100 RETOS Y DESAFÍOS DE FÍSICA

Para alumnos de Bachillerato que preparan la Olimpiada de Física
y estudiantes de Grados de Ciencias

IGNACIO ÍÑIGUEZ-DE-LA-TORRE • LUIS LÓPEZ • CRISTINA PRIETO • MARÍA JESÚS SANTOS

Ediciones Universidad
Salamanca

ÍNDICE

ÍNDICE

100 Retos y Desafíos de Física

ÍNDICE

ÍNDICE

Ignacio Íñiguez-de-la-Torre
Luis López
Cristina Prieto
María Jesús Santos

100 Retos y Desafíos de Física

Para alumnos de Bachillerato
que preparan la Olimpiada de Física
y estudiantes de Grados de Ciencias

Ediciones Universidad
Salamanca

DOCUMENTOS DIDÁCTICOS, 162

1.ª edición: enero, 2019

ISBN: 978-84-1311-001-1 (Impreso POD)
978-84-1311-002-8 (PDF)

Ediciones Universidad de Salamanca
Plaza de San Benito, 2
E-37008 / Salamanca (España)
Telf: +34 923 294 598
http://www.eusal.es
eus@eusal.es

Realiza:
Nueva Graficesa
Salamanca (España)
Maquetación:
Intergraf
Salamanca (España)

Realizado en España-Made in Spain

Ediciones Universidad de Salamanca es miembro de la UNE Unión de Editoriales Universitarias Españolas
www.une.es

♠

CEP. Servicio de Bibliotecas

100 retos y desafíos de física : para alumnos de bachillerato que preparan la Olimpiada de Física y estudiantes de Grados de Ciencias / Ignacio Íñiguez-de-la-Torre [y otros].—1.ª ed., enero 2019.—Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 2019

1 recurso en línea (326 p.) (PDF): il. —(Documentos didácticos; 162)

Tít. tomado de la página de portada

Otro tít.: Cien retos y desafíos de física

Modo de acceso: www. URL: https://edicionesusal.com/978-84-1311-001-1

1. Física-Estudio y enseñanza (Secundaria)-Problemas y ejercicios. I. Íñiguez-de-la-Torre Mulas, Ignacio, autor. II. Título: Cien retos y desafíos de física.

53:37.02(076)

♠

Catalogación de editor en ONIX accesible en
https://www.dilve.es/Créditos

Índice

ÍNDICE

ÍNDICE

Agradecimientos

Este libro recoge algunos de los problemas planteados por profesores que formaron parte de las comisiones que, en ediciones anteriores a la actual, diseñaron la fase local de la Olimpiada de Física en Salamanca. Por ello, queremos agradecer su generosidad al permitir utilizarlos en este libro. Isabel Arias, Jesús (Chus) Martín, Santiago Velasco y Jose Ignacio Íñiguez de la Torre fueron, por otra parte, pioneros en las labores de divulgación y promoción de la Física en institutos y colegios de Salamanca. Su labor y pasión por la Física han sido sin duda un impulso para nosotros a la hora de lanzarnos a publicar este ejemplar. También han participado activamente en la creación de material de este libro los profesores Tomás González, María Dolores Hortal y Francisco Martín, a quienes agradecemos su valiosa colaboración.

ÍNDICE

Prólogo

¿Por qué estudiar Física? Esta es la pregunta que nos ronda la cabeza a todos los físicos. La respuesta no es sencilla, pero al menos expliquemos el origen de la misma. La Física es una disciplina de la ciencia fundamental para entender el mundo que nos rodea, dentro y fuera de nuestro planeta. ¿Quieres saber el cómo y el porqué de todo aquello que observas en tu vida diaria? Estudia Física y encontrarás la respuesta. Rétate a ti mismo y a tu imaginación a entender tanto los conceptos tradicionales como los más novedosos que han llevado a los grandes descubrimientos de la tecnología y que con ello han cambiado nuestras vidas. La Física abarca el estudio desde las galaxias hasta las partículas subatómicas y es la base de muchas otras ciencias. Un buen físico es alguien que ha desarrollado unas capacidades y destrezas para resolver problemas de todo tipo. Precisamente son estas cualidades las que nos hacen ser muy versátiles y que nos podamos adaptar a casi cualquier trabajo. **La Física te enseña a pensar**, a entender por qué el cielo es azul y las puestas de sol rojizas, por qué la tierra es redonda, cómo se genera la electricidad, cómo es posible que una bicicleta en movimiento sea estable, a entender el origen del calentamiento global … Por todo esto, si estudias Física serás aquel del grupo de amigos al que todos recurran para resolver todas las dudas que empiecen ¿por qué o cómo funciona …?

Para que un joven estudiante de bachillerato se vea motivado a estudiar Física en la Universidad hace falta una labor divulgativa muy importante que en muchas ocasiones no es valorada lo suficiente. Es cierto que se trata de una disciplina del conocimiento donde el nivel de abstracción y manejo matemático son elevados, pero no cabe duda de que presentarla de forma atractiva es clave para transmitir pasión por ella. Por esto, durante los tres últimos cursos académicos un grupo de profesores de Física de la Universidad de Salamanca hemos dedicado parte de nuestro tiempo a crear material didáctico con el fin de acercar la Física a la sociedad. El punto de partida fue elaborar una colección de ejercicios para la preparación de la fase local de la Olimpiada de Física utilizando las redes sociales como elemento de difusión [1]. La metodología ha consistido en proponer cada semana un **Reto de Física** o un **Problema Desafío**. En los **Retos** se plantean cuestiones relacionadas con la vida cotidiana, con apariencia sencilla y que no requieren demasiado tiempo ni recursos para su solución. Para resolver los **Desafíos**, sin embargo, se requieren procedimientos más complejos, pero manteniendo siempre un nivel de dificultad asequible para el estudiante. Se plantean además experiencias que pueden realizar los estudiantes en sus casas unido a un planteamiento ameno e ilustrado del problema. La semana siguiente a la publicación de un reto o problema se publica la solución del anterior y uno nuevo. Parte del material es totalmente original de los autores y otra parte son contenidos adaptados de libros, revistas o páginas web [2].

Nos planteamos con esta iniciativa dos objetivos principales. Por un lado, facilitar material a los profesores de Física de Bachillerato para preparar a sus estudiantes de cara a la prueba de la Fase Local de la Olimpiada de Física en Salamanca y, por otro, acercarnos y motivar a los estudiantes de Física de nuestra universidad a través de las redes sociales. La recopilación de todo este material junto a nuevos ejemplos constituye el libro que aquí presentamos. Los ejercicios de los Retos se presentan en forma de fichas con un formato y tamaño uniformes, mientras que los Desafíos están presentados con estilo tradicional de enunciado y solución. La temática cubre casi todos los epígrafes de un libro de Física básica [3]. La novedad en nuestro enfoque reside en que hemos intentado presentar cada problema con un formato agradable y resaltar su relación con aspectos de la vida cotidiana, ya sea por una relación con un deporte, una experiencia de casa, una noticia de la tele, etc.

Utilización del libro

Tanto los 70 problemas de Retos como los 30 de Desafíos se han agrupado en 5 bloques: (i) cinemática y dinámica, (ii) fuerza, trabajo y energía, (iii) gravitación, (iv) electricidad y magnetismo, (v) miscelánea (ondas, óptica fluidos, física moderna, etc.).

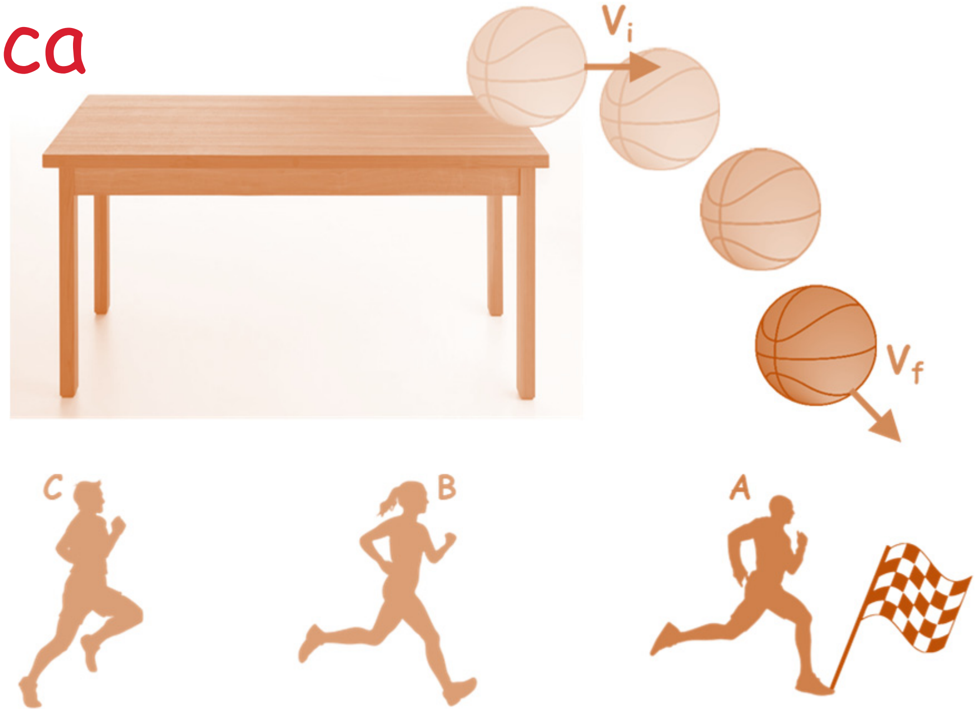
Los Retos se presentan en formato de fichas con una extensión uniforme. En cada bloque se exponen primeramente todos los enunciados y a continuación las soluciones. La ordenación de los retos dentro de cada bloque no responde a criterios de nivel de dificultad o temática.

Los Desafíos se presentan de modo análogo a los Retos, primeramente los enunciados y posteriormente las soluciones. El nivel de dificultad es variable y la temática diversa. Tampoco aquí se ha utilizado ningún criterio particular para ordenar los problemas dentro de cada bloque. Merece la pena destacar que hay varios problemas (71, 81, 97 y 100) en los que se proporcionan datos experimentales y que, para su respuesta, requieren el análisis de dichos datos mediante representaciones gráficas y ajustes lineales.

ÍNDICE

Retos

Cinemática y dinámica



1. Un ciclista muy loco

Un ciclista baja a lo loco una montaña con pendiente constante y con fricción despreciable. En un determinado momento circula a 3 m/s y cuatro segundos más tarde lo hace a 21 m/s.

¿Qué distancia recorre nuestro ciclista durante esos cuatro segundos de tiempo?

- a 48 m
- b 72 m
- c 63 m
- d 18 m
- e 9 m

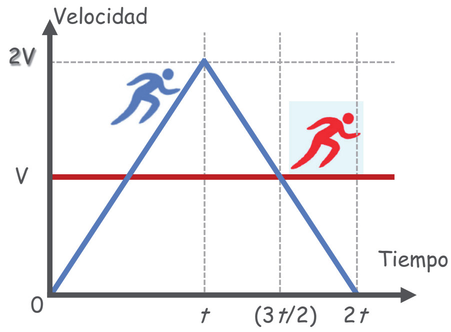
Ver solución 1

ÍNDICE

2. Dos corredores

Sean dos corredores que a tiempo $t = 0$ se encuentran en x=0. El atleta rojo corre a velocidad constante **V** a lo largo del eje x mientras que el azul, partiendo de reposo, empieza a acelerar también a lo largo del eje x. La velocidad de ambos corredores se representa en la gráfica de abajo desde tiempo 0 a $2t$.

En el instante de tiempo ($3t/2$):



- **a** Ambos han recorrido la misma distancia
- **b** El azul va más rápido
- **c** El rojo ha avanzado más
- **d** El azul avanza hacia atrás
- **e** Ninguna de las anteriores

Ver solución 2

3. Balón de baloncesto

Tenemos un balón de baloncesto que rueda desplazándose horizontalmente a lo largo de una mesa. Justo en el instante en que llega al extremo de la mesa para empezar la caída, el balón tiene velocidad horizontal constante V_i. En el instante en que el balón choca con el suelo su nueva velocidad es V_f.

¿Cuál es la velocidad vertical del balón en el momento en que golpea el suelo?

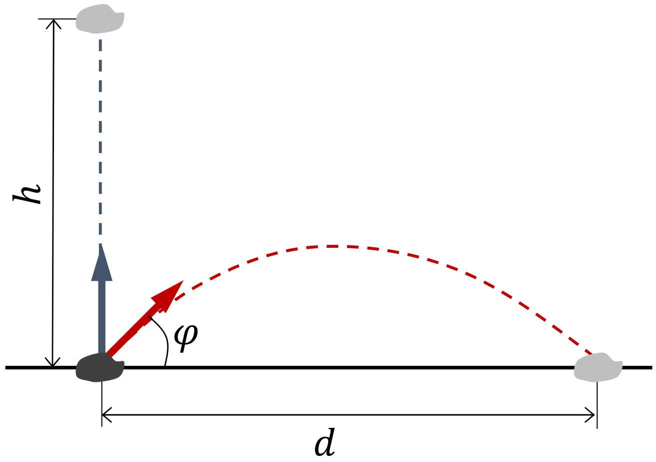
Ver solución 3

4. Lanzando una piedra

Lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba con velocidad inicial $\boldsymbol{v_0}$ y observamos que alcanza una altura máxima $\boldsymbol{h}$. A continuación queremos lanzar la misma piedra con velocidad inicial de igual módulo v_0 de forma que alcance la mayor distancia posible en horizontal $\boldsymbol{d}$.

¿Con qué ángulo φ debemos lanzarla?

¿En función de h, qué distancia en horizontal d alcanzará?



Notas:

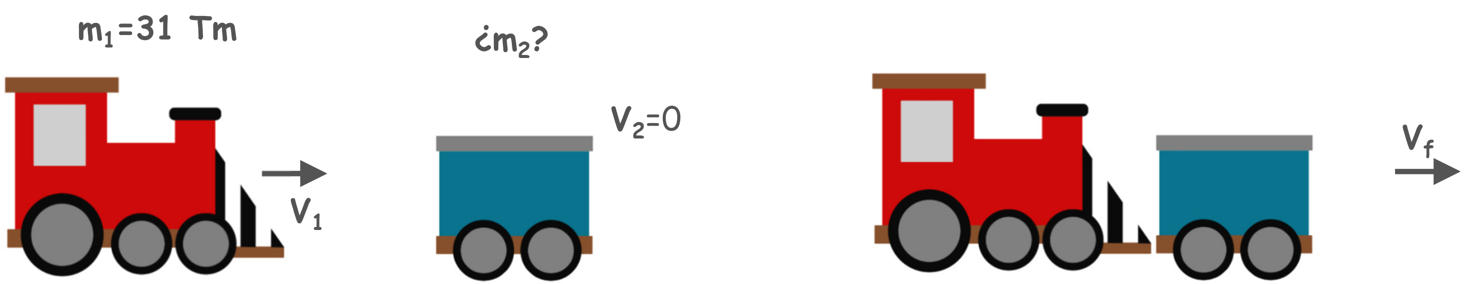
- No se tiene en cuenta la fuerza de rozamiento debida al aire.
- Considera que la piedra se lanza desde el nivel del suelo (ver dibujo).

Ver solución 4

5. Maquinista del tren

Una máquina de tren de masa **m_1=31 Tm** se desplaza por una vía y choca contra un vagón de masa **m_2** que estaba en reposo. El mecanismo de enganche automático actúa correctamente de forma que los dos vehículos se acoplan y se desplazan conjuntamente a lo largo de la vía. Sabemos que el 38 % de la energía inicial se disipa en forma de calor, ruido, deformación, vibraciones, etc.

¿Cuál es la masa del vagón que estaba en reposo?

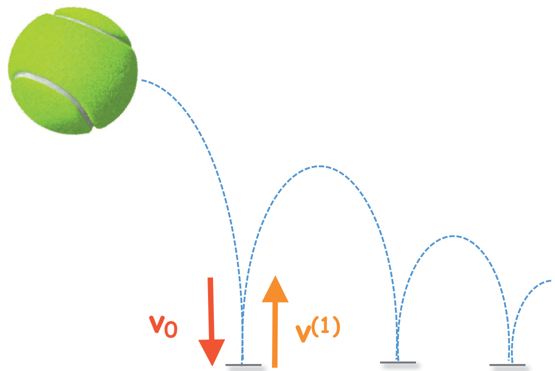


Ver solución 5

6. Rebotes de una pelota de tenis

Desde la azotea de un edificio de **64 m** de altura dejamos caer una pelota. El coeficiente de restitución de los botes de la pelota en el suelo es **e=1/2**.

¿A qué altura en metros asciende sobre el suelo después de botar tres veces?



Nota.- Se define el coeficiente de restitución como el cociente entre la velocidad de la pelota después del choque, $v^{(1)}$, y la que tenía antes del mismo, v_0, es decir:

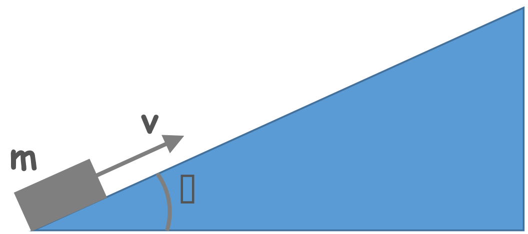
$$e=v^{(1)}/v_0$$

Ver solución 6

7. Cinemática y dinámica de un plano inclinado

Se tiene un plano inclinado un ángulo ▯ sobre la horizontal y se lanza hacia arriba un objeto de masa **m** con velocidad inicial **v** que se desplaza sobre él sin rozamiento. **Se pide:**

a) El tiempo que está subiendo y la altura alcanzada.
b) La gráfica de la velocidad en función del tiempo.
c) La energía cinética máxima.
d) La energía potencial máxima.

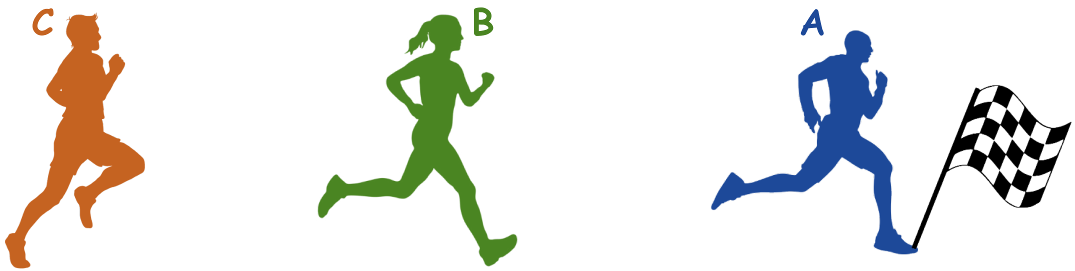


Ver solución 7

8. Cada uno a su ritmo

Tres corredores, que llamaremos A, B y C, disputan una carrera de 10 km. Todos ellos tomaron la salida en el mismo momento y corren a velocidad constante. Cuando el corredor A llega a la meta aventaja en 1 km al corredor B, y cuando el corredor B llega a la meta aventaja al corredor C en 1 km también.

