CÓMO CONSTRUYEN DEFINICIONES MATEMÁTICAS LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO: UNA APROXIMACIÓN SOCIOCULTURAL

HOW PRE-SERVICE TEACHERS CONSTRUCT MATHEMATICAL DEFINITIONS: A SOCIOCULTURAL APPROACH

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R., Fernández-León, A.
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En este capítulo se presenta un estudio sobre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro de Educación Primaria. Esta investigación parte de la consideración de que los futuros maestros no solo deben aprender conceptos matemáticos, definiciones, teoremas, etc., sino también las prácticas matemáticas a través de las cuales se generan. Por este motivo, abordamos el estudio de la práctica de definir y, en concreto, de cómo futuros maestros construyen definiciones matemáticas. La perspectiva teórica utilizada para llevar a cabo esta investigación es la teoría de la comognición, perspectiva sociocultural propuesta por Sfard (2008) que caracteriza las matemáticas como un discurso con propiedades específicas. Los resultados obtenidos nos han permitido aproximarnos al discurso de los estudiantes para maestro cuando construyen definiciones matemáticas sobre cuerpos geométricos.

Palabras clave: *práctica matemática, definir, teoría de la comognición, estudiantes para maestro.*

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2019). Cómo construyen definiciones matemáticas los estudiantes para maestro: una aproximación sociocultural. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 135-156). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

ABSTRACT

In this chapter, we present a study about the mathematical knowledge of Primary Education pre-service teachers. This research is based on the assumption that pre-service teachers do not only need to learn mathematical concepts, definitions, theorems, etc., but also the mathematical practices that generate them. For this reason, we study the mathematical practice of defining and, in particular, how pre-service teachers construct mathematical definitions. The theoretical perspective we use in this research is the theory of commognition proposed by Sfard (2008), which characterizes the mathematics as a discourse with some specific properties. The results we have obtained have allowed us to approach the discourse of the pre-service teachers when they construct mathematical definitions about solids.

Keywords: *mathematical practice, defining, theory of commognition, pre-service teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemáticas ha preocupado a los investigadores en educación matemática desde hace décadas y ocupa un lugar especialmente relevante en esta disciplina debido a las importantes repercusiones sociales que tiene. Entre los ámbitos de investigación que recoge Llinares (2008), hay uno que aborda lo relativo a «el estudiante para profesor, el profesor y el formador de profesores: Aprendizaje y desarrollo profesional» (p. 11), y que incluye una agenda de investigación «centrada en el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor» (p. 11). Es en esta agenda donde se sitúa este capítulo. Ahora bien, antes de formar a profesores se debe caracterizar qué conocimiento necesitan dichos profesores.

En la caracterización del conocimiento del profesor, los trabajos de Shulman (1986, 1987) han tenido y siguen teniendo una especial importancia. Este autor identifica diferentes dominios de dicho conocimiento y las relaciones entre estos dominios y su aprendizaje o desarrollo. Entre estos dominios, destacamos el conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, o PCK) y el conocimiento de la materia (Content Knowledge/Subject Matter Knowledge, o CK). El PCK va más allá del conocimiento de la materia en sí, ya que es conocimiento de la materia para enseñar e incluye, por ejemplo, las maneras de representar y formular matemáticas para hacerlas comprensibles a otros. Por otra parte, Shulman (1986) indica que el CK debe incluir aspectos como comprender la estructura de la materia, su organización conceptual, cuáles son las ideas importantes y habilidades en esta materia, así como la manera en la que los expertos producen nuevas ideas o descartan otras. Además, como indican Krauss y Blum (2012), este dominio de conocimiento ha sido menos estudiado a nivel internacional en comparación con el otro dominio (PCK). De hecho, el propio Shulman dejó abierto qué nivel de conocimiento de la materia, las matemáticas en nuestro caso, debe poseer un profesor.

La importancia del conocimiento de las matemáticas ha sido resaltada también por otros autores. Así, Thompson, Carlson, y Silverman (2007) señalan que si las estructuras conceptuales del profesor abarcan una red de ideas matemáticas y formas de pensar compatibles, al menos será posible que estas mismas estructuras conceptuales se desarrollen en sus estudiantes. Para estos autores, la comprensión matemática del profesor es una condición necesaria para poder enseñar a sus estudiantes a desarrollar una comprensión matemática de calidad. Por otro lado, la Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) (2001) resaltó que los futuros profesores de matemáticas necesitan desarrollar un profundo conocimiento de las matemáticas que deberán enseñar. En su segunda edición, la CBMS (2012) añadió que los futuros profesores deben además comprender las matemáticas que se enseñan antes y después de las que ellos enseñarán.

En este mismo sentido, Wasserman (2018) introdujo la noción de «conocimiento matemático más amplio del que enseña un profesor» (nonlocal mathematical neighborhood), que incluye ideas matemáticas que están «detrás de», «junto a» o «más allá» del contenido específico que debe enseñar el profesor. Para este autor, este conocimiento es relevante ya que influye en la comprensión de las matemáticas que el profesor enseña, llegando a ser «pedagógicamente potente» a la hora de influir en la práctica instruccional. Además, el profesor debe conocer los procesos de construcción de conocimiento matemático (prácticas matemáticas) y que estos forman parte de su conocimiento en todos los niveles, aunque no necesariamente con el mismo alcance.

En general, el aprendizaje de las mencionadas prácticas matemáticas es un problema básico de la educación matemática que algunos autores consideran debe ser tenido en cuenta en los programas de formación (Sánchez y García, 2008). En cuanto a la práctica de definir, Freudenthal (1973) considera que construir una definición es tan relevante en matemáticas como construir una demostración para un teorema, y Mariotti y Fischbein (1997) afirman que aprender a definir es clave en educación matemática.

