecciones como una forma de mejorar el conocimiento matemático de los profesores. Con los logros que este programa ha tenido en Japón, hay muchos intentos de exportar la experiencia a otros países, sin considerar que las características culturales son diferentes y que la decisión de transportar el programa se hace a través de investigadores universitarios y no por iniciativa de los profesores en su escuela para reflexionar sobre su práctica y de ese modo generar un conocimiento práctico que redunde en la mejora de la enseñanza en sus comunidades y su entorno.

La segunda modalidad de la línea sobre el profesor como productor de conocimiento es aquella en la cual el profesor participa en las investigaciones coordinadas por investigadores universitarios. En ocasiones estos estudios se originan a petición de un grupo de profesores para solicitar apoyo con la intención de prepararse mejor para enfrentar alguna problemática; ese es el caso de uno de los ejemplos que incluyen Kieran, Krainer y Shaughnessy (2013). Un grupo de maestras se pusieron en contacto con investigadores de la Universidad de Québec debido a que tenían dificultades para conceptualizar una manera por medio de la cual implementar una reforma educativa sustentada en el uso del acercamiento de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas en sus clases (ver Bednarz, 2004, citado en Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013). Ellas no sabían cómo estructurar una enseñanza de ese tipo para niños pequeños. El proyecto se constituyó para un año en el que ambos, profesores e investigadores se acompañaron para diseñar las tareas que se ponían a prueba en el salón de clase y en la reflexión para valorar el impacto de la actividad matemática promovida por ese tipo de enseñanza. Al final de tres años los miembros del grupo dan cuenta, además del conocimiento adquirido, de productos de varios tipos, entre ellos publicaciones tanto para alumnos, como para profesores e investigadores y concluyen que incorporar a los maestros al equipo de investigación es redituable para la eficiencia de la enseñanza.

Huillet (2007) hace una revisión de informes de investigación en los cuales los profesores eligen indagar asuntos pedagógicos o algún problema del aprendizaje de los estudiantes. Ella afirma que «al parecer cuando se les pide que escojan un tópico, los profesores cuestionan su propia práctica o las dificultades que enfrentan sus estudiantes o bien su desempeño, pero parecen no considerar el contenido que usualmente es enseñado dentro de la institución» (pág. 76). Por esa razón, Huillet lleva a cabo una investigación centrada en las matemáticas para enseñar límites de

una función. El proyecto se basa, por un lado, en el estudio de la relación institucional, en el sentido de Chevallard, de la educación secundaria en Mozambique, con ese concepto, y por el otro, en el estudio del conocimiento matemático que permite al profesor extender esta relación institucional. El estudio de Huillet puso en evidencia que el conocimiento matemático de los profesores no podía darse por sentado. Para aquellos aspectos de matemáticas para enseñar que requerían una comprensión profunda de algunos conceptos de matemáticas básicas la evolución del conocimiento de los profesores a través del desarrollo del proyecto resultó ser limitada. El proceso de investigación fue un reto para el profesor con más experiencia, ya que el estudio que llevó a cabo desafió su propia práctica. Huillet (págs. 78-79) sugiere que los profesores se involucren:

... en indagaciones en las cuales el foco sea las matemáticas para enseñar, basada en aspectos matemáticos y pedagógicos. De esa forma producirían conocimiento que les ayudaría a desarrollar su propia relación con las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. No afirmo que necesariamente enseñen de manera diferente, ya que quizá se enfrenten con las restricciones institucionales, pero su relación personal con las matemáticas les permitirá enseñar de diferente manera.

UN COMENTARIO FINAL

Caracterizar el conocimiento matemático del profesor para enseñar o aquel que entra en juego al enseñar, así como la relación que ese conocimiento tiene con lo que los estudiantes aprenden ha sido una temática de interés en cuya comprensión y diseño de soluciones se ha comprometido un gran número de investigadores y profesores de la comunidad internacional. La literatura que da cuenta de ello es extensa. Pero pareciera que todavía hay mucho que hacer a nivel local. En el recorrido que se ha hecho para comprender mejor la complejidad de la enseñanza de las matemáticas se ha utilizado una diversidad de métodos, tales como: investigación proceso-producto, investigación interpretativa, estudios de caso, investigación participativa, investigación-acción, indagación narrativa. Se han construido también instrumentos para recolectar información, entre estos se encuentran cuestionarios, videos, diarios de clase, mapas conceptuales, narrativas y ensayos. Esas herramientas se usan actualmente para mejorar los programas de formación de profesores y las prácticas de los futuros maestros. Los marcos teóricos para investigar esta temática se han ido refinando y probando en diferentes contextos y países y los programas de formación de unos países se han adaptado o implementado en otros sistemas educativos. Estas adopciones no siempre han sido exitosas, por ello es necesario seguir poniendo a prueba propuestas con la intención de que los profesores sigan comprometidos en crear comprensión en las mentes de los estudiantes a través de representaciones accesibles de las complejas ideas matemáticas.