¿Cuántos metros le quedaban al corredor C cuando el A llegó a la línea de meta?

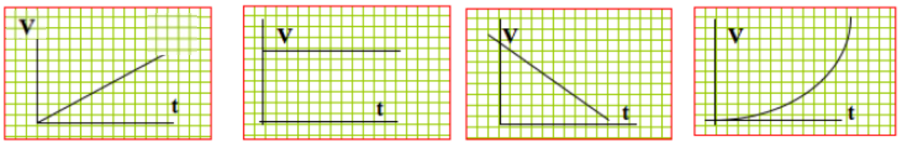


Ver solución 8

9. Lanzadera del parque de atracciones

Seguro que has montado en la ***Lanzadera*** de algún Parque de Atracciones. Como sabes, se sube con velocidad constante, se baja en caída libre y finalmente se frena con aceleración aproximadamente constante.

Señala el tramo que corresponde a cada gráfica velocidad-tiempo



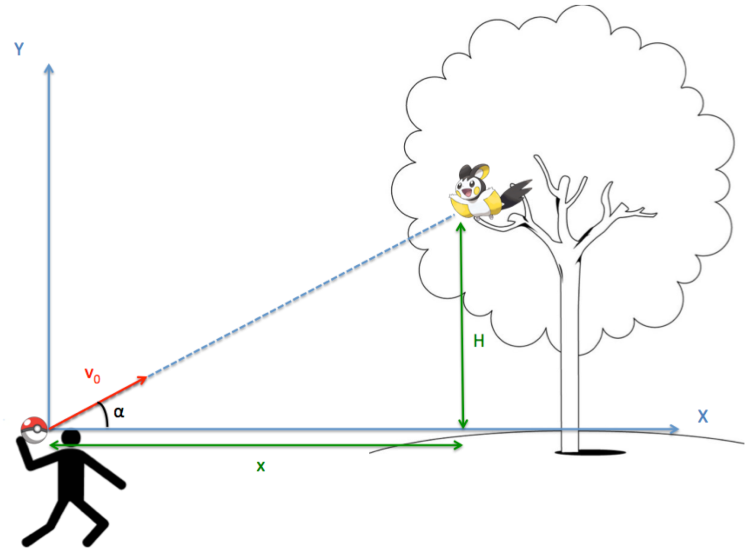
☐ Subida	☐ Subida	☐ Subida	☐ Subida
☐ Caída libre	☐ Caída libre	☐ Caída libre	☐ Caída libre
☐ Frenado	☐ Frenado	☐ Frenado	☐ Frenado
☐ Ninguno	☐ Ninguno	☐ Ninguno	☐ Ninguno

- Fuente: Aula de Física. Parque Atracciones Madrid

Ver solución 9

10. Caza de «Pokemon»

Sales con tu móvil a cazar pokemon y te encuentras una situación en la cual disparas una pokeball a un *emolga* (pokemon volador eléctrico) que se encuentra en la rama de un árbol de la Plaza de Anaya.
Apuntas directamente al pokemon, pero este, viendo salir la pokeball, se suelta de la rama y cae del árbol, esperando evitar el impacto.



Conocida la velocidad inicial de la pokeball (proyectil) y el ángulo de lanzamiento ¿crees que cazarás al emolga?

¡Demuéstralo con ecuaciones!

Supón que el tiempo de reacción del pokemon es despreciable

Ver solución 10

1. Un ciclista muy loco: solución

La respuesta correcta es la (a).

Una forma rápida de saberlo (válido si la aceleración es constante) es calcular la velocidad media durante el periodo citado:
$\mathbf{V_{med} = (V_i+V_f)/2 = (3+21)/2 = 12\ m/s}$

Ahora podemos usar esta V_{med} para averiguar la distancia recorrida en los cuatro segundos:
$\mathbf{d = V_{med}\cdot t = (12\ m/s)\times 4\ s = 48\ m}$

Otra forma, pero más laboriosa, sería calcular la aceleración como $\mathbf{a = (V_f-V_i)/t}$ de forma que la distancia sería:
$\mathbf{d = V_i\cdot t+0{,}5\cdot at^2}$

a **48 m**

b 72 m

c 63 m

d 18 m

e 9 m

Ver enunciado 1

ÍNDICE

2. Dos corredores: solución

La respuesta correcta es la (e).

A tiempo $3t/2$ ambos corredores van a la misma velocidad (como muestra la figura). La velocidad del azul va disminuyendo (pendiente negativa de *V(t)*), pero esto NO quiere decir que el corredor se mueva hacia atrás.

El área bajo la curva de *v* frente a *t* representa el espacio recorrido.

En el instante $3t/2$ la relación entre el espacio que ha recorrido el rojo y el que ha recorrido el azul es (contar rectángulos): $L_{rojo}/L_{azul}= 3/3{,}5=6/7$

Por tanto, el área bajo la curva *V(t)* es mayor para el atleta azul, es decir, ha recorrido mayor distancia.

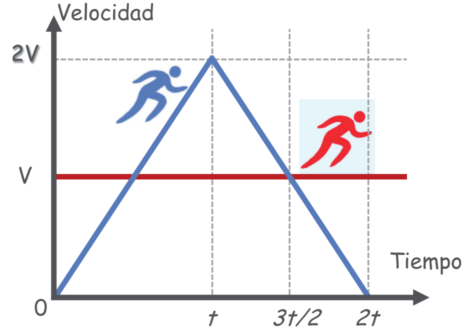
a Ambos han recorrido la misma distancia

b El azul va más rápido

c El rojo ha avanzado más metros

d El azul avanza hacia atrás

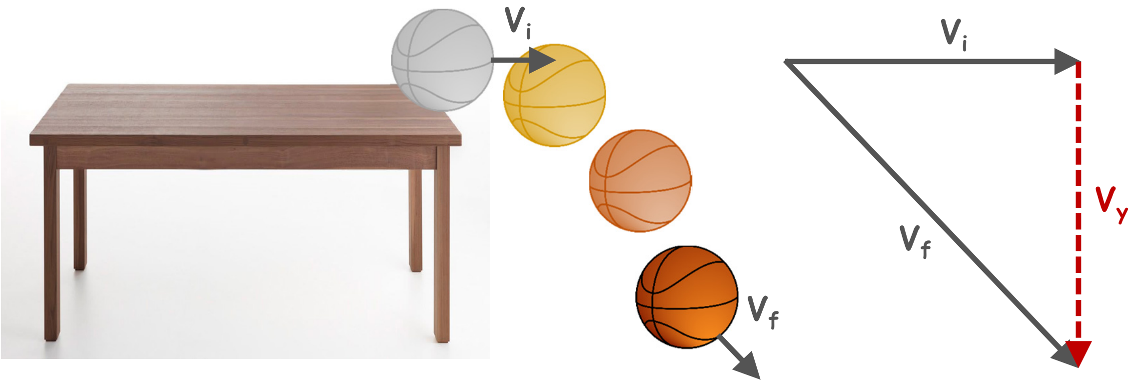
e Ninguna de las anteriores



Ver enunciado 2

3. Balón de baloncesto: solución

Se trata de un simple problema de proyectiles donde la clave es darse cuenta de que el balón se mueve con velocidad horizontal constante, V_i, y con una velocidad vertical desconocida que denotaremos V_y.
El dato de la velocidad final V_f es "en módulo", con lo que puede ser usado con ayuda del teorema de Pitágoras para calcular la velocidad vertical V_y.



$$V_i^2+V_y^2=V_f^2$$

$$V_y^2=V_f^2-V_i^2$$

$$V_y=\sqrt{V_f^2-V_i^2}$$

Ver enunciado 3

4. Lanzando una piedra: solución

Cuando lanzamos la piedra verticalmente hacia arriba la energía mecánica se conserva. Por tanto:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

Por otro lado, cuando la lanzamos con un ángulo φ, como en el eje horizontal la velocidad es constante ($v_x = v_0 \cos\varphi$), el alcance viene dado por

$$d = v_0 \cos\varphi \, t_v$$

donde t_v es el tiempo de vuelo de la piedra. Como la trayectoria de vuelo es simétrica, $t_v = 2\,t_h$, siendo t_h el tiempo en el cual la piedra alcanza la máxima altura. En dicho instante la velocidad vertical es nula y, por tanto,

$$0 = v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - g\,t_h \Rightarrow t_h = \frac{v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g}$$

Así pues, el alcance viene dado por

$$d = v_0 \cos\varphi \, t_v = v_0 \cos\varphi \, 2\frac{v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g} = \frac{2\,v_0^2}{g}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

Este alcance es máximo cuando el ángulo es $\boldsymbol{\varphi = 45°}$ $\left(0 = \frac{d}{d\varphi}(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2}\right) = \cos(2\varphi) \Rightarrow \varphi = 45°\right)$ y viene dado por

$$\boldsymbol{d} = \frac{2\,v_0^2}{g}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\,(2gh)}{g}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{2h}$$

Ver enunciado 4

5. Maquinista del tren: solución

Se trata de un problema de cinemática donde hay que aplicar la **conservación del momento lineal y la conservación de la energía**. Sí, la energía total se conserva pero **no la energía mecánica** pues se pierde por disipación un 38% de la energía inicial:

$$\text{(a)} \qquad m_1 V_1 + \cancel{m_2 V_2} = (m_1 + m_2) V_f$$

$$\text{(b)} \qquad 0.62 \cdot \left(\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cancel{m_2 V_2^2}\right) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_f^2$$

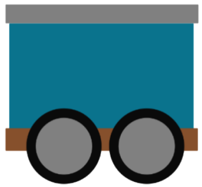
Parece difícil de resolver pues tenemos tres incógnitas (m_2, V_1 y V_f) y solo dos ecuaciones. Pero podremos encontrar la masa m_2 y la relación entre las velocidades. Basta dividir las ecuaciones entre sí:

$$\frac{1}{0.62 \cdot V_1} = \frac{1}{V_f}$$

Y llevando esta relación de velocidades a la ecuación (a):

$$1 + \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{0.62}$$

Finalmente, conocida m_1=31 Tm, encontramos que **m_2=19 Tm**



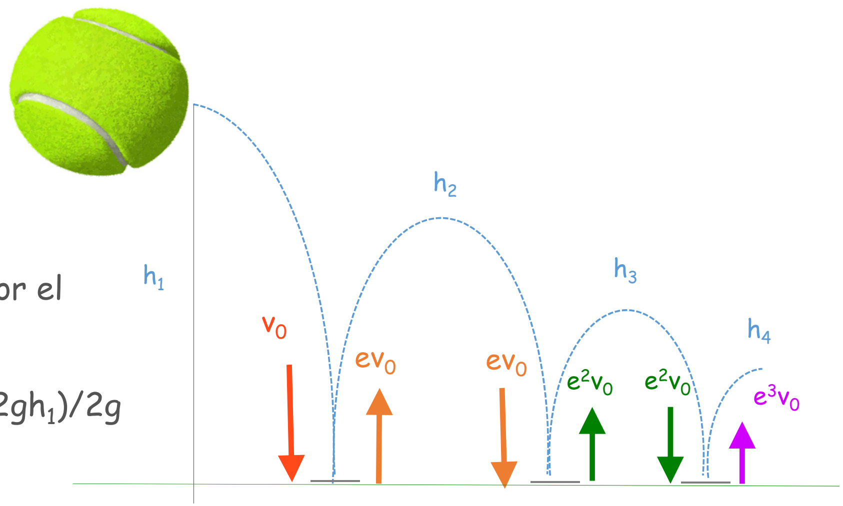
Ver enunciado 5

6. Rebotes de una pelota de tenis: solución

Por el Principio de Conservación de la Energía Mecánica:

$$mgh_1=mv_o^2/2 \rightarrow \quad v_o^2=2gh_1$$

1. Primer bote: $e=v^{(1)}/v_o \quad \rightarrow \quad v^{(1)}=e\cdot v_o$
2. Segundo bote: $e=v^{(2)}/v^{(1)} \quad \rightarrow \quad v^{(2)}=e\cdot v^{(1)}=e^2\cdot v_o$
3. Tercer bote: $e=v^{(3)}/v^{(2)} \quad \rightarrow \quad v^{(3)}=e\cdot v^{(2)}=e^3\cdot v_o$



Se eleva tras el tercer bote hasta h_4. De nuevo, por el Principio de Conservación de la Energía Mecánica:

$$mgh_4=m[v^{(3)}]^2/2 \rightarrow \quad h_4=[v^{(3)}]^2/2g=(e^3\cdot v_o)^2/2g=(e^6\cdot 2gh_1)/2g$$

$$\mathbf{h_4}=e^6\cdot h_1=(1/2)^6\cdot 64=\mathbf{1\ m}$$

Ver enunciado 6

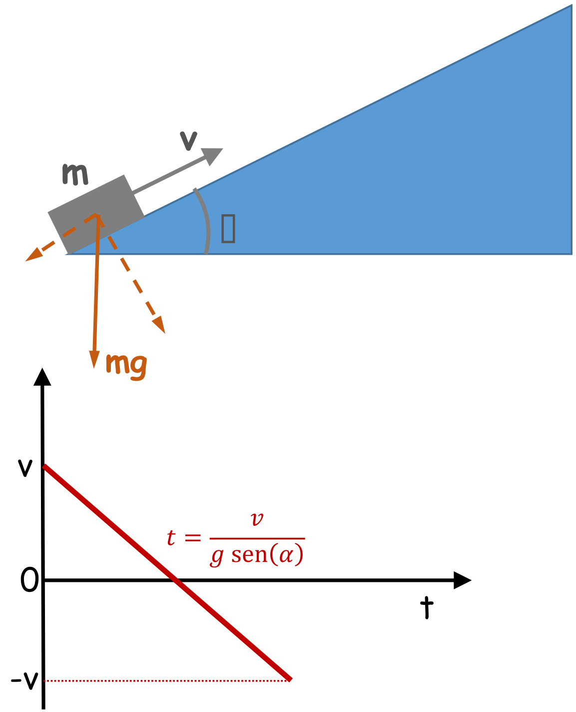
7. Cinemática y dinámica de un plano inclinado: solución

Ya que no existe rozamiento la única fuerza presente es la de la gravedad. Teniendo en cuenta la inclinación del plano, para obtener la aceleración en la dirección del movimiento debemos multiplicar la aceleración de la gravedad por el seno de alfa. De esta forma para el movimiento uniformemente decelerado tenemos:

$$v(t) = v - g\ \mathrm{sen}(\alpha)t \rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{g}\ \mathbf{sen}(\boldsymbol{\alpha})}$$

Utilizando el principio de conservación de la energía (cinética máxima = potencial máxima) podemos calcular la altura alcanzada:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2\boldsymbol{g}}$$



Ver enunciado 7

8. Cada uno a su ritmo: solución

Llamemos V_A, V_B y V_C a la velocidad de cada corredor.

Cuando A ha recorrido 10 km, B ha recorrido 9 km. Así:

$10 = V_A \times t_1$

$(10-1)=9 = V_B \times t_1$

Y dividiendo una entre la otra: **$10/9=V_A/V_B$** **(1)**

Repetimos el razonamiento con B y C:

$10 = V_B \times t_2$

$(10-1)=9 = V_C \times t_2$

De igual forma que: **$10/9=V_B/V_C$** **(2)**

Si multiplicamos (1) por (2): **$100/81=V_A/V_C$,**

Es decir: cuando A recorre 100 unidades, C recorre 81.

Para calcular la distancia recorrida por C en t_1:

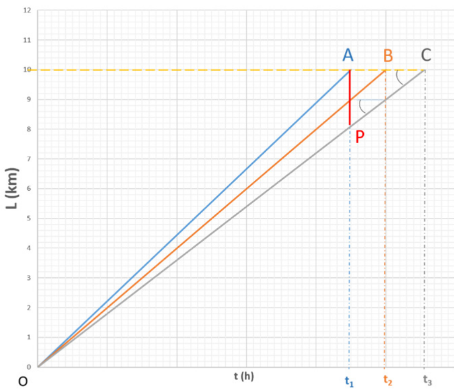
$V_C=V_A \times 81/100$ y $t_1=10\ km/V_A$

Distancia$=V_C \times t_1=V_A \times 81/100 \times 10\ km/V_A=8.1$ km

Alternativa gráfica:

Como cada corredor va a velocidad constante, en la gráfica de L frente a t la representación de su trayectoria es una línea recta.

Comparando los ángulos que forman con la dirección horizontal, se pueden establecer las relaciones:



$$OB(10):\ \frac{10}{t_2}=\frac{1}{t_2-t_1}\rightarrow t_1=\frac{9}{10}t_2$$

$$OC(10):\ \frac{10}{t_3}=\frac{1}{t_3-t_2}\rightarrow t_3=\frac{10}{9}t_2$$

$$PCB\ \text{y}\ OC(10):\ \frac{AP}{t_3-t_1}=\frac{1}{t_3-t_2}$$

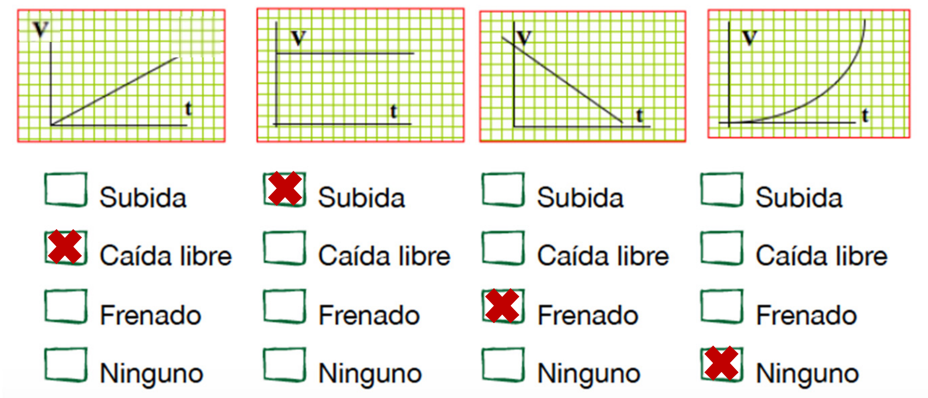
$$\rightarrow AP=1{,}9\ km$$

Por lo tanto el corredor C estaba a 1,9 km de distancia cuando el A llegó a la meta.