Numerosas investigaciones han mostrado la complejidad que presenta para estudiantes de diferentes niveles educativos entender qué es una definición matemática y cómo se construye. Entre otras, mencionamos los trabajos de Vinner (1991), que diferencia entre la imagen y la definición de un concepto, resalta el papel de las definiciones en la resolución de tareas y estudia cómo se construyen dichas definiciones; de Borasi (1991), que gira en torno a los requisitos mayoritariamente aceptados de una definición matemática; y de Zaslavsky y Shir (2005), que también aportan información acerca de las características (imperativas, opcionales) de las definiciones, y hacen un estudio de los principales roles que les son atribuidos. Otras investigaciones han estudiado el papel de las definiciones y el proceso de definir en relación con la prueba matemática. En particular, Ouvrier-Buffet (2006) considera los procesos de definir vinculados a la formación de conceptos matemáticos y modela los procesos de construcción de definiciones de los estudiantes. Esta autora señala que durante un proceso de investigación científica hay una progresión desde cero-definiciones (zero-definitions) a las definiciones generadas en una prueba (proof-generated definitions). Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) proponen una secuencia didáctica para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes universitarios de los procesos de definir y demostrar. Dicha secuencia didáctica cuenta con dos sesiones cuyo objetivo es que los estudiantes aprendan a definir y manipular definiciones. Para ello, se les pidió, entre otros, que construyeran definiciones de varios conceptos, que dieran ejemplos de ellos y que «definieran un objeto a partir de su construcción guiada» (Alvarado Monroy y González Astudillo, p. 534).

Por otro lado, nos gustaría señalar que en este capítulo asumimos que las matemáticas son una actividad humana (Freudenthal, 1973) y por tanto falible y sujeta a revisión (Lakatos, 1976). Esta consideración de las matemáticas como una actividad humana ha llevado a algunos autores a estudiar el conocimiento matemático desde perspectivas socioculturales (Cooper, 2014; Sfard, 2008).

En las últimas décadas, se ha producido un auge de los investigadores que han asumido en sus estudios estas perspectivas socioculturales (por ejemplo, Lave y Wenger, 1991; Lerman, 2001). Con estas perspectivas, el aprendizaje y cualquier actividad cognitiva dejan de explicarse como procesos puramente biológicos para pasar a verse como procesos sociales. Por ejemplo, Rasmunssen, Zandieh, King, y Teppo (2005) estudian el pensamiento matemático avanzado adoptando un enfoque que considera la progresión en el pensamiento como formas de participar en prácticas matemáticas. Su visión del aprendizaje es esencialmente sociocultural, ya que consideran el aprendizaje como actos de participación en las diferentes prácticas matemáticas dentro de comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991).

Uno de los marcos teóricos socioculturales existentes es la teoría de la comognición de Sfard (2008), que considera las matemáticas como un tipo de discurso. Este marco ha sido el foco de diferentes volúmenes especiales de revistas de prestigio y ha sido usado en investigaciones con estudiantes desde niveles básicos (Sfard, 2007) hasta universidad (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014; Nardi, Ryve, Stadler y Viirman, 2014; Sánchez y García, 2014; Tabach y Nachlieli, 2015). Presmeg (2016), en su revisión de diferentes investigaciones en un número especial sobre perspectivas comunicacionales sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, considera que la propuesta de Sfard (2008) proporciona una lente teórica útil en diferentes contextos (situaciones con diferentes contenidos, diferentes sujetos, diferentes niveles educativos).

En este capítulo nos centramos en el conocimiento de las matemáticas de estudiantes para maestro de Educación Primaria, abordándolo desde la perspectiva sociocultural de la teoría de la comognición. Específicamente, continuamos la investigación comenzada en González-Regaña, Martín-Molina, Fernández-León, Toscano-Barragán y Gavilán-Izquierdo (2018) sobre la práctica matemática de definir, entendida dicha práctica como un proceso en el que se construyen definiciones matemáticas.

MARCO TEÓRICO

En este estudio, consideramos que definir es un proceso que comienza con la descripción de un objeto, sigue con la formulación de definiciones preliminares y termina con su definición formal, elegida entre varias construidas (Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2018). Dado que estamos de acuerdo con Rasmussen et al. (2005) en que las prácticas matemáticas son prácticas sociales o culturales, para estudiar la práctica de definir entre estudiantes para maestro, hemos decidido adoptar una perspectiva sociocultural. Dicha perspectiva es la teoría de la comognición propuesta por Sfard (2007, 2008), que considera las matemáticas un tipo especial de discurso, y estudia su caracterización y aprendizaje. Esta teoría debe su nombre original a la consideración conjunta de los términos «communication» y «cognition», que se fusionan creando el término «commognition». Para Sfard (2008), los discursos son vistos como formas de comunicación, diferenciadas por sus objetos, los tipos de mediadores visuales utilizados, y las reglas/normas que siguen los participantes. Como en nuestra investigación estamos interesados en el conocimiento matemático de los estudiantes, analizamos su discurso utilizando esta perspectiva sociocultural. Describimos a continuación las principales características de la teoría de la comognición sobre las que nos apoyamos.

Sfard (2008) considera que existen cuatro propiedades o elementos de un discurso que lo caracterizan particularmente como «matemático». Estos elementos son el uso de palabras, los mediadores visuales, las narrativas y las rutinas. Por un lado, el uso de palabras hace referencia tanto a palabras propias del vocabulario matemático, como por ejemplo «rectángulo», como a palabras del lenguaje cotidiano que se usan con un significado matemático, como por ejemplo «tumbado» (en el sentido de prisma «oblicuo»). Los mediadores visuales son los objetos visibles que se utilizan como parte de la comunicación, como por ejemplo los diagramas, gráficos, figuras o símbolos. Las narrativas son cualquier conjunto de expresiones habladas o escritas que describen objetos y procesos, así como relaciones entre estos. Las narrativas están sujetas a consenso, modificación o rechazo a tenor de las reglas o normas que tenga definida la comunidad. Aquellas narrativas aceptadas por la comunidad se llaman narrativas asumidas. Ejemplos de estas son las definiciones, las pruebas o los teoremas. Por último, las rutinas son patrones de comportamiento usados con regularidad y de una forma diferenciada por los participantes del discurso. Concretamente, son regularidades que se observan, por ejemplo, en la manera de realizar cálculos, de definir objetos o de justificar afirmaciones. En particular, cuando a los estudiantes se les pide definir un sólido geométrico, que den exclusivamente un listado de propiedades del mismo.