REFERENCIAS

- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-408.
- Black, A. y Halliwell, G. (2000). Assessing Practical Knowledge: How?, Why?. *Teaching and Teacher Education*, 16(1), 103-115.
- Burghes, D. (2011). *International Comparative Study in Mathematics Teacher Training*. Reading, Berkshire: CfBT. Obtenido de <https://www.educationdevelopmenttrust.com/en-GB/our-research/our-research-library/2011/r-international-comparative-study-in-mathematics-teacher-training-2011>.
- Clandinin, D. J. (1985) Personal Practical Knowledge: A Study of Teachers' Classroom Images. *Curriculum Inquiry*, 15, 361-385.
- Clarke, D. (2003). *The Problematics of International Lesson Structure Comparisons*. Padova, Italia: European Association for Research on Learning and Instruction. Obtenido de <http://www.lps.iccr.edu.au/index.php/publications>.
- Cochran-Smith, M. y Lytle, S. L. (1993). *Inside/Outside: Teacher Research and Knowledge*. NY: Teachers College Press (ebook).
- da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 461-494). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Depaepe, F., Verschaffel, L. y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical Content Knowledge: A Systematic Review of the Way in. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12-25.
- Elbaz, F. (1981). The Teachers' «Practical Knowledge»: Report of a Case Study. *Curriculum Inquiry*, 11(1), 43-71.
- Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Fenstermacher, G. D. (1994): The Knower and the Known: The Nature of Knowledge in Research on Teaching. *Review of Research on Teaching*, 20, 1-54.
- Gagatsis, A. y Nardi, E. (2016). Developmental, Sociocultural, Semiotic, and Affect Approaches to the Study of Concepts and Conceptual Development. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 187-234). Rotterdam: Sense.
- Gellert, U., Becerra Hernández, R. y Chapman, O. (2013). Research Methods in Mathematics Teacher Education. En K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 327-360). NY: Springer.
- Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Futuro Profesor. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.
- Goffree, F. y Oonk, W. (2001). Digitalizing Real Teaching Practice for Teachers' Education Programmes: The MILE Approach. En F.-L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 111-145). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Huillet, D. (2007). Teachers as Researchers: Putting Mathematics at the Core. En W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik y S. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the IGPME*, Vol. 3, (pp. 73-80). República de Korea: The Korean Society of Educational Studies in Mathematics.
- Kieran, C., Krainer, K. y Shaughnessy, M. J. (2013). Linking Research to Practice: Teachers as Key Stakeholders in Mathematics Education Research. En M.A. Clement (Ken), A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 361-392). NY: Springer Science+Business Media.
- Lin, F.-L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and In-service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 483-513). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- McDonough, A. y Clarke, D. (2003). Describing the Practice of Effective Teachers of Mathematics in the Early Years. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 261-268). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.
- Miao, Z. (2015). *The Effectiveness of Mathematics Teaching. A Cross-National Investigation in Primary Schools in England and China*. Tesis para obtener el grado de Ph. D., Southampton University, Faculty of Social and Human Sciences Southampton Educational School, Southampton.
- Murillo, F. J. (2008). Hacia un Modelo de Eficacia Escolar. Estudio Multinivel sobre los Factores de Eficacia en las Escuelas Españolas. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 6(1), 4-28.
- Oonk, W. (2009). *Theory-Enriched Practical Knowledge*. Tesis de doctorado. Leiden University. Recuperado de <https://openaccess.leidenuniv.nl/handle/1887/13866>.
- Petrou, M. y Goulding, M. (2011). Conceptualizing Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). NY: Springer Science+Business Media B. V.
- Scheerens, J. y Creemers, B. P. M. (1996). School Effectiveness in the Netherlands: The Modest Influence of a Research Programme. *School Effectiveness and School Improvement*, 7(2), 181-195.
- Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner. How Professionals Think in Action*. Avebury: Aldershot Hants.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Tatto, M. (Ed). (2013). *The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Technical Report*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Turner, F. y Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an Organizing Framework. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). NY: Springer Science+Business Media B. V.