Ver enunciado 8

9. Lanzadera del parque de atracciones: solución

- **Subida velocidad constante**
- **Bajada en caída libre**
- **Frenada con aceleración aproximadamente constante**



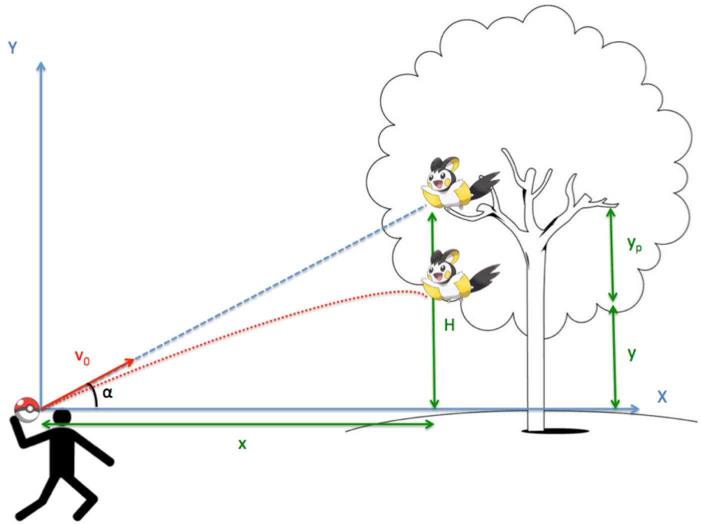
- Fuente: Aula de Física. Parque Atracciones Madrid

Ver enunciado 9

10. Caza de «Pokemon»: solución

La *emolga* y la pokeball están sujetos a la misma aceleración g. **Por tanto, si la pokeball se lanza en línea recta hacia el *emolga*, lo cazará si (y solo si) el *emolga* se deja caer en el momento del disparo.** De hecho, nuestra *emolga* demuestra saber poca física al dejarse caer 😂

- La **pokeball** describe un movimiento parabólico:
  - Tiempo que tarda en recorrer el espacio horizontal, x, hasta el pokemon $t_b = \frac{x}{v_{0x}}$
  - Espacio en vertical recorrido en ese tiempo:
  $$y = v_{0y}t_b - \frac{1}{2}gt_b^2 = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$
- Por otro lado el **pokemon** tendrá un m.r.u.a. pues "se deja caer"
  - Espacio recorrido (en vertical), y_p, durante el tiempo t_b:
  $y_p = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$
- Como, la relación entre H y x es: $tg\theta = \frac{H}{x}$
- Llegamos a la conclusión: $y = H - y_p$

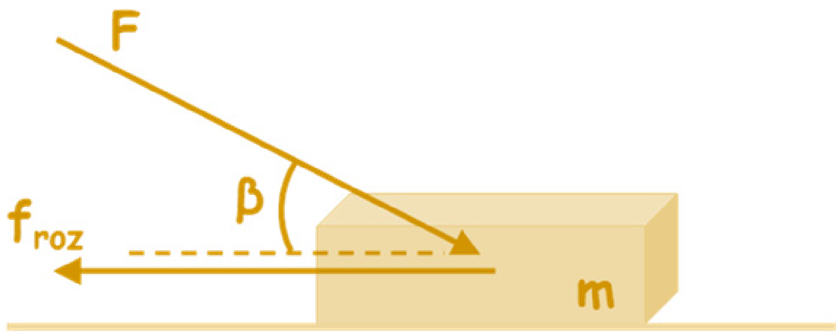


Ver enunciado 10

ÍNDICE

Retos

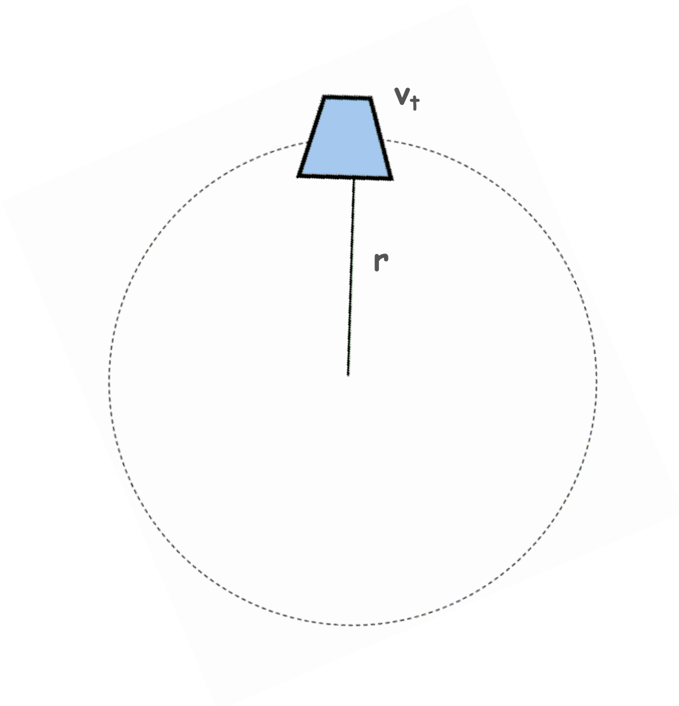
Fuerza, trabajo y energía



11. Un cubo en órbita

Se hace girar un cubo de agua como el de la figura de la derecha en una trayectoria circular de radio **r**.

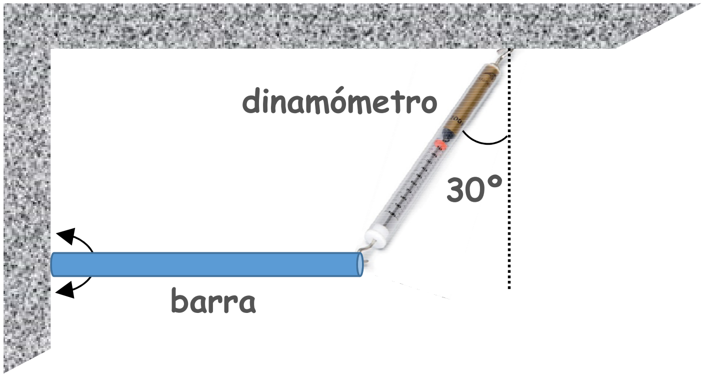
Determina **el valor mínimo de la velocidad en el punto más alto, v_t, para que el agua no se salga del cubo.**



Ver solución 11

12. Barra rígida y dinamómetro

Sea una barra rígida de 100 Newton de peso sujeta por su lado izquierdo a una pared por medio de una bisagra que le permite girar libremente sin rozamiento. En su extremo derecho se coloca un dinamómetro de forma que la barra está equilibrada en posición horizontal, tal y como muestra la figura.

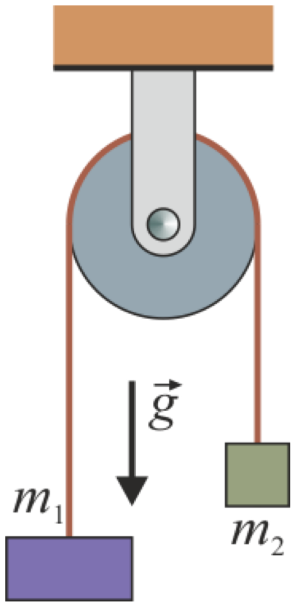


¿Qué fuerza marca el dinamómetro si este forma un ángulo de 30° con la vertical?

Ver solución 12

13. Aceleración en polea simple

Dos bloques de masas m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$) cuelgan de una cuerda inextensible de masa despreciable que pasa por una polea simple, como se muestra en la figura de la derecha. Despreciando la fricción de la cuerda y las masas de la polea y la cuerda, **calcula la aceleración de los bloques.**



Ver solución 13

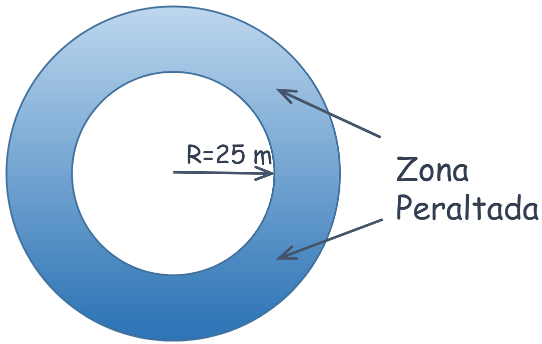
14. Ciclista en un velódromo

Un estudiante de Física decide ir al velódromo de Salamanca para comprobar sus conocimientos de composición de fuerzas y movimiento circular.

El velódromo es un anillo de radio interior 25 m y una pista de rodaje inclinada 30° sobre la horizontal (es decir, con peralte). La pista tiene 10 m de anchura.

Cuando rueda por el peralte se da cuenta de que, para no caerse, debe mantener una velocidad elevada.

¿Cuál es la velocidad a la que debe impulsar su bicicleta para ir por el centro de la pista?



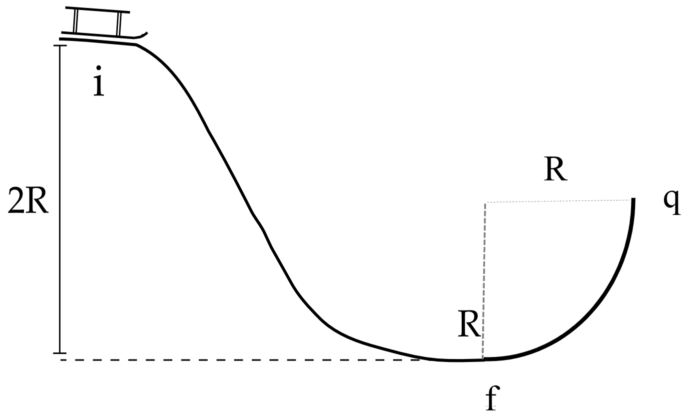
Nota: Se desprecia el rozamiento entre las ruedas y la pista. En ese caso, para que no deslice sobre la pista, la resultante de las fuerzas será perpendicular al suelo. Tomar $g=10\ m/s^2$

Ver solución 14

15. Viajando en un trineo

Un trineo de masa m comienza a deslizarse desde el reposo en la cima de una colina siguiendo un camino cubierto de nieve y con el perfil de la figura. El tramo **fq** es circular con radio **R**.

Despreciando cualquier tipo de rozamiento:



a) Determina el módulo de la velocidad del trineo en f.

b) ¿Cuál es la fuerza normal ejercida por la superficie en ese punto?

c) ¿Cuánto valen el módulo de la velocidad y la fuerza normal en el punto q?

Ver solución 15

16. Subir escaleras para gastar azúcar

Si tienes un amigo al que le guste mucho la actividad física, puedes plantearle la siguiente cuestión.

Un estudiante de 69,0 kg de masa sube hasta la quinta planta del instituto. Para ir de un piso al siguiente debe subir 22 peldaños, de 175 mm de altura cada uno. El tiempo que tarda en subir es de 50,8 s.

(a) Calcula el trabajo desarrollado en la subida.

(b) Calcula la potencia útil desarrollada.

El rendimiento del cuerpo humano considerado como máquina térmica es del 25 %.

(c) Calcula el consumo de energía necesario para realizar esa tarea.

Por fin, sabiendo que un terrón de azúcar tiene 3,90 g y que suministra aproximadamente 3,87 kcal/g,

(d) ¿cuántos terrones de azúcar son necesarios para ello?

(Tomar $g = 9{,}81\ m/s^2$ y 1 cal = 4,18 J)

Ver solución 16

17. El globo

Hemos inflado un globo de masa 1 g con 20 g de aire y sujetamos la boquilla para que no se desinfle.
Ahora soltamos el globo. Suponiendo que en un instante se escapan 5 g de aire a una velocidad de 4 m/s

a) ¿Qué movimiento realizará el globo en ese momento?

b) ¿Cuál será su velocidad?

Ver solución 17

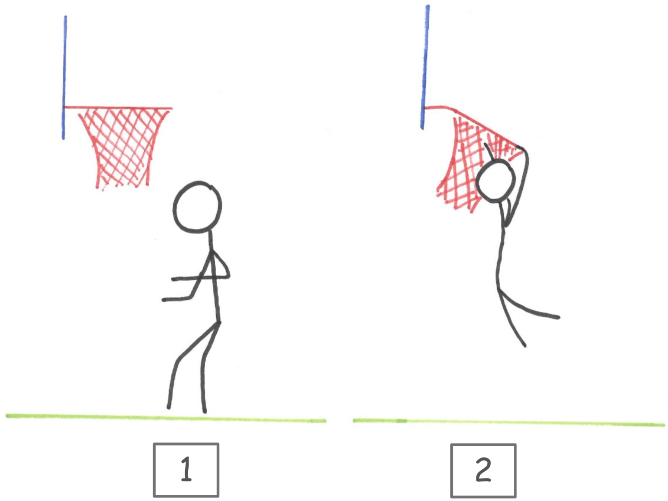
18. Mate de una jugadora del «Avenida»

Consideremos un sistema formado por una jugadora de baloncesto del "Avenida" de 80 kg, el aro de una de las cestas y la Tierra. Supongamos que la energía potencial del sistema es cero cuando la jugadora no está saltando y el aro está en posición horizontal.

Determina el cambio de energía potencial total de este sistema entre las dos situaciones de las figuras:

1. La jugadora está de pie. Su centro de masa está a 0,8 m de altura por encima del suelo.
2. Al colgarse del aro, su centro de masa ha subido a 1,30 m y la parte frontal del aro se ha desplazado una distancia de 10 cm.

Dato: La constante elástica del aro es 6,4 kN/m.

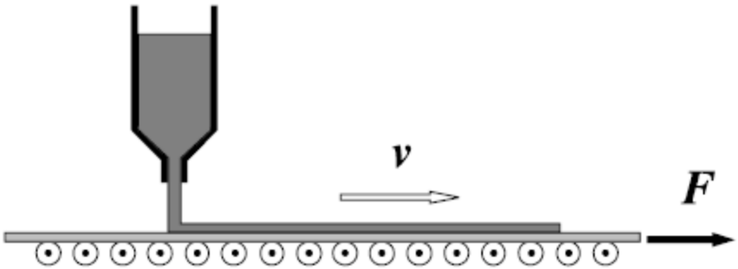


Ver solución 18

ÍNDICE

19. Galletas sobre cinta trasportadora

En un obrador industrial las galletas, al salir del horno, se colocan sobre una cinta transportadora que se mueve a una velocidad **v=0,80 m/s**. Para cubrirlas de chocolate se dispone de una tolva (depósito en forma de cono invertido con un orificio en la parte inferior) desde donde cae el chocolate líquido a la cinta transportadora a un ritmo de **0,75 kg/s**.



a) ¿Qué fuerza adicional se requiere para que, una vez que empieza a caer el chocolate, la cinta se siga moviendo a la misma velocidad v?

b) ¿Qué potencia adicional debe suministrar el motor que mueve la cinta?

c) Demuestra que dicha potencia es el doble del ritmo al que aumenta la energía cinética del sistema. Entonces, ¿qué ocurre con la otra mitad de la potencia suministrada por el motor?

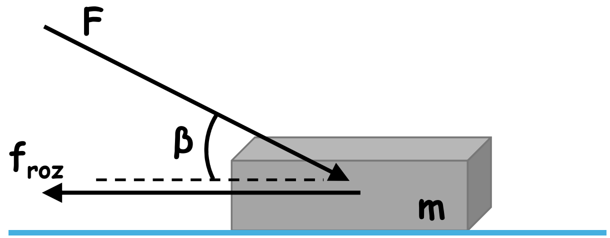
Ver solución 19

20. Rozamiento empujando un bloque

Un bloque de masa **m** se empuja sobre una superficie rugosa por medio de una fuerza **F** que forma un ángulo **β** con la horizontal, tal y como muestra la figura de la derecha.

El bloque experimenta una aceleración **a** hacia la derecha.

¿Cuál es la magnitud de la fuerza de rozamiento f_{roz} que se opone al movimiento?



a) F × sin(β) - ma
b) F × sin(β) + ma
c) F × cos(β) - ma
d) F × cos(β) + ma
e) ma

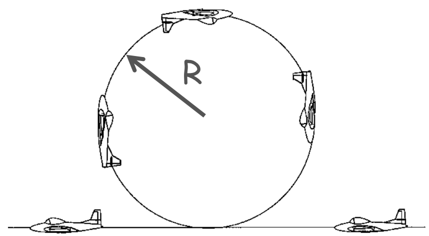
Ver solución 20

21. «Patrulla Águila»

Un piloto de la “Patrulla Águila” hace un rizo (órbita circular) con velocidad constante. En el punto más bajo del rizo siente una fuerza hacia abajo dos veces mayor que su peso P=mg.

a) ¿Qué fuerza sentirá en el punto más alto del rizo?

b) Si el radio del rizo R es de 980 m, ¿cuál es la velocidad?

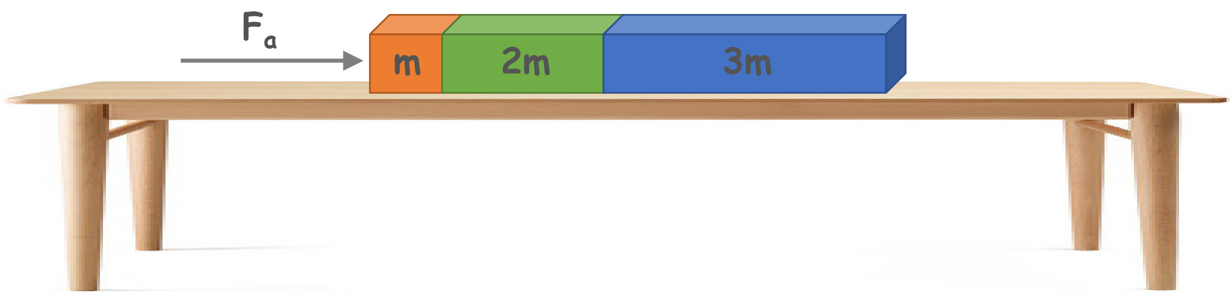


Ver solución 21

22. Bloques adyacentes

En una mesa horizontal (sobre la que pueden desplazarse sin fricción) se tienen tres bloques adyacentes de masas **m, 2m** y **3m**. Si se aplica una fuerza F_a sobre el bloque de la izquierda (como se indica en la figura) **¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?**

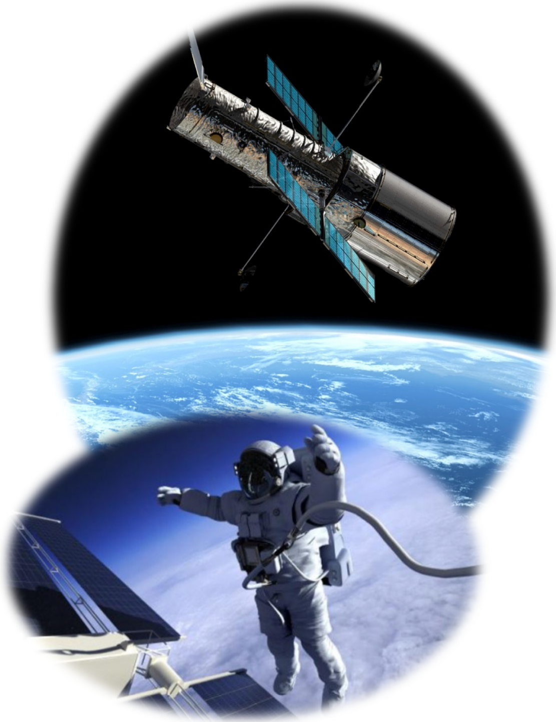
(a) La aceleración de los bloques varía acorde a su masa.
(b) La aceleración es para todos la misma e igual a F_a/m
(c) La fuerza neta en cada bloque es la misma.
(d) La fuerza neta sobre el bloque **3m** es tres veces mayor que la fuerza neta sobre el bloque de masa **m**.
(e) La magnitud de la fuerza que ejerce el bloque **3m** sobre el **2m** es mayor que la que ejerce el **2m** sobre el **3m**.