La teoría de la comognición (Sfard, 2008) considera que la comunicación humana es una actividad regulada por reglas y distingue dos tipos de reglas que gobiernan los discursos, las reglas a nivel objeto y las reglas a nivel meta (meta-reglas). Las reglas a nivel objeto son narrativas que informan sobre el comportamiento regular de los objetos del discurso (por ejemplo, «la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados») y las meta-reglas son patrones de comportamiento que se observan en la actividad de los participantes del discurso cuando estos tratan de producir, corroborar o justificar narrativas a nivel objeto (por ejemplo, la forma de demostrar la proposición «la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados»). Así, las rutinas pueden verse como conjuntos de meta-reglas que describen acciones que se repiten en el discurso.

En nuestra investigación, analizamos el discurso de los estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando construyen definiciones de cuerpos geométricos. En particular, aquí presentamos el estudio relativo al uso de palabras y narrativas. Como mencionaba Sfard (2008), el uso de palabras es una característica discursiva de suma importancia porque es la que nos informa sobre lo que el usuario puede decir sobre (y por tanto ver en) el mundo. Por otro lado, también es fundamental analizar en profundidad las narrativas que producen los estudiantes para así ver qué discurso matemático usan y entender cómo desarrollan las prácticas matemáticas propias de esta disciplina.

En resumen, este trabajo utiliza la teoría de la comognición, y en concreto los constructos uso de palabras y narrativas, para estudiar y explicar cómo los estudiantes para maestro desarrollan la práctica matemática de definir.

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

El estudio presentado en este capítulo es parte de otro más amplio que trata de caracterizar el discurso de estudiantes universitarios del Grado en Educación Primaria y del Máster en Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES) cuando construyen y seleccionan definiciones matemáticas.

Los participantes de la parte del estudio presentada en este capítulo fueron estudiantes (en su mayoría de 18-19 años) matriculados en una asignatura del 1º curso del Grado en Educación Primaria. Estos estudiantes trabajaban durante una hora a la semana en grupos de tres a cinco estudiantes para resolver diversas tareas o problemas matemáticos. Concretamente, en este estudio participaron voluntariamente 45 estudiantes distribuidos en 12 de estos grupos (que llamaremos G1, …, G12).

Instrumento de investigación

Para caracterizar el proceso de definir de los estudiantes, elegimos estudiar la construcción de definiciones de conceptos geométricos. Esta elección estuvo motivada por el hecho de que la geometría es un campo matemático en el que las definiciones juegan un papel muy importante. Nosotros escogimos la geometría espacial como contexto de nuestra investigación porque nuestra experiencia como docentes nos indica que los estudiantes no están tan familiarizados con ella como lo están con la geometría plana. Esto puede favorecer que surja un discurso sobre cómo construir definiciones matemáticas, en lugar de un mero recitado memorístico. Además, esperábamos que esto produjese un discurso matemático, que caracterizaríamos mediante las herramientas del marco comognitivo (Sfard, 2008).

Teniendo en cuenta todos estos aspectos, diseñamos un instrumento en el que incluimos preguntas abiertas que promovieran la aparición de las mencionadas herramientas (Martín-Molina, González-Regaña, Toscano y Gavilán-Izquierdo, 2018). Este instrumento fue una adaptación de trabajos anteriores en geometría plana (Gavilán-Izquierdo, Sánchez-Matamoros y Escudero, 2014; Sánchez y García, 2014), que a su vez estaban basados en Gavilán, Ariza, Barroso y Sánchez (2002). Dicho instrumento tiene dos partes, la primera que tiene como objetivo estudiar cómo los estudiantes universitarios construyen definiciones de cuerpos geométricos y la segunda que tiene como objetivo indagar cómo los estudiantes seleccionan una definición matemática entre varias disponibles.

En este capítulo nos centramos en la primera parte del instrumento. Teniendo en cuenta cómo hemos considerado el proceso de definir, esta primera parte incluye algunas preguntas relacionadas con la identificación y descripción de las propiedades de cuerpos geométricos y otras relacionadas con la propia definición. En el instrumento aparecen imágenes de tres poliedros diseñadas con el software dinámico GeoGebra: un cubo; un prisma cuadrangular, oblicuo y convexo; y un prisma cuadrangular, oblicuo y cóncavo (ver Figura 1). Elegimos estos tres cuerpos geométricos porque los tres tienen algunas propiedades en común (son prismas cuadrangulares) y otras que los diferencian (el primero es el único poliedro regular y también es el único poliedro recto; el segundo es el único poliedro convexo y oblicuo a la vez; y el tercero es el único cóncavo).

A continuación de las imágenes, aparecen en el instrumento nueve preguntas relacionadas con la práctica de definir cuerpos geométricos. En ellas, usamos los términos «propiedades» y «características» como sinónimos, debido a que no sabemos con cuál de ellos los estudiantes están familiarizados. Algunas de esas preguntas son:

- Pregunta 1. En los 3 cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- Pregunta 2. De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Pregunta 5. Definid cada uno de los cuerpos.
- Pregunta 8. ¿Podríais dar una definición que sirva para dos de los cuerpos dados? ¿Y para 3?