Ver solución 22

23. Astronauta trabajando en el «Hubble»

Durante la reparación del telescopio Hubble, una astronauta se dispone a reemplazar dos paneles solares cuyos marcos se han curvado.



a) Al empujar los paneles deteriorados en el espacio exterior, experimenta un impulso. **¿En qué sentido?**

b) La masa de la astronauta es m_a=60 kg y la del panel m_p=80 kg. Supón que ambos están inicialmente en reposo respecto al telescopio. Si la astronauta empuja el panel y este gira con respecto al telescopio a una velocidad lineal de 0,3 m/s. **¿Cuál es la velocidad final de la astronauta?**

Nota.- Durante esta operación la astronauta está sujeta con una cuerda a la nave espacial; para nuestro cálculo, supondremos que la cuerda permanece floja.

Ver solución 23

24. Fuerzas en una caída libre

¿Has probado alguna vez a hacer caída libre? Aunque no te hayas atrevido tus conocimientos de física te deben permitir responder a esta pregunta.

Durante la caída tu cuerpo experimenta dos fuerzas (como se indica en la figura): el peso (**P=mg**) y la resistencia del aire, **R**, que aumenta con la velocidad.

¿Cómo varía la fuerza neta durante la caída?

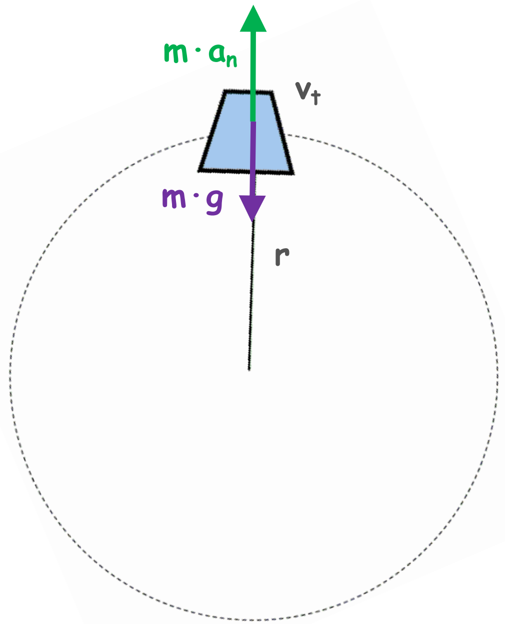
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) La fuerza neta sobre ti va disminuyendo.
b) A medida que la velocidad aumenta la aceleración disminuye.
c) A partir del momento en el que R iguala a mg la velocidad ya no varía.
d) mg y R no son nunca fuerzas de acción y reacción.

Ver solución 24

11. Un cubo en órbita: solución

El agua, como cualquier otro objeto en la Tierra, está sometido a la aceleración de la gravedad vertical y dirigida hacia abajo. Además, por estar dando vueltas, el agua experimenta una **centrifugación**, una aceleración (**$a_n = v_t^2/r$**) perpendicular a la trayectoria y dirigida hacia afuera.
Así, en el punto superior de la trayectoria (ver figura) ambas aceleraciones (y fuerzas) se oponen y, si la velocidad es suficiente, la aceleración centrífuga puede compensar e incluso superar a la de la gravedad.



Por lo tanto, cuando **$m \cdot g = m \cdot a_n$** tendremos que el valor mínimo de velocidad será:

$$v_t^2 = r \cdot g \rightarrow v_t = (r \cdot g)^{1/2}$$

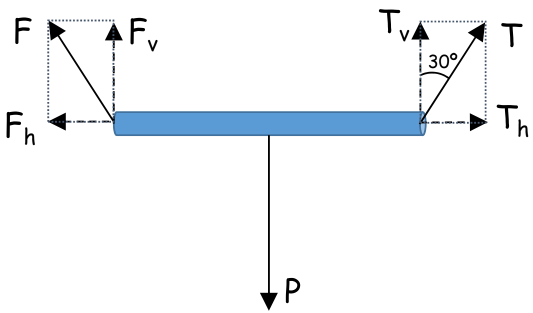
Vídeo Experimento: https://youtu.be/v8bJO7IEuPQ

Ver enunciado 11

12. Barra rígida y dinamómetro: solución

Para resolver el problema hemos de darnos cuenta de que la barra se encuentra en equilibrio y tanto las fuerzas como los pares de fuerzas que actúan sobre ella deben compensarse.

En la izquierda de la barra llamaremos **F** a la fuerza que soporta la bisagra y en la parte derecha **T** a la tensión que actúa en el muelle del dinamómetro. Realizando la descomposición de fuerzas tenemos:



a) Equilibrio de fuerzas (la barra no se desplaza)

$$P = 100 = F_v + T_v$$

$$F_h = T_h$$

b) Equilibrio de pares de fuerzas (la barra no rota) medidos respecto a la bisagra y suponiendo una longitud L:

$$100 \cdot L/2 = T_v \cdot L$$

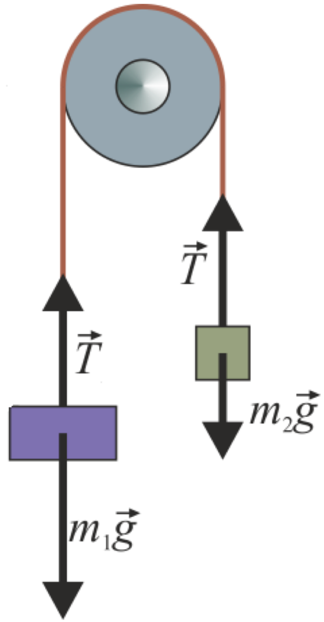
De la segunda expresión obtenemos que T_v= 50 N de forma que **T =** 50/cos(30º) = $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ N**= 57,7 N**

Nota: Además $F_h = T_h = \frac{50\sqrt{3}}{3}$= 28,9 N y, como T_v= 50 N, podemos obtener también F_v= 50 N

Ver enunciado 12

13. Aceleración en polea simple: solución

Para obtener la aceleración haremos un análisis de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. Como la cuerda es inextensible y despreciamos su masa y la de la polea, las únicas fuerzas que se tienen que considerar son: la tensión de la cuerda (**T**) y el peso de las dos masas ($\mathbf{m_1 \cdot g}$ y $\mathbf{m_2 \cdot g}$).



Suponemos $\mathbf{m_1 > m_2}$. La aceleración de los dos bloques tiene el mismo módulo (cuerda inextensible), pero signos diferentes, ya que uno se mueve hacia abajo y el otro hacia arriba

Aplicamos la segunda ley de Newton a m_1:

$$T - m_1 \cdot g - = -m_1 \cdot a$$

Haciendo lo mismo con m_2:

$$T - m_2 \cdot g - = m_2 \cdot a$$

Combinando ambas ecuaciones encontramos fácilmente

$$a = (m_1 - m_2) \cdot g / (m_1 + m_2)$$

Ver enunciado 13

14. Ciclista en un velódromo: solución

En el dibujo se muestran las fuerzas que actúan sobre el ciclista cuando rueda sin rozamiento por la zona de peralte.

Para un radio de curvatura r ha de cumplirse que la resultante de las fuerzas sea perpendicular a la pista:

$$\tan(\alpha)=v^2/(r\cdot g)$$

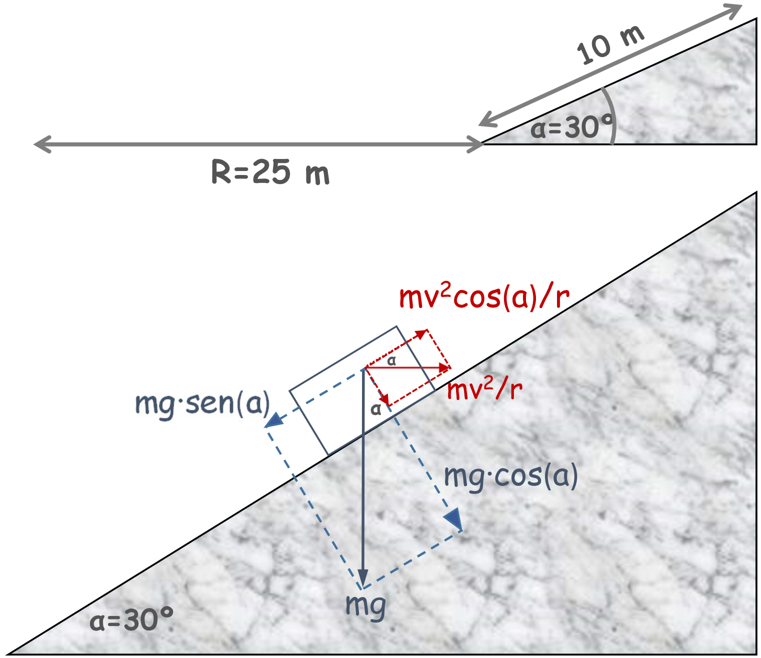
En la mitad de la pista el radio de curvatura es:

$$r=R+5\cdot\cos(\alpha)$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$v^2=r\cdot g\cdot\tan(\alpha)=[25+5\cdot\cos(30°)]\cdot 10\cdot\tan(30°)$$

v=47 km/h



Ver enunciado 14

15. Viajando en un trineo: solución

a) Solo intervienen fuerzas conservativas:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0 \Rightarrow v_f = 2\sqrt{Rg}$$

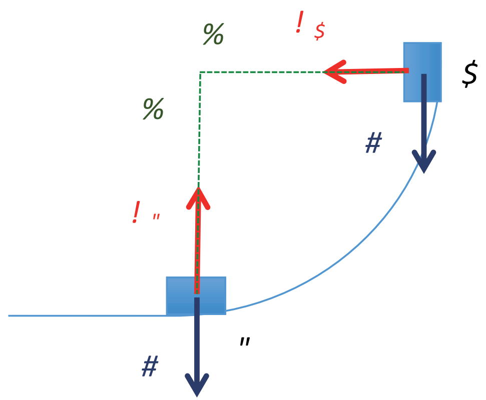
b) Segunda ley de Newton, para el trineo girando en f:

$$\Sigma F = ma_n \Rightarrow N_f - mg = m\frac{{v_f}^2}{R} \Rightarrow N_f = 5mg$$

c) Repitiendo el razonamiento anterior para el punto q:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0 \Rightarrow v_q = \sqrt{2Rg}$$

$$\Sigma F = ma_n \Rightarrow N_q = m\frac{{v_q}^2}{R} \Rightarrow N_q = 2mg$$



Ver enunciado 15

16. Subir escaleras para gastar el azúcar: solución

Si vuestro amigo sabe mucho de actividad física pero poco de Física espero que le hayáis ayudado y si no, aquí esta la solución.

(a) Trabajo $= F \cdot d = mg \cdot h = 69 \times 9{,}81 \times 22 \times 0{,}175 \times 5 = \mathbf{13030{,}13\ J}$

(b) Potencia $=$ **Trabajo/tiempo** $= 13030{,}13/50{,}8 = \mathbf{256{,}5\ W}$

(c) Energía $=$ **Trabajo/rendimiento** $= 13030{,}13/0{,}25 = \mathbf{52120{,}53\ J}$

Por fin, un terrón de azúcar tiene 3,90 g y suministra 3,87 kcal/g

(d) Nº de terrones=Energía/Energía aportada por un terrón

Nº $= (52120{,}53)/(3{,}9 \times 3{,}87 \times 1000 \times 4{,}18) =$ **0,826 terrones de azúcar**

Ver enunciado 16

17. El globo: solución

Como no actúan fuerzas externas, se conserva la cantidad de movimiento del sistema { globo + aire }

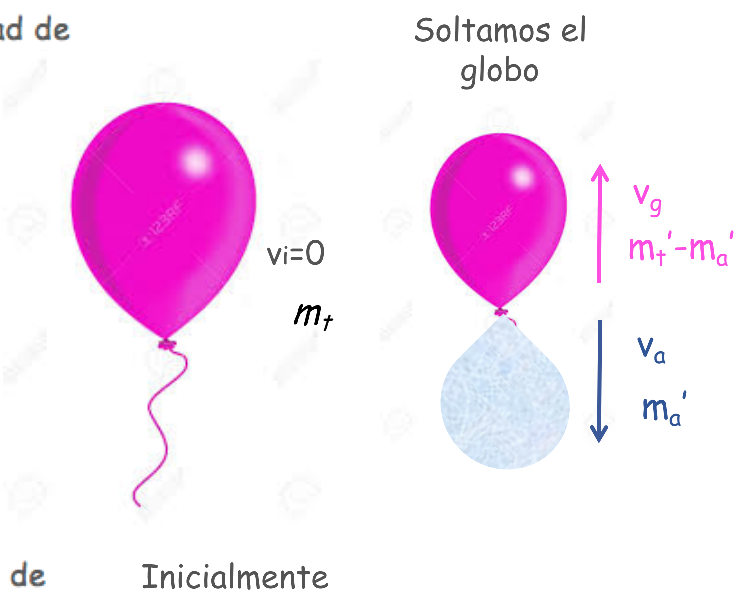
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m_t \cdot v_i = (m_t' - m_a')v_g + m_a'v_a$$

$$0 = (m_t' - m_a')v_g + m_a'v_a$$

$$v_g = -\frac{m_a'v_a}{(m_t' - m_a')} \Rightarrow v_g = -\frac{5 \cdot 4}{21 - 5} = -1.25 m/s$$

Luego el globo con el resto del aire salen a una velocidad de 1.25 m/s en dirección contraria al aire.



Vídeo Experimento: https://youtu.be/7KGsQ0EQ0tM

Ver enunciado 17

18. Mate de una jugadora del «Avenida»: solución

En el cambio de posición de la jugadora, desde el suelo hasta el aro, la variación total de la energía potencial consiste en energía potencial gravitatoria : $E_{pg}=m \cdot g \cdot \Delta h=m \cdot g \cdot y$
y energía almacenada por el aro desplazado, cuya energía potencial se supone análoga a la de un muelle:

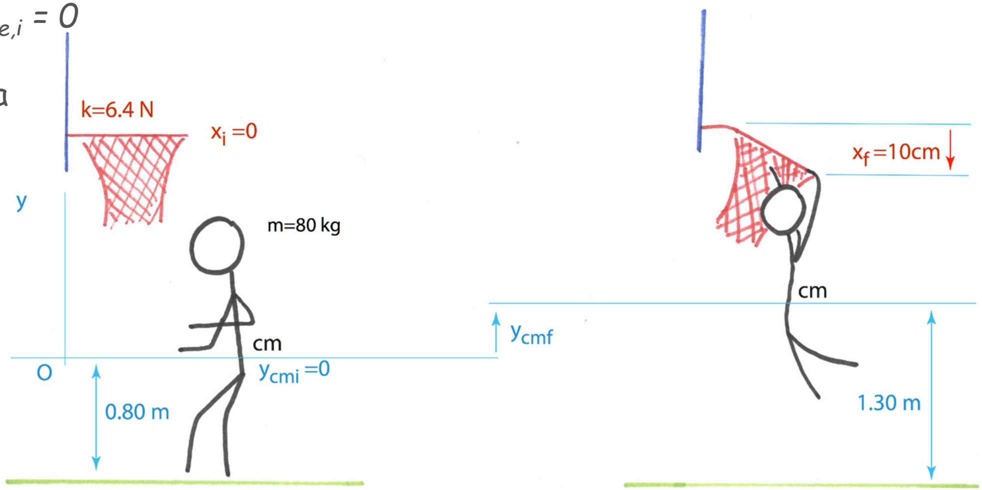
$$E_{pe}= kx^2/2$$

Inicialmente el punto de referencia donde la energía potencial es 0, para 0,8 m sobre el suelo, y la jugadora no ha tocado el aro, luego: $E_{pg,i} + E_{pe,i} = 0$

En la situación final, considerando la altura del centro de masas como (1,30-0,80)m, será:

$$E_f=E_{pg,f}+E_{pe,f}=m \cdot g \cdot y_{cm,f} + kx_f^2/2$$

$$\Rightarrow \mathbf{E_f = 424\ J}$$



Ver enunciado 18

19. Galletas sobre cinta trasportadora: solución

a) Como la masa que debe transportar la cinta aumenta con el tiempo habrá que realizar una fuerza adicional $\boldsymbol{F'}$. Dicha fuerza vendrá dada por la 2ª ley de Newton:

$$\boldsymbol{F'} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}\,v = 0{,}750\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \times 0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \boldsymbol{= 0,60\ \mathrm{N}}$$

b) La potencia adicional que debe suministrar el motor que mueve la cinta es

$$\boldsymbol{P'} = F' \cdot v = \frac{dm}{dt}\,v^2 = 0{,}6\ \mathrm{N} \cdot 0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \boldsymbol{= 0,48\ \mathrm{W}}$$

c) El ritmo al que varía la energía cinética del sistema es

$$\boldsymbol{\frac{dE_c}{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}0{,}8^2 \cdot 0{,}750 \boldsymbol{= 0,24\ \mathrm{W}}$$

Así pues, solo la mitad de la potencia suministrada por el motor se invierte en aumentar la energía cinética, el resto se pierde por fricción. De hecho, si el motor está realizando una fuerza constante, pero no hay aceleración, es porque hay rozamiento en el sistema.

Ver enunciado 19

20. Rozamiento empujando un bloque: solución

Para responder, lo único que necesitamos es recordar la segunda ley de Newton y aplicarla en la dirección horizontal.

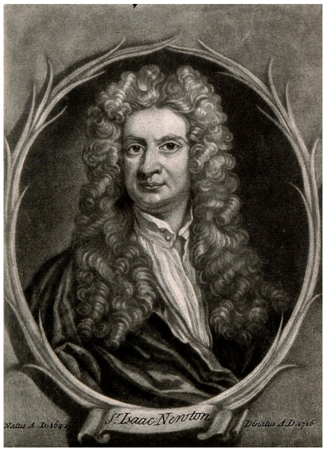
$$\Sigma \vec{F_x} = m\vec{a}$$

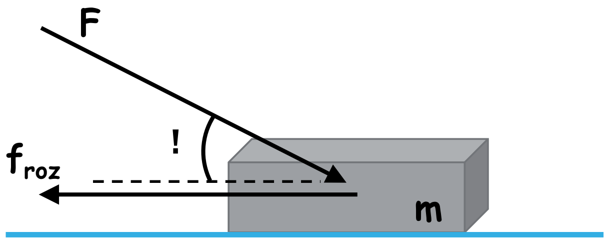
$F_x - f_{roz} = ma$

$F \cdot \cos(\beta) - f_{roz} = ma$

$f_{roz} = F \cdot \cos(\beta) - ma$

La respuesta correcta es la (c)





Ver enunciado 20

21. «Patrulla Águila»: solución

a) En el punto más bajo N es la fuerza normal que hace el asiento sobre el piloto y que, por tanto, la fuerza que siente el piloto es la fuerza de reacción a esta, es decir, con signo contrario. Por lo tanto, el piloto experimenta una fuerza hacia abajo igual al doble de su peso.

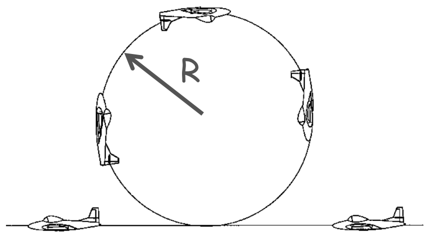
$$N - P = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N = \frac{mv^2}{R} + P = 2P$$

Se tiene entonces que

$$\frac{mv^2}{R} = P = mg \Rightarrow \frac{v^2}{R} = g$$

En el punto más alto el peso y la fuerza normal tienen el mismo sentido:

$$N + P = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boldsymbol{N} = \frac{mv^2}{R} - P \boldsymbol{= 0}$$



Por tanto, en el punto más alto el piloto tiene sensación de ingravidez.

b) Se tiene que:

$$\frac{v^2}{R} = g \Rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{gR} = \mathbf{98,0\ m/s = 353\ km/h}$$

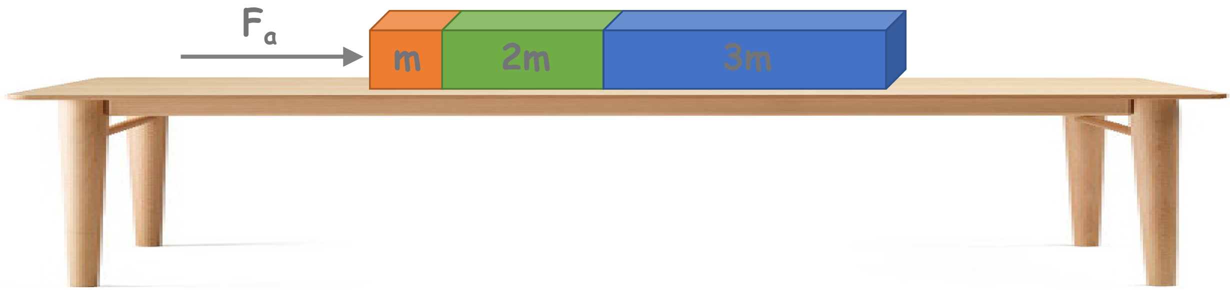
Ver enunciado 21

22. Bloques adyacentes: solución

La respuesta viene de la mano de la segunda ley de Newton. La fuerza aplicada produce una aceleración sobre el sistema completo de los bloques: $F_a=m\cdot a=(m+2m+3m)\cdot a=6m\cdot a$
Por lo tanto, todos experimentan la misma aceleración. Ahora usamos esta aceleración, analizando cada bloque como sistema independiente, para calcular la fuerza entre cada bloque.

$F_m=m\cdot a$ con $a= F_a/(6m)$ → $\mathbf{F_m=F_a/6}$
$F_{2m}=2m\cdot a$ con $a= F_a/(6m)$ → $\mathbf{F_{2m}=F_a/3}$
$F_{3m}=3m\cdot a$ con $a= F_a/(6m)$ → $\mathbf{F_{3m}=F_a/2}$

Por tanto, la fuerza neta sobre el bloque 3m es tres veces mayor que la fuerza neta sobre el bloque de masa m. **Respuesta (d)**



Ver enunciado 22

23. Astronauta trabajando en el «Hubble»: solución

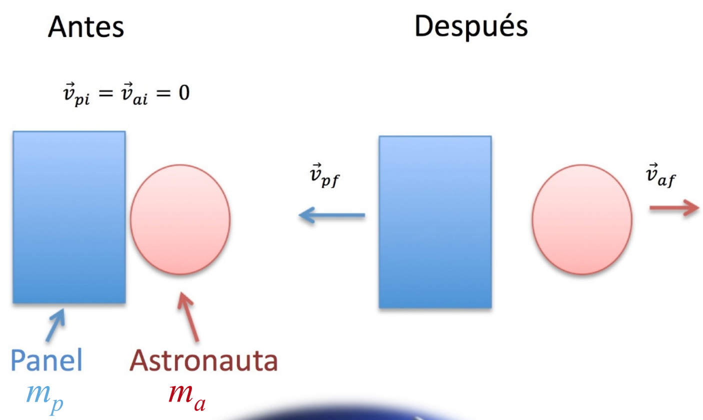
a) Al empujar los paneles deteriorados en una determinada dirección, la astronauta experimenta un impulso **en la misma dirección y sentido opuesto**, debido a la Tercera Ley de Newton.

b) Como no actúan fuerzas externas, se conserva la cantidad de movimiento del sistema total {panel + astronauta}

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

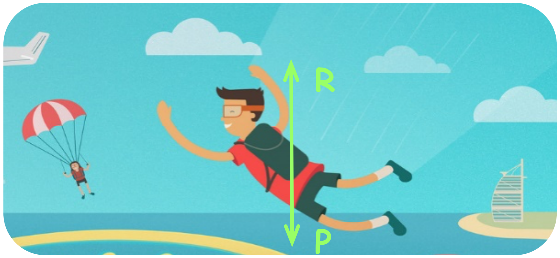
$$0 = m_{pf} \cdot v_{pf} + m_{af} \cdot v_{af}$$

$$v_{af} = -\frac{80 \cdot 0.3}{60} = -0.4m/s$$



Ver enunciado 23

24. Fuerzas en una caída libre: solución



Típicamente, en los problemas de caída desde una altura pequeña se desprecia la fuerza de rozamiento y, por tanto, se obtiene que la velocidad es creciente en la caída.

Sin embargo, para caida desde grandes alturas es necesario tener en cuenta la resistencia del aire, que suele ser modelizada como una fuerza proporcional a la velocidad o a su cuadrado. En este caso, a medida que el cuerpo cae y se incrementa su velocidad, aumenta la fuerza de rozamiento R y, por tanto, **la fuerza neta** (y la aceleración) **disminuye**. **Cuando la fuerza de rozamiento iguala al peso, la fuerza neta es nula (la aceleración también)** y, por lo tanto, a partir de ese momento el cuerpo se mueve con velocidad constante denominada **velocidad límite**.

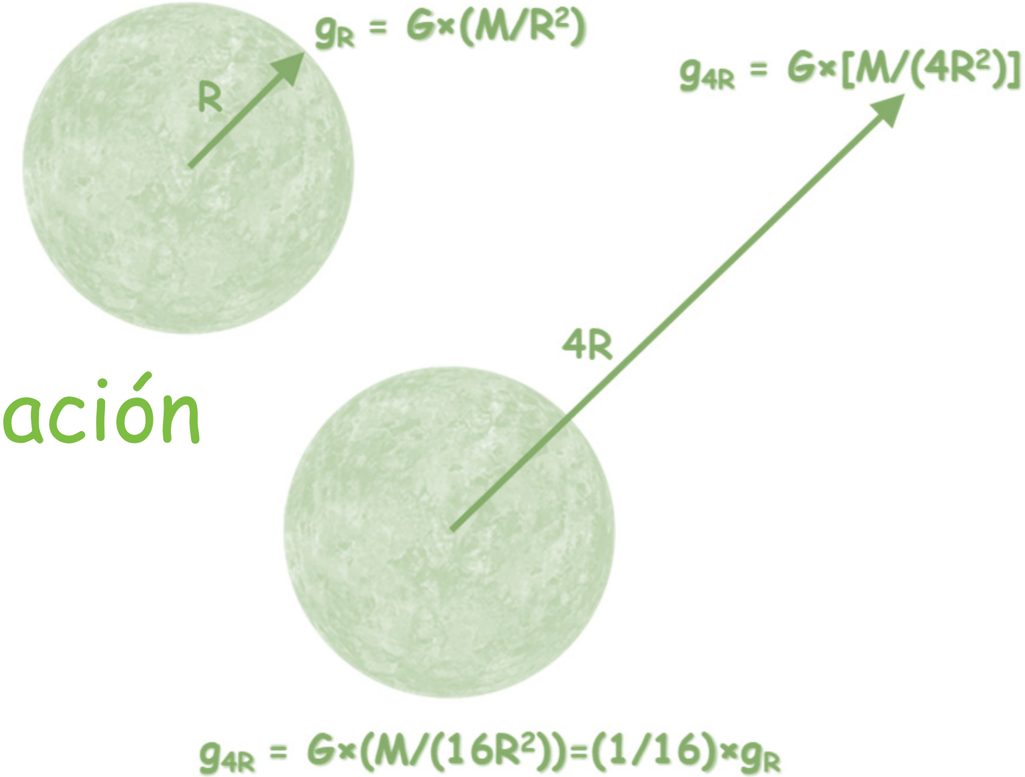
Por otra parte, la tercera ley de Newton de acción-reacción se refiere a fuerzas sobre dos cuerpos diferentes, mientras que en este caso ambas fuerzas actúan sobre ti.

Por tanto, **todas son verdaderas**.

Ver enunciado 24

ÍNDICE

Retos

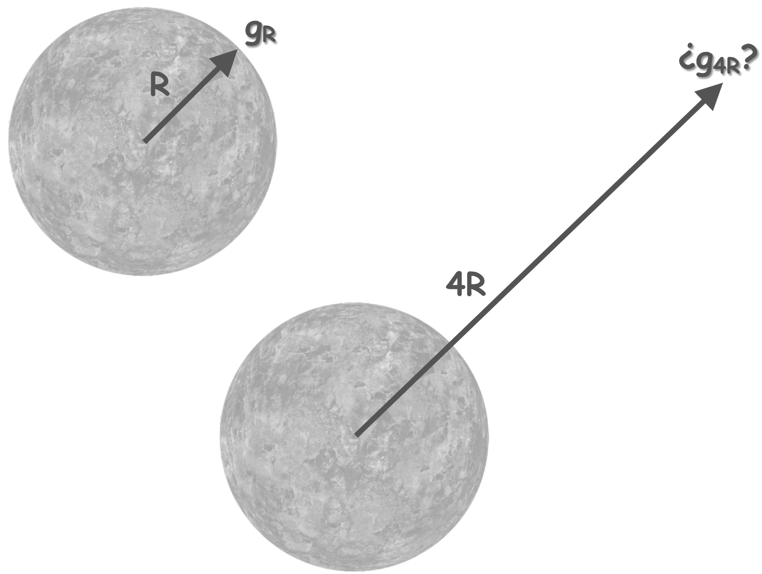


Gravitación

25. Gravedad a 3R

Sea un planeta de radio **R**. En su superficie una masa experimenta una aceleración g_R debida a la gravedad del planeta.

A una altura de 3R sobre la superficie del planeta, ¿cuál será la aceleración gravitatoria?



a	b	c	d	e
$g_R/3$	$9g_R$	$g_R/16$	$g_R/9$	$3g_R$

Ver solución 25

26. Campo gravitatorio

Verdadero o falso. Razona la respuesta a partir de la **ecuación** correspondiente.

a) Cuando una masa se mueve en la dirección del campo gravitatorio disminuye su energía potencial.

b) Es posible mover una masa en un campo gravitatorio sin realizar trabajo (y por tanto sin que varíe su energía potencial).

Ver solución 26

27. «Chateaux en Espagne»

La figura representa un cuadro del pintor surrealista belga René Magritte, titulado "Chateaux en Espagne" (Castillos en el aire). En este cuadro vemos una roca levitando sobre el mar.

a) ¿Sería posible que, tal como se representa en el cuadro, la roca parezca fija sobre la vertical de un punto de la superficie terrestre (es decir, sin cambiar su posición respecto a la Tierra)?

b) ¿Dónde y a qué altura tendría que estar situada la roca para que esto sucediera?

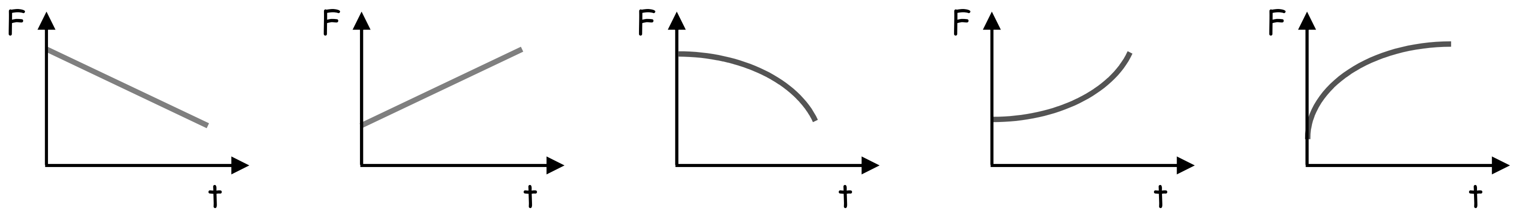
Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, $M_{tierra} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg y $R_{tierra} = 6400$ km

Ver solución 27

28. Esferas en la Estación Espacial Internacional

Un astronauta está en la ISS (Estación Espacial Internacional) y decide hacer un experimento. En cierto instante deja caer, es decir, abandona en reposo dos pequeñas esferas de forma que puedan flotar una junto a la otra.

¿Qué gráfica representa mejor la fuerza entre ambas esferas en función del tiempo, suponiendo que no están sometidas a ningún otro tipo de interacción**?**



(a) (b) (c) (d) (e)

Ver solución 28

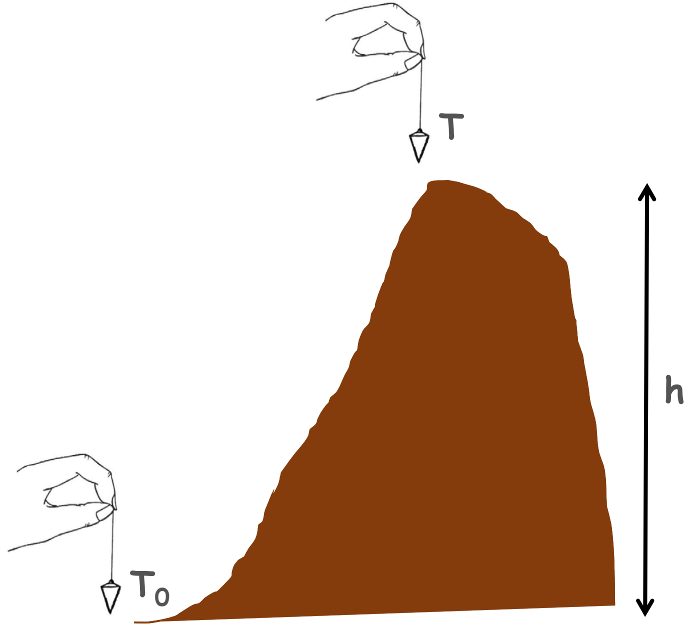
29. Adivinando la altura de una montaña con un péndulo

¿Has pensado que si dispones de un péndulo y ganas de caminar puedes calcular la altura **h** de una montaña?

Imagina que el péndulo tiene un período $\mathbf{T_0}$ en un punto sobre la superficie de la Tierra, al pie de una montaña.

Si asciendes a la cumbre y mides con el mismo péndulo el período, este es **T**.

Con estos datos y conocido el radio de la Tierra R_T, se puede determinar la altura **h** a la que has subido. **¿Puedes dar la solución?**



Ver solución 29

30. «El Principito»

Un astronauta (que podría ser "El Principito") de 100 kg de masa (incluido el traje) está en la superficie de su asteroide de forma esférica, con 2,40 m de diámetro y densidad media 2,20 g/cm^3.

a) **Determina con qué velocidad debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide.**

b) **¿Cómo se denomina rigurosamente esta velocidad?**

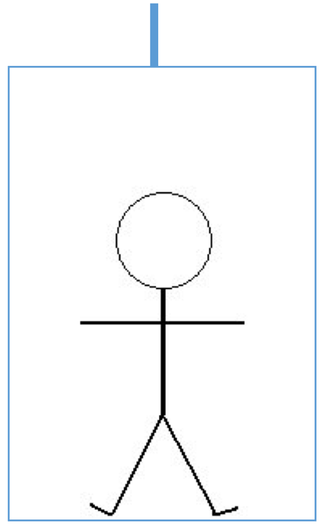
c) El astronauta carga ahora con una mochila de masa 40 kg, **¿le será más fácil salir del planeta? ¿Por qué?**

Como sabes, la constante de Gravitación Universal es $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Ver solución 30

31. Pesarse en un ascensor

Sobre una báscula de baño situada en el interior de un ascensor se coloca un estudiante cuya masa es de 60 kg. **Se desea saber el peso que marca la báscula** cuando:



- **a** El ascensor sube con velocidad constante.
- **b** El ascensor sube con velocidad creciente a razón de 2 m/s^2.
- **c** El ascensor está en reposo.
- **d** El ascensor baja con velocidad creciente a razón de 3 m/s^2.
- **e** El ascensor baja con velocidad decreciente a razón de 1 m/s^2.
- **f** El ascensor cae libremente pues se ha roto la sujeción.