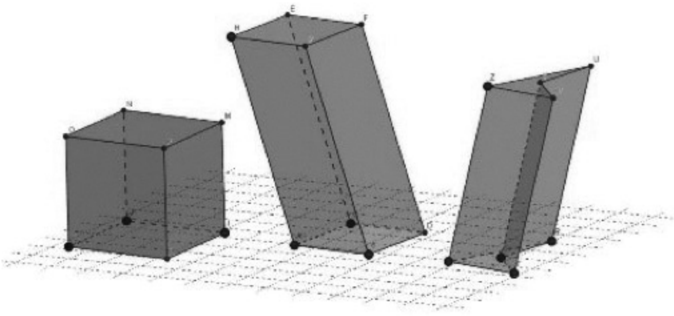


Figura 1. Representación de los cuerpos geométricos que aparecían en el instrumento

Recogida de datos

A cada uno de los 12 grupos de estudiantes se les dio una copia en papel del instrumento de investigación y se les pidió que verbalizasen sus respuestas lo máximo posible. Cuando se produjo la recogida de datos, los estudiantes ya habían recibido instrucción sobre geometría plana pero no sobre geometría espacial.

Los datos de este estudio son: las grabaciones en audio de los 12 grupos mientras responden a las preguntas planteadas en el instrumento; las transcripciones de dichas grabaciones, las cuales nos permiten acceder a la discusión y negociación entre los estudiantes; y las respuestas escritas, que son importantes porque recogen el consenso del grupo.

Análisis

Una vez transcritas las grabaciones en audio de los doce grupos, realizamos el análisis en dos fases. En la primera fase identificamos el uso de palabras y las narrativas que aparecían en las transcripciones y en las respuestas escritas de los estudiantes, que nos aportaron información sobre el proceso de definir. Para ello, cada investigador realizó individualmente dicha identificación, que posteriormente se contrastó con un segundo investigador y finalmente fue validada por el equipo investigador al completo. Las propiedades del discurso (uso de palabras y narrativas) identificadas por todos fueron aceptadas, y aquellas en las que inicialmente había desacuerdo fueron discutidas por el grupo de investigadores con el fin de ser aceptadas o rechazadas.

En la segunda fase del análisis, siguiendo un método inductivo, clasificamos todas las narrativas y las palabras matemáticas identificadas y aceptadas por el grupo. Esto se hizo con el objetivo de caracterizar el proceso de definir.

A continuación, mostramos cómo llevamos a cabo el proceso de análisis. Para ello presentamos un extracto de las respuestas de la pregunta 5 del grupo G7 (de estudiantes A1, A2, A3, A4). En la primera fase del análisis, se señaló el uso de palabras en negrita y las narrativas en cursiva:

207. A2: si hablamos de **prismas**, *es un **prisma hexagonal***, pero...
208. A4: ya la hemos definido antes, en… [en referencia a la pregunta 1].
209. A3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.
210. A4: Eah, las características. Claro, que *es un **cubo** con estas características…*
211. A1: Profesora, ¿en el 5 qué hay que poner? [en referencia a la pregunta 5]
212. Profesora (P): mi pregunta a vosotros es: ¿qué consideráis que es una definición? ¿Decir cuáles son las características? ¿Decir el nombre? ¿Qué?
213. A1: *el nombre y… las características… es la definición*.
214. P: eso es lo que yo os pregunto a vosotros.
215. A2: yo creo que sí…
216. P: Entonces, habladlo entre vosotros y, lo que decidáis, es lo que debéis escribir.
217. A3: *tiene que ser una definición que sea solamente para ese*.
218. A1: primero, vamos a ver: *es un **cuerpo geométrico***. […]
219. A4: *primero el nombre*.
220. A3: *un **cubo***, ¿no?
221. A1: sí.

222. A3: *un **cubo** es… un **cuerpo geométrico**…*
223. A2: que *son todos **prismas**, porque están formados de varios **polígonos**.*
224. A4: ***polígonos** de 6 **caras**.*
225. A3: *de 6 **caras**… **iguales**.*
226. A2: *de **base cuadrangular**.*

En la segunda fase, se clasificaron las palabras (señaladas en negrita) encontradas en el extracto anterior según para qué fuesen usadas: para etiquetar (prisma, prisma hexagonal, cubo, cuerpo geométrico), o para describir cuerpos geométricos o sus elementos (formados de varios polígonos, de 6 caras, caras iguales, base cuadrangular). También se distinguió cómo los estudiantes usaron las palabras en su discurso matemático: de forma correcta (todas las palabras señaladas en negrita excepto prisma hexagonal), y de forma incorrecta (prisma hexagonal).

Asimismo, las narrativas fueron clasificadas en categorías según las similitudes y diferencias que presentaban. En la sección de resultados presentamos todas las categorías que han emergido (Tabla 1). En el extracto anterior aparecen las categorías N2 (líneas 207, 210, 218, 220, 222, 223), N3 (líneas 223-226), N4a (líneas 213, 219), N4c (línea 217) y N5a (líneas 222-226).

RESULTADOS

Mostramos a continuación los resultados del análisis del uso de palabras y las narrativas identificadas en el discurso matemático de los estudiantes de los doce grupos considerados.

Uso de palabras

Identificamos primero qué palabras aparecían y después las clasificamos según su uso. Concretamente, hacemos referencia a «para qué» se usan y «cómo» se usan.

Con respecto a «para qué» se usan, hemos identificado dos usos diferentes: para etiquetar un cuerpo o sus elementos, y para describir un cuerpo o sus elementos. En el primer caso, algunos ejemplos de etiquetas encontradas en el discurso de los estudiantes son: cubo, prisma, cuadrilátero, lados, diagonales, vértices, ángulos, caras, bases, convexo, cóncavo. En el segundo caso, hemos encontrado, entre otras, las siguientes palabras para describir un cuerpo o sus elementos: no consecutivos (referida a vértices); recto, poliédrico, agudo, obtuso, diedros (referidas a ángulos); iguales, simétricas o semejantes (referidas a caras); cuadrangulares (referida a bases); regular o irregular, oblicuo, tumbado, ladeado, recto, rectangular, cuadrado, cóncavo y convexo, planos, tridimensionales (referidas a cuerpos).

Con respecto a «cómo» los estudiantes usan palabras en su discurso matemático, hemos distinguido tres categorías diferentes: los estudiantes usan palabras matemáticas de forma correcta, los estudiantes usan palabras matemáticas de forma errónea y, por último, usan palabras coloquiales con significado matemático. A continuación, mostramos un ejemplo representativo de cada una de ellas:

- Usan palabras matemáticas de forma correcta. Un ejemplo de esta categoría son las palabras cubo y prisma encontradas en el discurso del grupo G8:

  2. A1: el primero es un cubo ¿no?, y el otro ¿cómo se llamaba? Prisma, ¿cómo se llamaba?
  3. A3: prismas, son todos prismas.

- Usan palabras matemáticas de forma errónea. Un ejemplo de esta categoría son las palabras cóncavo y convexo identificadas en el discurso del grupo G7:

  138. A1: […] cóncavo era cuando tienen todos los lados y los ángulos iguales, convexos cuando no son iguales.

- Usan palabras coloquiales con significado matemático. Como ejemplo mostramos una narrativa encontrada en el discurso del grupo G2 en la que aparece la palabra «daleado» (vulgarismo andaluz para ladeado):

  71. A3: Yo creo que el cuerpo 2 es un prisma que tiene su base cuadrada, aunque esté así un poquillo daleado sigue siendo un prisma […].

En relación con el uso de palabras matemáticas, consideramos que los estudiantes las usan con dos objetivos diferentes (para etiquetar y describir) y que las usan de tres formas distintas (de forma correcta, errónea y coloquial). Las categorías de esta clasificación no son excluyentes, es decir, puede haber palabras que en ocasiones se usen de forma correcta y en otras de forma errónea. Asimismo, una palabra que se haya usado para etiquetar puede ser correcta, errónea o ser una palabra coloquial usada con significado matemático.

Además, hemos identificado diferencias en cómo los estudiantes etiquetan o describen cuerpos dependiendo del grado de familiaridad que tengan con ellos (habitualmente los estudiantes están más familiarizados con los prototípicos). Por un lado, los estudiantes presentan un vocabulario más amplio, que usan de forma correcta, cuando están familiarizados con los cuerpos. Por otro lado, los estudiantes presentan deficiencias en su conocimiento de palabras matemáticas asociadas a los cuerpos que les son menos familiares, como se manifiesta con el uso erróneo de palabras (confundir cóncavo con regular) y en el recurrir a palabras coloquiales (tumbado o daleado con el significado matemático de oblicuo).

Narrativas

Una vez identificadas todas las narrativas del discurso matemático de los estudiantes, fueron clasificadas en seis categorías (N1, N2, N3, N4, N5 y N6), con la cuarta y la quinta divididas en tres subcategorías cada una (N4a, N4b y N4c; N5a, N5b y N5c). Presentamos a continuación cada una de ellas, junto con ejemplos representativos.

N1. Narrativas que recogen una definición de un elemento del cuerpo geométrico. En este tipo de narrativas, los estudiantes definen explícitamente un elemento o propiedad matemáticos. Por ejemplo, en el grupo G12 se definen aristas:

66. A1: ¿Aristas?… ¿Qué es?
67. A4: Aristas son lo que unen un vértice, las líneas…1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

N2. Narrativas en las que se etiquetan cuerpos geométricos o sus elementos. Se usan para asignarle un nombre a un cuerpo geométrico o un elemento del mismo. Por ejemplo, en el grupo G5 los estudiantes etiquetan los cuerpos geométricos:

167. A2: un prisma rectangular.

167. A4: y el otro es un cuerpo irregular.

N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos. Estas propiedades pueden ser *numéricas* (los estudiantes cuantifican el número de caras, vértices, etc.) o *cualitativas* (el ángulo es recto, las caras son iguales dos a dos, las caras son simétricas, etc.). Mostramos a continuación un ejemplo representativo del G1 en el que aparecen propiedades de los dos tipos:

9. A1: Que tiene 6 caras…
10. A2: Sí.
11. A1: Son iguales…
12. A4: La forma de sus caras son cuadriláteros regulares, cuadrados. Sus vértices son todos iguales, sus lados y sus ángulos también son todos iguales.
13. A1: Tiene 8 vértices…

N4. Narrativas sobre qué significa definir. En esta categoría se recogen aquellas narrativas en las que aparece explícitamente qué entienden los estudiantes por definir. Distinguimos tres subcategorías dependiendo de qué estructura pensaban que debía tener la definición.

N4a. Definir es decir el nombre y las características. Un protocolo representativo de esta subcategoría podemos encontrarlo en el extracto incluido en la subsección de análisis. En particular, en la línea 213, cuando el grupo G7 responde a la pregunta «Definid cada uno de los cuerpos».

N4b. Definir es explicitar solo las características. A diferencia de la subcategoría anterior, en esta los estudiantes no consideran necesario incluir un nombre cuando definen un cuerpo. A continuación, mostramos un ejemplo representativo identificado en el grupo G2:

98. A2: Pues yo lo definiría con las características que tenía en la primera pregunta. La primera pregunta te pide las características de eso, eah, pues las mismas características es lo que define la figura […].