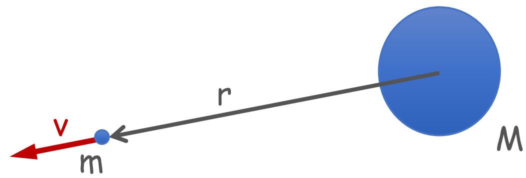
En todos los cálculos usar $g=10\ m/s^2$

Ver solución 31

ÍNDICE

32. Agujero negro

Dos masas esféricas M y m cuyos centros están separados una distancia r se encuentran inicialmente en reposo.



a) ¿Qué energía cinética mínima debería suministrase a m para que escape del campo gravitatorio creado por M? ¿Cuál sería la velocidad v en el instante inicial (ver dibujo)?

Como sabes, la velocidad de la luz ($c=3 \cdot 10^8$ m/s) es la velocidad a la que se propagan las ondas electromagnéticas en el vacío y es también la velocidad máxima que se puede alcanzar. De hecho, las partículas con masa nunca pueden alcanzarla y su velocidad es siempre menor.

Por otro lado, un "agujero negro" es el estado final de una estrella de gran masa cuyo campo gravitatorio es tan intenso que nada puede salir de él, ni siquiera las ondas electromagnéticas.

b) ¿Cómo puedes relacionar la velocidad de escape con los "agujeros negros"?

c) ¿Qué radio máximo debería tener el Sol para que fuera un agujero negro?

Datos: Masa del Sol=$1{,}99 \times 10^{30}$ kg

- Fuente: "Física. Cuestiones y problemas resueltos. Acceso a Universidad y Escuelas Técnicas" A. Martínez y J. Manera. Ed. Bruño

Ver solución 32

33. Escape de un satélite

Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra, con velocidad orbital v. Si se quiere que escape desde esa órbita hasta el infinito:

a) ¿En qué factor habría que aumentar su velocidad?

b) ¿Cómo depende ese incremento del radio de la órbita?

c) Para poder escapar, ¿en qué factor debe aumentar su energía cinética?

Ver solución 33

34. Tierra *vs* Luna

Si la gravedad en la Luna es, aproximadamente, 1/5 de la gravedad media terrestre, g_T, calcula:

a) **La relación entre la velocidad que adquiere una masa al llegar al suelo en ambos medios, en caída libre desde una altura h.**

b) **Las pesas (masas) que se necesitan para equilibrar en la Luna un cuerpo que en la Tierra se equilibra con 23,15 gramos.**

Ver solución 34

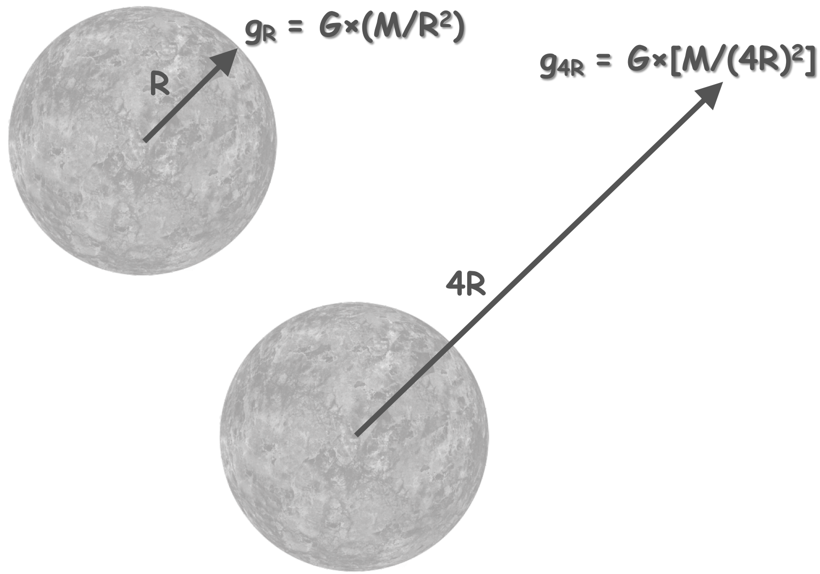
25. Gravedad a 3R: solución

La respuesta correcta es la (c).

Utilizando la ley de gravitación Universal de Newton sabemos que la aceleración de la gravedad creada por un cuerpo de masa **M** a una distancia **r** del centro de masa es:

$$g = G\times(M/r^2)$$

a	b	c	d	e
$g_R/3$	$9g_R$	$g_R/16$	$g_R/9$	$3g_R$



$$g_{4R} = G\times(M/(16R^2))=(1/16)\times g_R$$

Ver enunciado 25

26. Campo gravitatorio: solución

La energía potencial de una masa **m** en un campo gravitatorio creado por una masa **M** es:

$$U = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

siendo **r** la distancia entre las dos masas. Por lo tanto, la energía potencial aumenta al aumentar la distancia entre las masas.
La dirección del campo gravitatorio en el punto donde se encuentra la masa **m** corresponde a la recta que une las dos masas, y tiene el sentido desde la masa **m** a la masa **M**.

a) FALSO Si la masa **m** se mueve en la dirección del campo puede moverse en el **sentido del campo**, con lo que **r** disminuye y la energía potencial disminuye, o en **sentido contrario al campo**, con lo que **r** aumenta y la energía potencial aumenta.

b) VERDADERO Si se mueve la masa **m** en la superficie de una esfera de radio **r**, la distancia a M no varía y, por tanto, la energía potencial tampoco. Estas superficies se denominan **EQUIPOTENCIALES**.

Ver enunciado 26

27. «Chateaux en Espagne»: solución

a) Para que una masa m parezca fija sobre la superficie de la Tierra (que está girando) debe girar alrededor de esta con la misma velocidad angular. La órbita que describe se dice que es una órbita geoestacionaria. Luego, en principio, sí sería posible.

b) La velocidad angular de rotación de la Tierra es:

$$\omega = 2\pi/24h = 7{,}27 \cdot 10^{-5} rad/s$$

Suponemos que la masa m realiza una órbita circular:

$$\Sigma\vec{F} = m\overrightarrow{a_n} \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{(\omega r)^2}{r} \Rightarrow r = \sqrt[3]{G\frac{M}{\omega^2}}$$

Operando, el valor del radio es r = $42{,}2 \cdot 10^3$ km.

Y, la altura h sobre la superficie de la Tierra será: h = r – R = $35{,}8 \cdot 10^3$ km

Ver enunciado 27

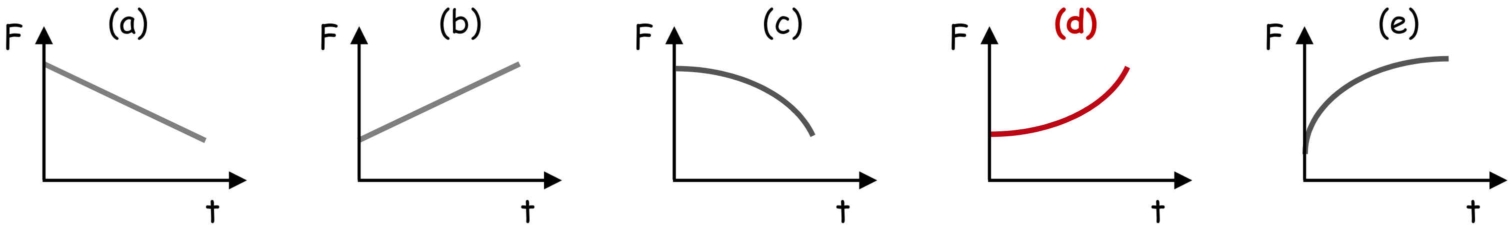
28. Esferas en la Estación Espacial Internacional: solución

La fuerza gravitatoria es atractiva. La fuerza gravitatoria aumenta a medida que disminuye la distancia entre las esferas, creciendo la fuerza muy apreciablemente. Por tanto, descartamos las figuras a) y c).

Sabemos que la fuerza depende del inverso del cuadrado de la distancia, por lo que se descarta la relación lineal de la figura b).

La diferencia entre las figuras d) y e) es el comportamiento para tiempos muy largos. Mientras que en e) la fuerza representada tiende a un valor constante para tiempo infinito, en d) la fuerza se va haciendo cada vez mayor, situación que está más de acuerdo con el hecho de que, a medida que disminuye la distancia, la fuerza es más y más grande. Podemos concluir que la dependencia con el tiempo es la indicada en la Figura (d). De esta forma las esferas se acercan con una aceleración que va en aumento.

La respuesta correcta es la (d).



Ver enunciado 28

29. Adivinando la altura de una montaña con un péndulo: solución

- Período de un péndulo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- Al pie de la montaña:

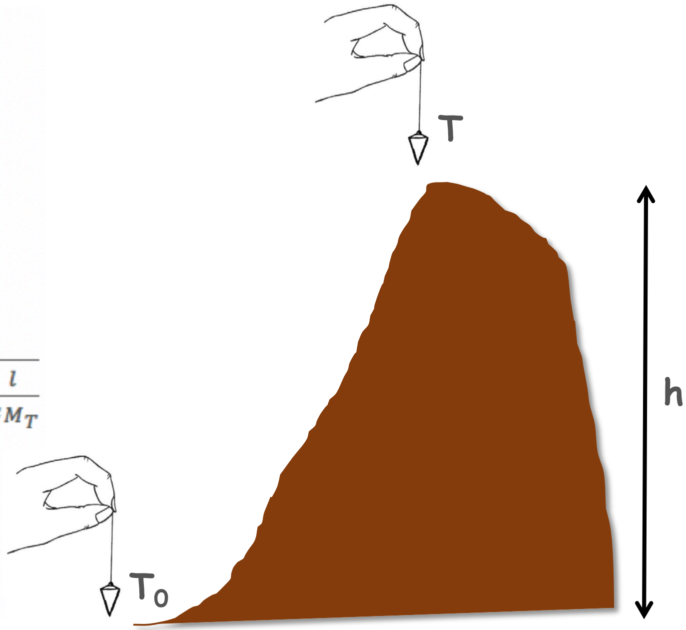
$$g_0 = G\frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{GM_T}{R_T}^2} = 2\pi R_T\sqrt{\frac{l}{GM_T}}$$

- En la cumbre de la montaña:

$$g_h = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{GM_T}(R_T+h)^2} = 2\pi(R_T+h)\sqrt{\frac{l}{GM_T}}$$

- Por lo tanto

$$\frac{T}{T_0} = \frac{R_T+h}{R_T} \Rightarrow h = \left(\frac{T}{T_0}-1\right)R_T$$



Ver enunciado 29

30. «El Principito»: solución

a) Para que el astronauta "escape" del asteroide supondremos que se marcha al infinito, donde no siente su campo gravitatorio. Por el Principio de Conservación de la Energía Mecánica:

$$\Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\, m{v_e}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Conocida la densidad el asteroide y su diámetro se determina su masa:

$$M = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho = 15.92 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}$$

Por lo tanto:

$$v_e = \sqrt{\frac{8G\pi(D/2)^2\rho}{3}} = 1{,}33\ m/s$$

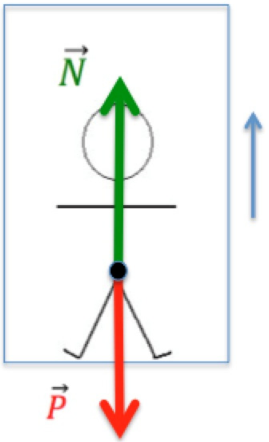
Nota.- Como la masa del asteroide es mucho mayor que la del astronauta, se puede comprobar numéricamente que la velocidad con que retrocede el asteroide es despreciable.

b) Que se denomina velocidad de escape

c) Si lleva colgada una mochila con 40 kg, la velocidad de escape es la misma, pues esta no depende de la masa del astronauta, solo de la del planeta. Sin embargo, necesitará más energía para adquirirla.

Ver enunciado 30

31. Pesarse en un ascensor: solución



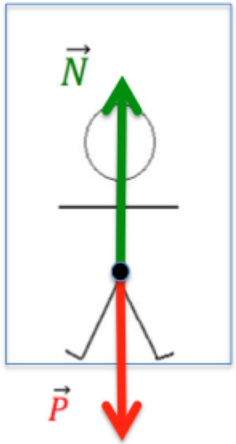
a) $N_a - P = 0$

$N_a = P = 600$ N

b) $N_b - P = m \cdot a$

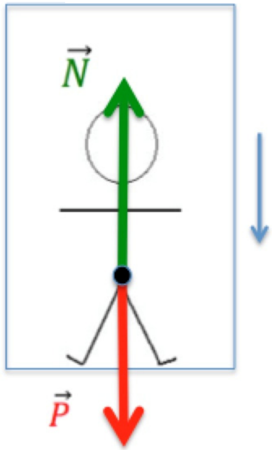
$N_b = m(g+a)$

$N_b = 720$ N



c) $N_c - P = 0$

$N_c = P = 600$ N



d) $P - N_d = m \cdot a$

$N_d = m(g-a)$

$N_d = P = 420$ N

e) $P - N_e = m \cdot a$

$N_e = 660$ N

f) $P - N_f = m \cdot g$

$N_f = m(g-g)$

$N_f = 0$ N

Solución.- Para resolver este problema, hay que tener en cuenta que la fuerza que experimenta la báscula tiene el mismo módulo que la normal. Y por la tercera ley de Newton, igual dirección y sentido contrario.

Ver enunciado 31

32. Agujero negro: solución

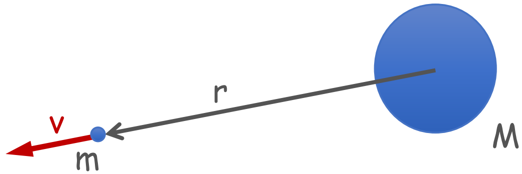
a) La energía cinética mínima será aquella que le permita llegar al infinito con velocidad nula. Como la energía mecánica se conserva, se tiene que

$$0 = E_c + E_{pg} \Rightarrow \boldsymbol{E_c} = -E_{pg} = -\left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right) = G\frac{M \cdot m}{r}$$

La velocidad inicial será:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_e^2 \Rightarrow \boldsymbol{v_e} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2GM}}{\boldsymbol{r}}}$$

que se conoce con el nombre de *velocidad de escape*.



b) Podemos considerar que un agujero negro corresponde a una masa en la que la velocidad de escape es superior a la de la luz, con lo cual nada puede salir de su campo gravitatorio.

Nota: esta interpretación del agujero negro no tiene en cuenta la Relatividad General y, por tanto, es sólo una aproximación.

c) Para que el Sol fuera un agujero negro su radio tendría que ser, como máximo, aquel para el que la velocidad de escape desde su superficie fuera c. Por tanto:

$$\sqrt{\frac{2GM_\odot}{R}} > c \Rightarrow \boldsymbol{R} < \frac{\boldsymbol{2GM_\odot}}{\boldsymbol{c^2}} = \mathbf{2,95\ km}$$

Ver enunciado 32

33. Escape de un satélite: solución

a) Para un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra debido a la atracción gravitatoria de ésta se puede escribir:

$$\sum F = ma \Rightarrow \frac{G\,M\,m}{r^2} = \frac{mv_{orb}^2}{r} \rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

La velocidad de escape desde esa órbita está determinada por el hecho de que su energía total se haga 0:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow -\frac{G\,M\,m}{r} + \frac{mv_{esc}^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{G\,M\,m}{r} = \frac{mv_{esc}^2}{2} \rightarrow v_{esc} = \sqrt{2\frac{GM}{r}}$$

Comparando ambas expresiones se ve que: $\boldsymbol{v_{esc} = \sqrt{2}v_{orb}}$

b) Y además, **este resultado es independiente del radio de la órbita.**

c) Por ello, para poder escapar, **la energía cinética** del satélite que escapa **debe aumentar en un factor 2.**

Ver enunciado 33

34. Tierra *vs* Luna: solución

a) Tanto en la Tierra como en la Luna, en la caída libre, se conserva la energía mecánica del sistema:

$$\Delta E=0 \rightarrow \Delta E_C+\Delta E_p=0 \rightarrow mv^2/2=mgh$$

- en la Tierra $v_T^2=2g_Th$
- en la Luna $v_L^2=2g_Lh=2g_Th/5$

$$\frac{V_T}{V_L}=\sqrt{5}$$

Luego, cayendo desde la misma altura, la velocidad con que llega al suelo en la Luna v_L es $\sqrt{5}$ veces menor que en la Tierra v_T.

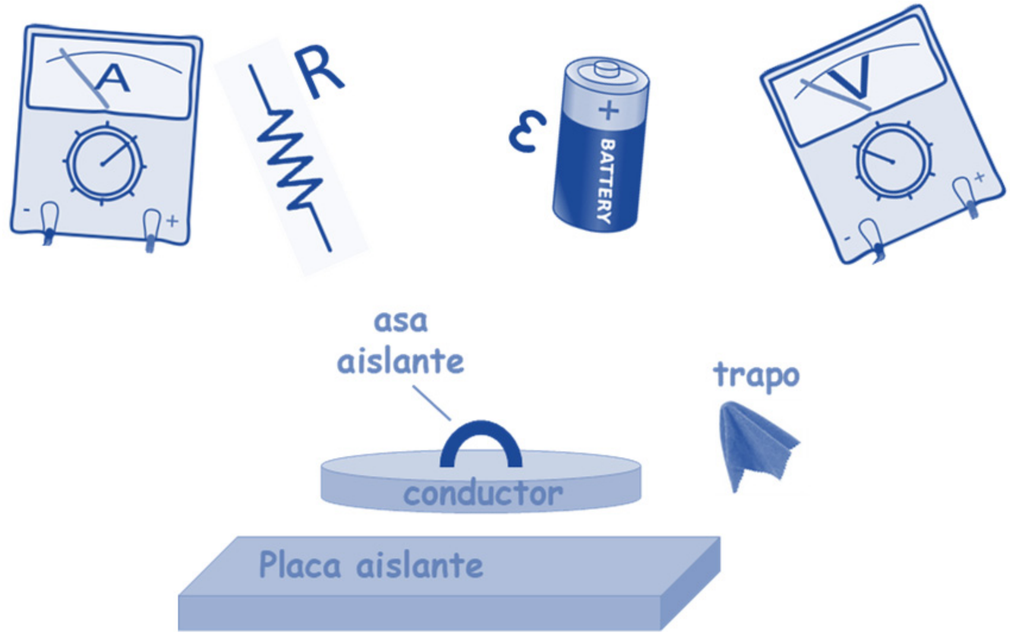
b) La masa de las pesas en la Luna ha de ser igual que la masa del cuerpo en la Tierra, y como la masa no varía con el lugar, **se necesitan pesas de 23,15 g.**

Ver enunciado 34

ÍNDICE

Retos

Electricidad y magnetismo



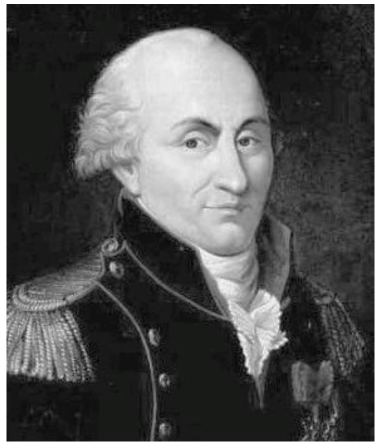
ÍNDICE

35. Ley de Coulomb

Dos cargas q_1 y q_2 del mismo signo están situadas en los puntos x=0 y x=d respectivamente.