N4c. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden dar lugar a clasificaciones inclusivas o exclusivas. Este tipo de narrativas surge principalmente en dos momentos: cuando los estudiantes cuestionan el alcance de las definiciones que han construido para los otros cuerpos o cuando se les pide que construyan definiciones válidas para más de un cuerpo. A continuación, se muestra un ejemplo representativo del grupo G2 donde se pueden apreciar este tipo de narrativas:

134. A3: Es que lo que pasa es como con los triángulos y los rombos y todo eso, que dentro del rombo están también los cuadrados. Pues a lo mejor dentro de la definición de este cabe este, pero no tiene por qué.

N5. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico. En esta categoría se recogen aquellas narrativas en las que los estudiantes definen un cuerpo geométrico. Distinguimos tres subcategorías dependiendo de qué estructura presenta dicha definición.

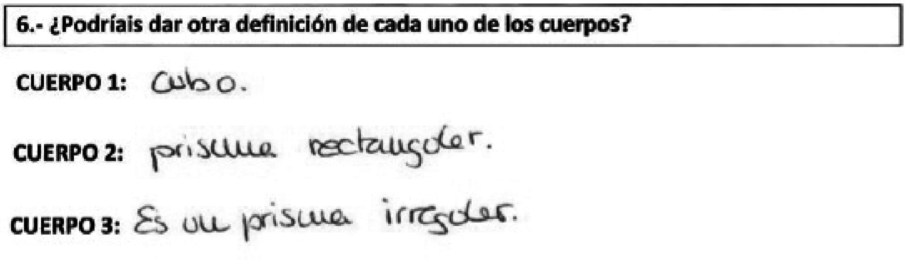
N5a. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante una etiqueta y características. En estas narrativas, los estudiantes construyen definiciones mediante el uso de etiquetas (cubo, prisma, etc.) y características (tiene 6 caras, es recto, está tumbado, etc.). Incluimos a continuación un protocolo representativo del grupo G1:

156. A3: Bueno es un prisma irregular cuyas dos bases son figuras irregulares.
157. A1: Claro, y las caras laterales son también rectángulos.

N5b. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo una etiqueta. En estas narrativas las definiciones de los cuerpos geométricos están formadas por una etiqueta, sin una descripción de las características del cuerpo, como se puede ver en el siguiente protocolo del grupo G4:

44. A4: […] En la pregunta 6, al cuerpo 1 le podríamos dar la definición de cubo, el cuerpo 2 prisma rectangular y el cuerpo 3 es un prisma irregular.

Esta categoría de narrativas se vuelve a identificar en la respuesta escrita del grupo G4 a la pregunta 6:


6.- ¿Podríais dar otra definición de cada uno de los cuerpos?

CUERPO 1: Cubo.

CUERPO 2: prisma rectangular.

CUERPO 3: Es un prisma irregular.

Figura 2. Respuesta escrita a la pregunta 6 del grupo G4

N5c. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo características. En estas narrativas, las definiciones están formadas, en contraposición con las anteriores, solo por una descripción de las características del cuerpo. Presentamos a continuación dos protocolos representativos, el primero del grupo G4:

44. A4: la definición para el cuerpo 1 es que todas las caras son iguales, cuadrados, el cuerpo 2 tiene 4 caras rectangulares y las dos bases son rectángulos y el cuerpo 3 tiene cuatro caras rectangulares y dos bases que son polígonos irregulares. Todos los cuerpos tienen 6 caras, 12 aristas y 8 vértices. […]

Y el segundo protocolo correspondiente al grupo G5:

415. A1: ¿cuál es la segunda definición?

416. A4: la de las aristas, los vértices, las caras…el cuerpo 1 tiene hemos dicho 8 vértices, 12 aristas.

417. A1: por 6 caras iguales.

N6. Narrativas en las que se describen relaciones entre propiedades. En algunas ocasiones los estudiantes enuncian sencillas proposiciones en las que unas propiedades de los cuerpos se deducen de otras. Un ejemplo representativo lo encontramos en la línea 107 del grupo G9:

107. A4: Si tiene 6 lados, tiene 12 aristas.

A continuación, resumimos en una tabla las categorías de narrativas identificadas y los grupos en las que aparecen:

Tabla 1. Categorías de narrativas identificadas en el discurso de los grupos de estudiantes

NARRATIVAS		**GRUPOS**
N1. Narrativas que recogen una definición de un elemento del cuerpo geométrico		G1, G6, G7, G9, G11, G12
N2. Narrativas en las que se etiquetan cuerpos geométricos o sus elementos		G1-G12 (todos)
N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos		G1-G12 (todos)
N4. Narrativas sobre qué significa definir	N4a. Definir es decir el nombre y las características	G7
	N4b. Definir es explicitar solo las características	G2, G3, G5, G6, G11
	N4c. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden dar lugar a clasificaciones inclusivas o exclusivas	G2, G5, G7

NARRATIVAS		GRUPOS
N5. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico	N5a. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante una etiqueta y características	G1, G2, G3, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12
	N5b. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo una etiqueta	G3, G4, G5, G8, G9, G12
	N5c. Narrativas en las que se define un cuerpo geométrico mediante solo características	G2, G4, G5, G6, G8, G9, G10
N6. Narrativas en las que se describen relaciones entre propiedades		G8, G9

En base a estos primeros resultados, hemos identificado la existencia de seis categorías de narrativas, cinco a nivel objeto (que informan sobre el comportamiento regular de los objetos) y una a nivel meta (que informa sobre cómo producir las narrativas de nivel objeto). Concretamente, las tres primeras categorías de narrativas (N1, N2 y N3) son de nivel objeto porque recogen la definición de un elemento de los cuerpos, etiquetan cuerpos o sus elementos y describen las propiedades o características de los cuerpos. La cuarta categoría de narrativas (N4) es de nivel meta porque incluye las narrativas en las que los estudiantes dialogan sobre qué significa definir en matemáticas. La categoría de narrativas N5 también es de nivel objeto porque recoge las narrativas en las que se define un cuerpo geométrico. Finalmente, la categoría de narrativas N6, que incluye narrativas en las que se relacionan unas propiedades de los cuerpos con otras, se considera de nivel objeto (aunque sea ligeramente distinta de las tres primeras) porque recoge información sobre los objetos en sí, no sobre cómo los estudiantes producen y justifican dicha producción de narrativas.