1) ¿En qué punto hemos de colocar una tercera carga q_0 del mismo signo que las anteriores para que la fuerza que experimente sea nula?

2) Calcula en ese caso el cociente entre las fuerzas F_1 y F_2 que experimentan las cargas q_1 y q_2. Comenta el resultado.

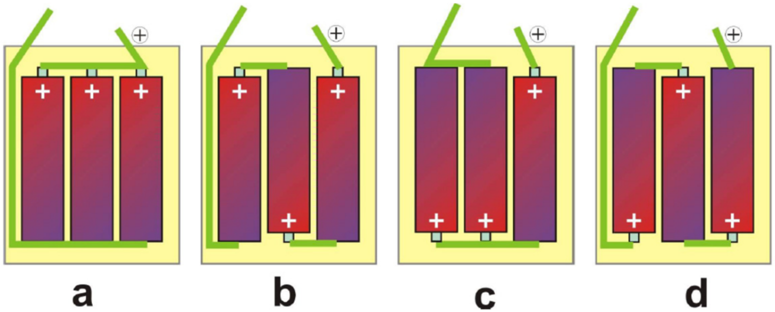


Charles Augustin Coulomb

Ver solución 35

36. Pilas para juguetes de Reyes

Como es día 7 de enero, después de Reyes, imagina que vas a casa de tu primo pequeño y en su juguete preferido se le ha agotado la pila de petaca, que suministraba 4,5 V. Sin embargo, tus tíos tienen al menos tres pilas de 1,5 V. Discurriendo toda la familia proponen realizar los siguientes montajes con las pilas de 1,5 V, para crear una batería equivalente a la de petaca y que el niño siga jugando.



¿Cuál de esos montajes les proporcionará 4,5 V?

Adaptación de http://bohr.inf.um.es/miembros/rgm/s+mf/

Ver solución 36

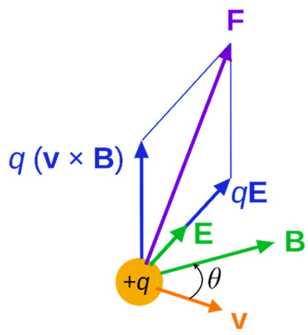
37. Dirección y sentido de E y B

Una partícula de carga **q** y masa **m** se lanza con velocidad **v** a una región del espacio en la que se sospecha que pueden existir campos eléctrico (**E**) y magnético (**B**). Se observa que la partícula recorre esa zona sin alterar su dirección.

¿Cuáles podrían ser las direcciones y sentidos de los campos E y B con respecto a la velocidad v de la partícula?

¡Hay varias soluciones posibles!

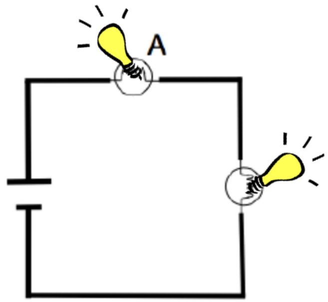
(En el razonamiento se despreciará la acción gravitatoria)

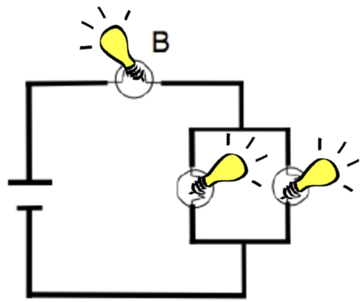


Ver solución 37

38. ¿Qué bombilla luce más?

Se tienen dos baterías idénticas y 5 bombillas también idénticas. ¿Qué puedes decir acerca del brillo de las bombillas **A** (dibujo izquierdo) y **B** (dibujo derecha)? **¿Cuál luce más y cuánto?**

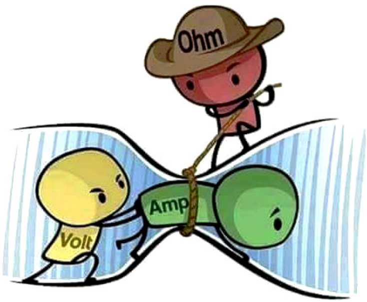


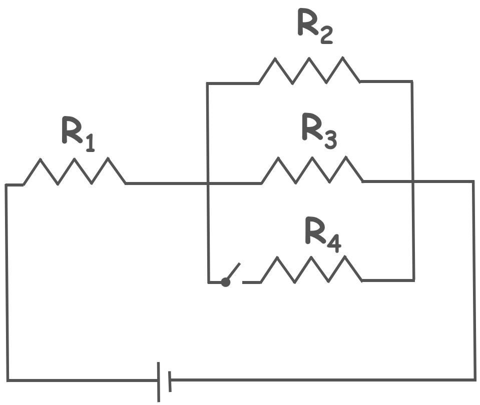


Ver solución 38

39. Mítica Ley de Ohm

Sea un circuito con resistencias en serie y paralelo tan sencillo como el mostrado en la figura. Cuando cerramos el interruptor, añadiendo la resistencia R_4, **la intensidad de corriente en la resistencia R_1** ¿(a) aumenta, (b) disminuye, (c) se mantiene igual o (d) se necesitan más datos para contestar?





Ver solución 39

40. Pelos de punta con Van de Graaff

Van de Graaff inventó el generador que lleva su nombre en 1931, con el propósito de producir una diferencia de potencial muy alta (del orden de 20 millones de voltios). De forma resumida, diremos que, gracias a un motor, dos poleas y una correa, se consigue acumular, por rozamiento sobre una esfera hueca, la carga eléctrica transportada por la cinta.

Si quieres saber más detalles visita el siguiente link:

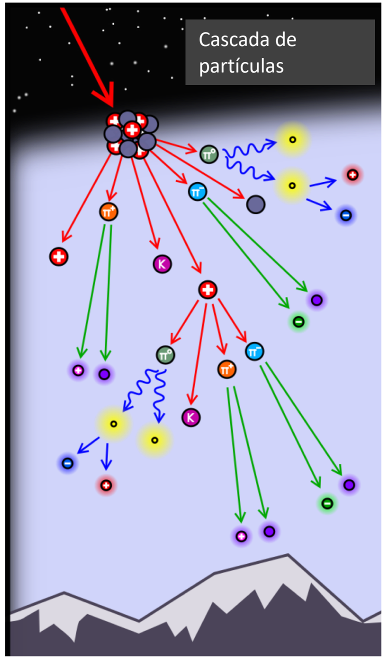
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/graaf/graaf.htm

En la figura puedes observar lo que sucede cuando alguien eléctricamente aislado del suelo toca un generador de Van de Graaff.

¿A qué es debido que, al tocar el generador de Van de Graaff, los pelos de la chica se pongan de punta?

Ver solución 40

41. Lluvia de muones



El muon es una partícula elemental parecida al electrón: misma carga eléctrica (q_{μ}=-1,6·10^{-19} C) pero masa mayor (m_{μ}=207·m_e). En la atmósfera los muones se producen cuando los rayos cósmicos chocan con las moléculas que componen el aire.

Un muón llega a la parte superior de la atmósfera siguiendo una trayectoria dirigida hacia el centro de la Tierra. En su camino se encuentra dos nubes muy grandes, paralelas a la superficie de la Tierra y separadas por una distancia (vertical) de 500 m. Entre las nubes existe un campo eléctrico de intensidad constante. El muón entra en la nube superior con energía 6,4·10^{-13} J.

¿Cuál debe ser el vector campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) para que el muón se pare justo al llegar a la nube inferior?

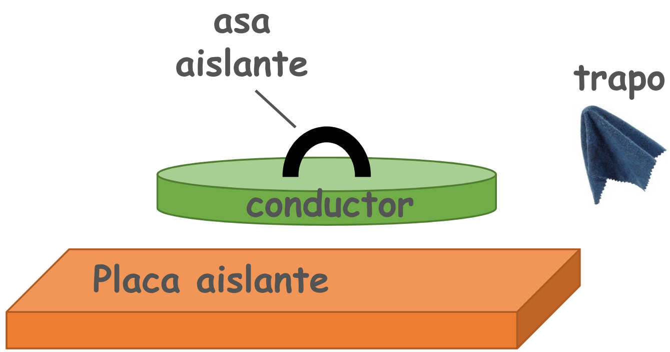
P-41

Ver solución 41

42. Electricidad estática con un trapo

Sea una placa aislante que frotamos con un trapo proporcionándole carga. Posteriormente, tomamos una placa conductora agarrándola por un asa aislante y la colocamos justo encima de la placa aislante hasta que se toquen. Tocamos el conductor con el dedo, es decir, lo conectamos a tierra y finalmente, levantamos la placa conductora de nuevo agarrándola por su asa aislante. **¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?**

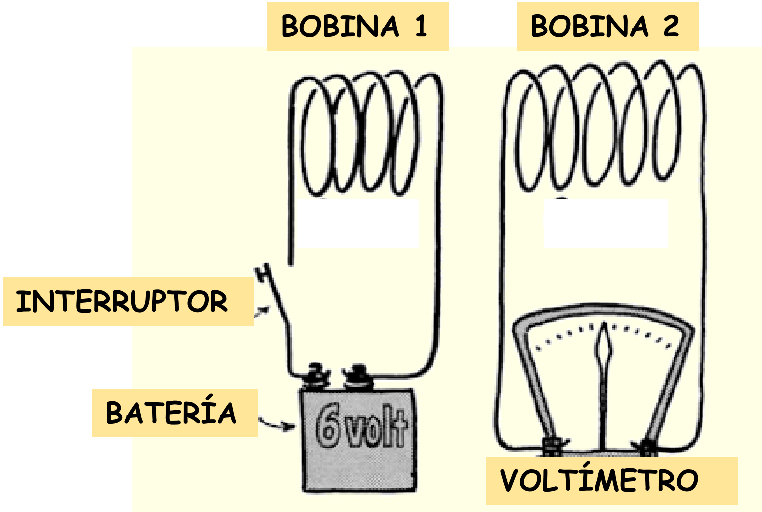
(a) El trapo no tiene carga.
(b) El trapo y la placa conductora se repelen.
(c) El trapo y la placa conductora se atraen.
(d) Después de tocar la placa con el dedo, el conductor no tiene carga.
(e) Después de tocar la placa con el dedo, la placa aislante no tiene carga.



Ver solución 42

43. Ley de Faraday

Se tienen dos circuitos como en la figura. En el primero, se tiene una pila conectada a una bobina y el paso de corriente está regulado mediante un interruptor. En el circuito 2 solo hay una bobina conectada a un voltímetro.



a) ¿Qué sucede en el voltímetro cuando se cierra el circuito 1?

b) ¿Cuánto marca el voltímetro cuando el circuito 1 se mantiene cerrado?

c) ¿Y cuando el circuito 1 se abre?

Adaptado de Hewitt https://www.arborsci.com/next-time-questions

Ver solución 43

44. Reflexionando sobre Electromagnetismo

Preparándose la EBAU, Marcos y Elena han dedicado la tarde a repasar temas de Electromagnetismo. Mientras hacían un descanso, tomando un refresco, Marcos le cuenta a Elena sus dudas:

¿Puede existir un universo en que haya cargas eléctricas pero no campos eléctricos?

Elena se ha quedado pensativa y, relacionándolo con el resto de la asignatura, le ha surgido otra pregunta:

¿Puede existir un universo en que haya campos eléctricos pero no cuerpos eléctricamente cargados?

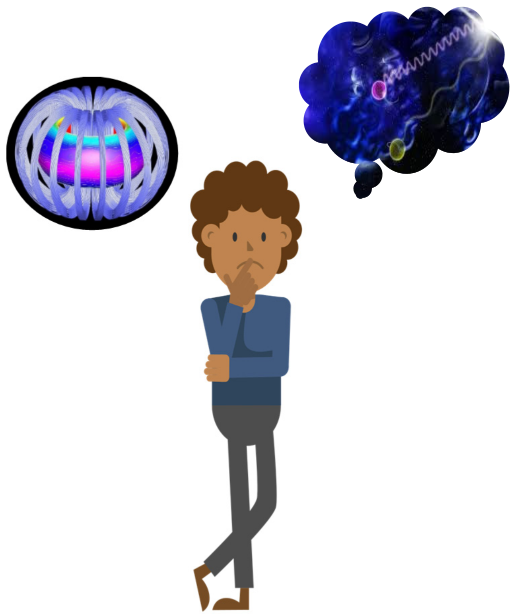
¿Qué opinas?

a) En los dos casos la respuesta es afirmativa

b) En los dos casos la respuesta es negativa

c) La primera es afirmativa y la segunda negativa

d) La primera es negativa y la segunda afirmativa

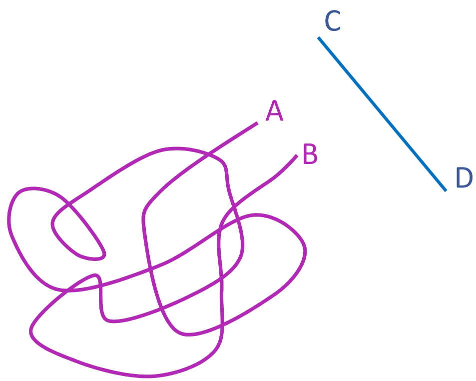


Ver solución 44

45. Fuerzas entre cables

Imagina que tienes dos trozos de cable. Uno de ellos es largo y está enroscado, con varias vueltas y sin forma definida. El otro es un segmento corto y recto. Cuando en el cable largo pasa corriente del extremo A hacia el B (ver dibujo) y en el corto pasa del extremo C al D, el cable largo atrae al corto. **¿Cómo cambiará la fuerza sobre el cable corto cuando se invierte el sentido de la corriente en ambos cables?**

a) Será repulsiva
b) Será atractiva, igual que al principio
c) Se anulará
d) Será de dirección perpendicular a la original



Ver solución 45

35. Ley de Coulomb: solución

1) Para que la fuerza resultante sea nula, q_0 debe experimentar dos fuerzas de igual dirección pero sentidos opuestos. Por lo tanto, al ser del mismo signo, debo colocarla **en un punto intermedio situado en la recta que une las dos cargas q_1 y q_2.**

$$\sum \vec{F}=0 \rightarrow k\frac{q_1 q_0}{x^2}=k\frac{q_2 q_0}{(d-x)^2} \rightarrow \left(\frac{d-x}{x}\right)^2=\frac{q_2}{q_1} \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}}$$

(se observa que para $q_1 = q_2$ se tiene el punto medio y que en otro caso siempre estará más cerca de la carga menor y más lejos de la más grande)

2) q_1 y q_2 experimentan fuerzas que, eligiendo q_0 también del mismo signo, se suman:

$$F_1 = kq_1\left[\frac{q_0}{x^2}+\frac{q_2}{d^2}\right]$$

$$F_2 = kq_2\left[\frac{q_0}{(d-x)^2}+\frac{q_1}{d^2}\right]=kq_2\left[\frac{q_0}{x^2\left(\frac{q_2}{q_1}\right)}+\frac{q_1}{d^2}\right]=kq_1\left[\frac{q_0}{x^2}+\frac{q_2}{d^2}\right]$$

$$\boldsymbol{\frac{F_2}{F_1}=-1}$$

Coinciden en módulo pero sentido opuesto

$$\boldsymbol{\sum \vec{F}=0}$$

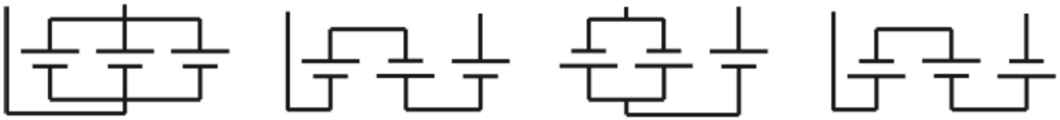
Acción y reacción

Ver enunciado 35

36. Pilas para juguetes de Reyes: solución

El voltaje de varias pilas iguales conectadas en serie es la suma de los voltajes individuales, mientras que si están conectadas en paralelo, el del conjunto es igual al de una de las pilas.

El esquema circuital de los montajes propuestos es:



a b c d

i. En el montaje **(a)** las tres pilas están en paralelo, por lo que V_{total} = 1,5 V
ii. En **(b)** las tres pilas están en serie. V_{total}=4,5 V con el polo positivo en el borne de la derecha.
iii. En **(c)** dos pilas están en paralelo entre sí, con lo que dan 1,5 V en total, y en serie con la otra. El montaje daría 3 V.
iv. En **(d)** las pilas están en serie y la V_{total} es 4,5 V, pero el borne positivo es el de la izquierda.

Por tanto, el montaje correcto es b).

Ver enunciado 36

37. Dirección y sentido de E y B: solución

Recordemos que la fuerza ejercida por el campo eléctrico es $\mathbf{F_e}=q\cdot\mathbf{E}$ y la correspondiente al magnético es la fuerza de Lorentz $\mathbf{F_m}=q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Vemos que $\mathbf{F_m}$ es perpendicular a **v** y a **B**, dado que se trata de un producto vectorial.

1) Evidentemente, una primera solución sería que **E y B fueran nulos**. No habría fuerza alguna y tendríamos un movimiento uniforme.

2) Otra posibilidad es que solo hubiera campo **E paralelo a v**, que aceleraría (o frenaría) la partícula, pero manteniendo su dirección.

3) Otra es que solo hubiera campo **B paralelo a v**, y por tanto la fuerza de Lorentz también sería nula.

4) Otra alternativa sería que **E y B fueran paralelos y además paralelos a v**.

5) Y por fin que **E y B fueran perpendiculares entre sí** y además perpendiculares a **v**. Si se cumple que $\mathbf{E}=-\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ podemos asegurar que ambas fuerzas se compensan y tendríamos también movimiento uniforme.