Estas seis categorías de narrativas no están presentes de igual forma en los doce grupos analizados. Las tres primeras categorías de narrativas, que están relacionadas entre sí, surgen por las primeras preguntas del instrumento de investigación, en las que se pide a los estudiantes que describan los cuerpos. En particular, las categorías de narrativas N2 y N3, en las que los estudiantes etiquetan o describen los cuerpos geométricos o sus elementos, están presentes en todos los grupos. Este resultado era esperado porque, como ya hemos mencionado, el instrumento de investigación recogía varias preguntas sobre la descripción de los cuerpos y sus elementos. Lo inesperado fue que muchos estudiantes decidieron etiquetar los cuerpos geométricos o sus elementos (categoría de narrativas N2) en preguntas relativas a la descripción de los elementos de los cuerpos geométricos. La categoría de narrativas N1 aparece en menos de la mitad de los grupos y su aparición está motivada por la necesidad de los estudiantes de definir algún elemento (como arista o vértice) antes de describir sus propiedades.

La única de las seis categorías con narrativas a nivel meta (N4) está presente en el discurso de menos de la mitad de los grupos de estudiantes, a pesar de que había en el instrumento varias preguntas en las que los estudiantes tenían que construir una definición de un cuerpo geométrico. Como esperábamos por el diseño del instrumento, la categoría de narrativas N5 aparece en todos los grupos. Lo que resulta relevante aquí es qué subcategorías aparecen (N5a, N5b o N5c) en el discurso de cada grupo y el contraste con las subcategorías de narrativas N4 (N4a, N4b, N4c). Por ejemplo, es llamativo que solo un grupo (G7) usó narrativas explícitas en las que se recogía que una definición debe incluir un nombre y unas características, pero esta fue la estructura de la definición más utilizada por todos los grupos (todos menos G4 construyeron sus definiciones de esta forma). También es de destacar que solo tres de los grupos (G1, G7 y G11) usaron siempre narrativas de la subcategoría N5a (y no de N5b, o N5c), en las que una definición incluye nombre y características. Los otros nueve grupos usaron más de una estructura diferente en sus definiciones. De hecho, tres de esos nueve grupos (G5, G8 y G9) enunciaron definiciones de los cuerpos geométricos de las tres maneras distintas identificadas, es decir, usando narrativas del tipo N5a, N5b y N5c.

Los resultados obtenidos nos permiten señalar una falta de homogeneidad en la forma en la que definen los distintos grupos de estudiantes. Igualmente se puede observar que todos los grupos, en algún momento, dan una definición en la que aparece una etiqueta del cuerpo a definir.

La categoría de narrativas N6 únicamente ha sido identificada en dos grupos (G8 y G9), que la usaron para deducir unas propiedades de otras (por ejemplo, que «caras iguales implica que las aristas son iguales»). Es interesante el hecho de que estos dos grupos en ningún momento discutieron sobre qué significa definir.

CONCLUSIONES

En este capítulo hemos presentado los resultados de nuestro análisis del discurso de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando construyen definiciones matemáticas de cuerpos geométricos. Hemos utilizado la teoría de la comognición de Sfard (2008) para caracterizar dicho discurso mediante la identificación del uso que hacen los estudiantes de las palabras (tanto matemáticas como coloquiales con significado matemático) y de qué tipos de narrativas utilizan.

Los resultados encontrados nos proporcionan indicadores sobre el discurso matemático de los estudiantes del grupo y las dificultades que tienen. Por una parte, el uso de palabras erróneas o de palabras coloquiales usadas con significado matemático nos indica carencias en el vocabulario matemático de todos los grupos. Por otra parte, la identificación de categorías de narrativas a nivel objeto y a nivel meta nos ha ayudado a caracterizar cómo definen los estudiantes. Por ejemplo, los estudiantes de algunos grupos manifiestan la necesidad de definir los elementos de los cuerpos antes de usarlos para describir los cuerpos, lo que deducimos de la presencia de la categoría de narrativas N1. Otros grupos parecían no tener claro qué significaba definir, lo que se pone de manifiesto en la aparición de la categoría de narrativas N4. Estas narrativas también muestran que los estudiantes no conocen algunos de los requisitos mayoritariamente aceptados de una definición, que según Borasi (1991) son «precisión en terminología», «aislamiento del concepto», «esencialidad», «no contradicción» y «no circularidad» y según Zaslavsky y Shir (2005) son «jerarquía», «no ambigüedad», «no contradicción», «no circularidad», «invariancia» y «minimalidad».

También se puede apreciar una falta de homogeneidad en la manera de definir de los distintos grupos (existencia de diferentes subcategorías de N5). Asimismo, los resultados ponen de manifiesto que todos los grupos de estudiantes formulan una definición en la que aparece una etiqueta del cuerpo a la hora de definirlo. Estos indicadores nos llevan a concluir que no parece que los grupos de estudiantes compartan un patrón claro a la hora de definir, lo que puede estar causado por una falta de formación en esta práctica matemática. De hecho, Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) achacan a la falta de una formación adecuada el hecho de que los estudiantes manejen «conceptos de manera elemental» (p. 539) y manipulen «definiciones formales aun cuando no han desarrollado la habilidad para construirlas» (p. 539). Estos autores pudieron comprobar que, como consecuencia, los estudiantes solo construyeron unas pocas definiciones que eran formalmente correctas.

Los resultados de este capítulo también muestran que algunos grupos parecen confundir la descripción de un cuerpo con su definición matemática, lo que puede mostrar la falta de un discurso adecuado. Este hecho se relaciona directamente con el requisito de esencialidad de una definición, que según Borasi (1991) implica que las definiciones deben incluir solo los términos o propiedades que son estrictamente necesarios para distinguir el concepto en cuestión de otros. Sería interesante profundizar en si esta confusión entre describir y definir puede ser una manifestación de la existencia de dos discursos diferenciados dentro del discurso matemático. La adopción por parte de los estudiantes de un discurso adecuado es algo muy importante porque, desde nuestra perspectiva sociocultural, su aprendizaje es un cambio hacia el discurso matemático propio de la comunidad de matemáticos. Una posible manera de ayudar a los estudiantes a transitar desde el discurso de describir al de definir podría ser gracias a la interacción producida durante el trabajo en grupo, que Alvarado Monroy y González Astudillo (2016) afirman tiene varias fortalezas.

Por otra parte, como se pone de relieve en el trabajo de Ouvrier-Buffet (2006), las «proof-generated definitions» se originan mediante el proceso de prueba a partir del potencial de desarrollo de las «zero-definitions». En este sentido, durante el desarrollo de la prueba, las «zero-definitions» podrían evolucionar o no hasta convertirse en «proof-generated definitions». En nuestro estudio, tratamos de ampliar esta visión y aportar otras perspectivas al proceso de evolución de las «zero-definitions». Para nosotros, el proceso de descripción de los cuerpos (con el que da inicio el instrumento) es el que hará que emerjan ciertas «zero-definitions», que luego deberán ser sometidas a un proceso de refinamiento a través de la comparación y la selección. De este modo, la evolución de una definición en principio más primitiva («zero-definition») podría desarrollarse a partir no solo de un proceso de prueba, sino también de otros relacionados con la descripción de los cuerpos geométricos o la comparación y selección de definiciones.

Nuestros resultados muestran algunas diferencias con respecto a los obtenidos en geometría 2D por Gavilán-Izquierdo et al. (2014). En particular, en el discurso de los estudiantes sobre los cuerpos geométricos, han aparecido narrativas en las cuales se recogen propiedades cuantitativas y otras en las que se definen los elementos de dichos cuerpos. Ambos tipos de narrativas estaban ausentes del discurso de los estudiantes cuando definían cuadriláteros, quizás porque los estudiantes están más familiarizados con la geometría 2D y, por tanto, no parecen sentir la necesidad de explicitar el número de lados, vértices y otros elementos que componen cada figura, o de definir dichos elementos.

Una posible línea futura de trabajo sería considerar el papel de los mediadores visuales (Sfard, 2008) en la construcción de las definiciones por parte de los estudiantes. Para ello sería conveniente tener en cuenta los trabajos de Vinner (1991) sobre la imagen y definición de un concepto, así como las relaciones que se establecen entre ellas.

Finalmente, nos gustaría señalar que la investigación presentada en este capítulo se complementa con el estudio de las rutinas que describen el patrón de comportamiento de los estudiantes cuando construyen definiciones (Martín-Molina, Toscano et al., 2018). De hecho, los resultados de este capítulo fueron fundamentales para la identificación de rutinas porque las narrativas permiten inferir rutinas. La integración de ambos trabajos da una visión global del discurso de los estudiantes cuando construyen definiciones matemáticas y podría ayudarnos a identificar y caracterizar las distintas etapas del proceso de definir desarrollado por estudiantes universitarios.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con la Ayuda IV.4 del VI Plan Propio de Investigación y Transferencia de la Universidad de Sevilla.

REFERENCIAS

Alvarado Monroy, A. y González Astudillo, M. T. (2016). Construcción social de los procesos de definir y demostrar. *Educaçao matemática pesquisa, 18*(2), 527-549.

Borasi, R. (1991). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books, Ins.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2012). *The mathematical education of teachers II*. Providence, RI & Washington, DC: American Mathematical Society & Mathematical Association of America.

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 337-344). Vancouver: PME.

Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 7-32.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Gavilán, J. M., Ariza, A., Barroso, R. y Sánchez, A. (2002). Laboratorio virtual de matemáticas II. En J. M. Mesa, R. J. Castañeda y L. M. Villar (Eds.), *La Universidad de Sevilla y la innovación docente, curso 2001-2002* (Vol. 1, pp. 77-85). Sevilla: Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla.

Gavilán-Izquierdo, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Escudero, I. (2014). Aprender a definir en matemáticas: Estudio desde una perspectiva sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 32*(3), 529-550.

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Fernández-León, A., Toscano-Barragán, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Aspectos del discurso de estudiantes universitarios cuando construyen definiciones matemáticas. En *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)* (Vol. 8, pp. 77-85). Jaén: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Krauss, S. y Blum, W. (2012). The conceptualisation and measurement of pedagogical content knowledge and content knowledge in the COACTIV study and their impact on student learning. *Journal of Education*, *56*, 45-66.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 87-113.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: Una aproximación desde «ISI-web of knowledge» y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248.

Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J., Toscano, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). The design and implementation of a research instrument about students' discourse on the mathematical practice of defining. Enviado para su publicación.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A. J., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 355-362). Umeå: PME.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. y Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: The case of discursive shifts in the study of calculus. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 182-198.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 259-282.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 423-430.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Sánchez, V. y García, M. (2008). What to teach and how to teach it: Dilemmas in primary mathematics teacher education. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 4: The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 281-297). Rotterdam: Sense Publishers.

Sánchez, V. y García, M. (2014). Socio-mathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 305-320.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: The case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 163-187.

Thompson, P. W., Carlson, M. P. y Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 415-432.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Wasserman, N. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *Journal of Mathematical Behavior, 49*(1), 116-128.

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-347.