Ver enunciado 37

38. ¿Qué bombilla luce más?: solución

Como son bombillas idénticas tendrán la misma resistencia, que podemos llamar **R**. En el montaje ***A*** tenemos dos en serie por lo que la resistencia total es 2R. Por el contrario el montaje B hay dos en paralelo con una tercera en serie, por lo que la resistencia total es igual 1,5R. Como las baterías son idénticas, aplicando la ley de Ohm la corriente será mayor en el montaje que menor resistencia oponga por lo que **la bombilla B lucirá más**. El brillo vendrá dado por la potencia disipada en esa bombilla que es igual a la intensidad I al cuadrado por el valor de la resistencia de la bombilla R (ley de Joule): $P=I^2R$

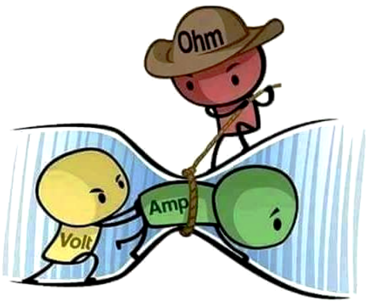
$P_A=I^2R=(V/2R)^2R=\mathbf{0{,}25}\ V^2/R$ $\qquad$ $P_B=I^2R=(V/1.5R)^2R=\mathbf{0{,}44}\ V^2/R$

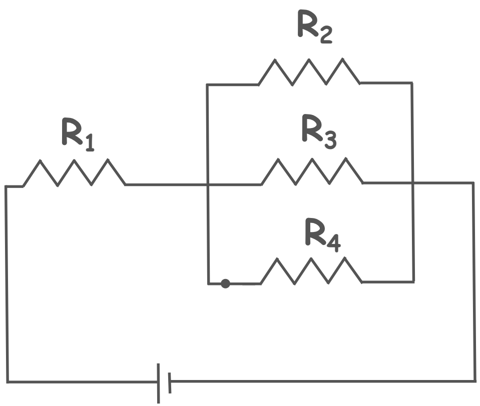
Ver enunciado 38

39. Mítica Ley de Ohm: solución

Recordando que la resistencia equivalente de varias resistencias en paralelo es siempre más pequeña que la más pequeña de ellas, es fácil darse cuenta que, al añadir R_4 a la rama de resistencias en paralelo, disminuimos su equivalente, es decir R_{234} ($R_2//R_3//R_4$) < R_{23} ($R_2//R_3$).

Como R_1 está en serie con R_{234} el trabajo del señor Voltio será más eficaz, pues el señor Ohm estrujará menos al señor Amperio: **La corriente en R_1 aumenta.**



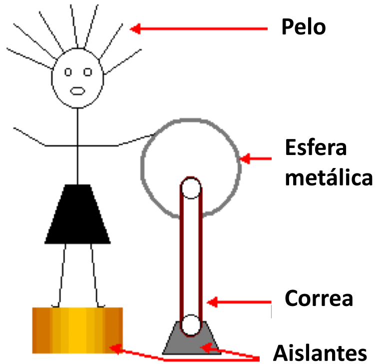


Ver enunciado 39

40. Pelos de punta con Van de Graaff: solución

En los conductores la carga eléctrica se sitúa en la superficie, luego en el *Generador de Van de Graaff* está depositada en la parte exterior de la esfera.

Inicialmente la chica es un cuerpo eléctricamente neutro. Al conectar el generador, la carga se acumula en la parte exterior de la esfera. Cuando la chica, que está aislada respecto al suelo, la toca, la carga pasa a través de sus manos y ella adquiere carga. El cuerpo humano es conductor y, por tanto, esta carga se distribuye por toda la superficie de su cuerpo. En particular, se distribuye en sus pelos, que, al tener carga del mismo signo y ser ligeros, se repelen entre sí.



La experiencia nos permite observar el aspecto radial del campo eléctrico.

Precaución.- Esta experiencia debe realizarse siempre bajo las indicaciones y supervisión de un experto.

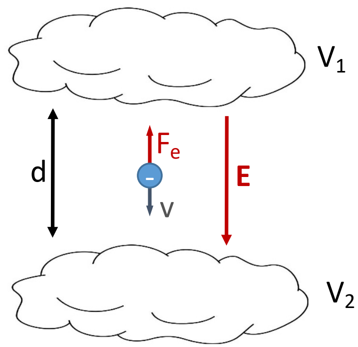
Ver enunciado 40

41. Lluvia de muones: solución

En un campo eléctrico la energía total, suma de energía cinética (T) y potencial eléctrica (E_p), se conserva.

$T_1 + E_{p1} = T_2 + E_{p2} \rightarrow q(V_2-V_1) = T_1-T_2$

El enunciado dice que, aunque el muon entra con energía cinética alta, después de atravesar el campo eléctrico su energía cinética es nula.
Por tanto, el muon se frena por efecto del campo eléctrico, luego dicho campo está dirigido verticalmente hacia abajo.



El campo eléctrico uniforme E creado entre las nubes (separadas una distancia d) está relacionado con la diferencia de potencial eléctrico V entre ellas según:

$E = (V_2-V_1)/d$

Por tanto: $T_1-T_2 = q(V_2-V_1) = q\,E\cdot d \rightarrow$ **$E = 6{,}4\cdot 10^{-13} /(500\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}) = 8000$ N/C**

El campo está **dirigido verticalmente hacia abajo.**

Ver enunciado 41

42. Electricidad estática con un trapo: solución

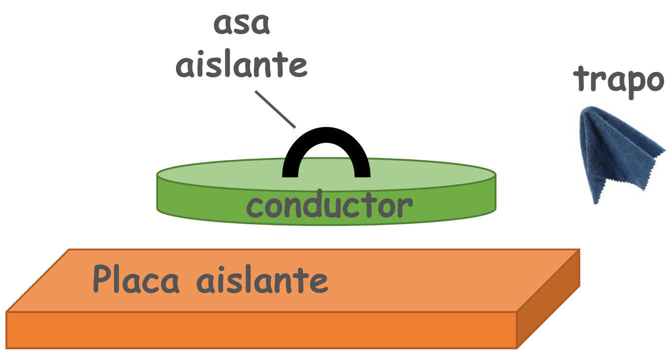
Para responder vamos a describir lo que va ocurriendo durante el proceso descrito.

Paso 1 → Conservación de la carga: al frotar la placa aislante con el trapo esta se carga, supongamos negativamente, quedando el trapo con carga del signo contrario, positiva en este caso.*

Paso 2 → Al colocar el conductor encima de la placa aislante, se redistribuyen las cargas en él. Como consecuencia de la repulsión de la carga negativa de la placa aislante, se colocan las positivas en la parte inferior y las negativas en la parte superior.

Paso 3 → Al tocar con el dedo el conductor permitimos que los electrones abandonen (yendo a tierra) la placa conductora dejándola cargada con signo positivo.

Paso 4 → Si acercamos la placa conductora (cargada positivamente) y el trapo (que también quedó con carga positiva) se repelerán. **Respuesta (b)**

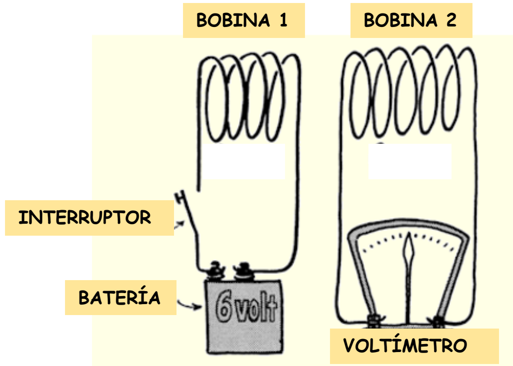


*El resultado es el mismo si la placa aislante se carga positiva y el trapo negativamente

Ver enunciado 42

43. Ley de Faraday: solución

Las cargas en movimiento generan un campo magnético, y la variación de este campo magnético produce una corriente eléctrica.



a) Cuando se cierra el circuito 1, se crea un campo magnético que pasa de valor 0 a un determinado valor constante. El flujo de este campo magnético en la superficie de la bobina 2 variará en el tiempo que pasa hasta que la corriente se estabiliza en la bobina 1 y en ese tiempo **se produce una corriente inducida en la 2.**

b) Cuando la intensidad de corriente en el circuito 1 es constante, no hay variación de flujo magnético en el circuito 2 y por lo tanto tampoco corriente en él. **El voltímetro marca 0.**

c) Cuando se abre el interruptor del circuito 1 **se genera en el 2 una corriente de sentido contrario** a la del apartado a)

Ver enunciado 43

44. Reflexionando sobre Electromagnetismo: solución

Siempre que hay cargas eléctricas, se producen campos eléctricos. De hecho, la única manera de detectar la carga eléctrica es por el campo eléctrico que crea, y su interacción con otros campos o cargas.

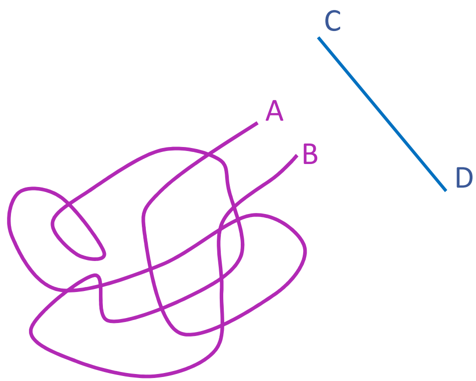
Sin embargo, un campo magnético variable puede dar lugar a un campo eléctrico, también variable y esta variación origina otro campo magnético… y así se van retroalimentando uno al otro. Este es el fundamento de las ondas electromagnéticas. Una vez generada una onda electromagnética, se puede extinguir la causa que la originó, pero la variación de los campos que la componen se mantiene.

Por tanto, **no pueden existir cargas eléctricas sin** generar **campos eléctricos**, pero **sí pueden existir campos eléctricos sin** que haya **cargas eléctricas.**

Ver enunciado 44

45. Fuerzas entre cables: solución

El campo magnético creado por el cable largo será muy complicado, pero cuando se invierte el sentido de la corriente el campo que se origina es exactamente igual que el inicial, pero de sentido contrario. Lo mismo sucede con el campo creado por el cable corto, de tal forma que la interacción entre los dos campos (y por tanto la fuerza entre los cables) no cambiará.
Luego, **la respuesta correcta es b):** si al principio los cables se atraían, cuando se cambia el sentido de la corriente en ambos, **continúan atrayéndose.**



Ver enunciado 45

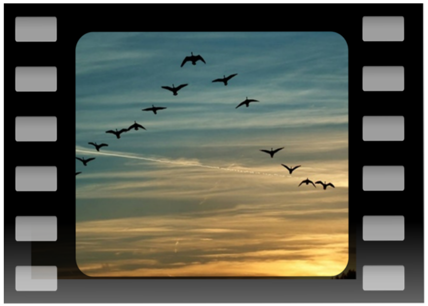
ÍNDICE

Retos

Miscelánea

46. Enfoque correcto

Paseando por la vereda del Tormes con tu cámara fotográfica tomas una fotografía, a **tamaño natural**, de una flor cuando la lente está a 20 cm de la película.



Un poco después oyes que una bandada de aves migratorias está volando muy alto, justo por encima de tu cabeza, y quieres hacerle una foto.

¿Cuál debe ser la distancia entre la lente y la película para fotografiarla?

Ver solución 46

47. «Selfie»

Seguro que te has hecho muchas fotos con un palo *selfie*. Imagina que una de ellas te la haces con el palo totalmente plegado.

Si a continuación te haces otra foto a una distancia doble que la anterior (con el palo *selfie* desplegado), en la foto que obtienes te verás:

(a) Más grande
(b) Más pequeña
(c) Igual de grande

Un rato después apagas la pantalla y usas el teléfono como un espejo plano. Al comparar las imágenes que obtienes colocando el móvil (espejo) a una distancia y al doble de ella, en este último caso te verás:

(a) Más grande
(b) Más pequeña
(c) Igual de grande

Ver solución 47

48. Refracción en un vaso de agua

Hoy te proponemos un experimento para que hagas con otro compañero.

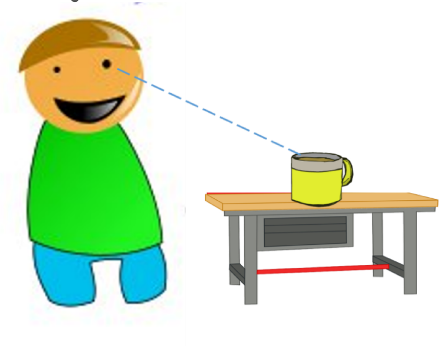
Necesitas un vaso de loza opaco, agua y una moneda de dos euros.

Primero debéis situar la moneda en el fondo del vaso, y no en el centro, sino tocando la pared lateral del vaso.

Tú te sitúas de pie en un punto fijo y tu amigo pone el vaso sobre una mesa, de forma que la moneda está dentro del vaso en el punto más alejado respecto de ti.

A continuación, va separando el vaso de ti, hasta el momento en que justo dejas de ver la moneda.

Sin cambiar esas posiciones, tu amigo va echando agua en el vaso.



¿Qué sucede?

Vamos a hacer cuentas:

- Supongamos que el vaso tiene 5,2 cm de diámetro ($2R$).
- Diámetro de la moneda (d): 2,6 cm.
- Índice de refracción del agua: 1,33.

¿Cuál es la altura del vaso si cuando empiezas a ver toda la moneda, el nivel del agua llega al borde? Compruébalo.

Ver solución 48

49. Imagen del sol refractada

Jugando con una esfera transparente de radio 5 cm, observas que se forma una imagen del sol en la superficie de la esfera opuesta al sol.

a) **¿Cuál es el índice de refracción de la esfera?**

b) **¿Dónde se forma la imagen del sol en una esfera del mismo material pero radio 10 cm?**

Dato: índice de refracción del aire n=1.

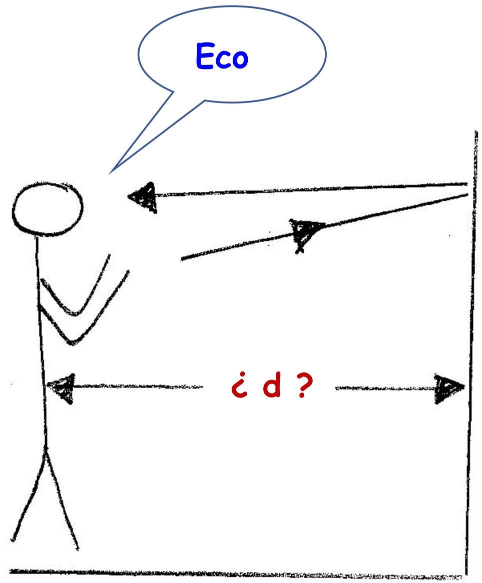
Ver solución 49

50. Eco

a) Como sabes, tu oído puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas en el intervalo de 20 Hz a 20000 Hz aproximadamente, **¿cuáles son las longitudes de onda en el aire que corresponden a estas frecuencias?**

b) Para poder distinguir dos sonidos nuestro oído tiene que recibirlos con, al menos, 0,1 s de diferencia, **¿cuál es la distancia d mínima a la que debes estar de una pared para que percibas el eco?**

Nota:
Como sabes, la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s



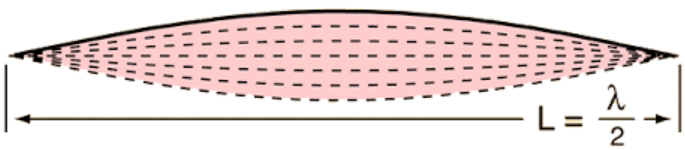
Ver solución 50

51. Ondas estacionarias en una guitarra

Tenemos una guitarra con una cuerda de 100 cm de longitud en la que hacemos sonar la nota musical "La", que corresponde a su frecuencia fundamental de 440 Hz.

1) ¿Cuánto tendría que medir la cuerda de una nueva guitara en la que, manteniendo la misma tensión, tuviéramos una frecuencia 2 veces mayor?

2) ¿En qué factor tenemos que aumentar o disminuir la tensión de esta nueva cuerda para recuperar la frecuencia inicial de la nota "La"?



Ver solución 51

52. Teléfono móvil

Imagina que unes tu teléfono móvil, de 100 g de masa, a un muelle para que oscile y lo colocas en el extremo de un pasillo. Programas el teléfono para que emita constantemente sonidos de frecuencia 800 Hz. Un amigo tuyo situado al otro lado del pasillo utiliza la **app DaTuner*** para medir la frecuencia y registra que los valores oscilan entre 797 y 803 Hz.

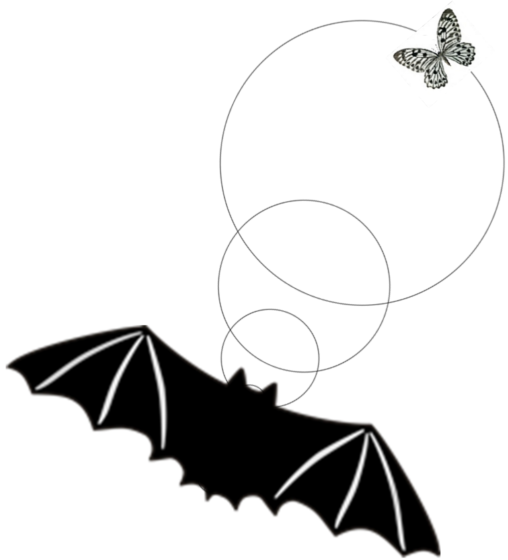
a) ¿Cuál es la velocidad máxima del teléfono?
b) ¿Cuál es la energía de vibración del sistema móvil-muelle?

Suponer la velocidad del sonido en aire 340 m/s

*DaTuner es una herramienta que se utiliza típicamente para afinar las guitarras

Ver solución 52

53. Murciélago, polilla y decibelios



El oído de las polillas tiene máxima sensibilidad para sonidos de frecuencia de 60 kHz (adaptada a la frecuencia de los chillidos de los murciélagos). Cuando el nivel de intensidad de los ultrasonidos producidos por el murciélago supera los 40 dB se activa el mecanismo de huida de la polilla.

1) ¿Qué longitud de onda tienen los ultrasonidos de 60 kHz?

2) Los ultrasonidos que emite un murciélago tienen nivel de intensidad de 80 dB a 10 cm de su cabeza **¿a qué distancia del murciélago reacciona la polilla?**

Dato: velocidad del sonido en aire: 340 m/s

Ver solución 53

54. Grifo goteando

Un grifo gotea sobre una superficie de agua a un ritmo de **80 gotas por minuto** y genera en el agua ondas circulares separadas **45 cm**.

¿A qué velocidad se propagan las ondas en la superficie del agua?

Suponiendo que la energía de las ondas permanece constante a medida que se propagan en la superficie, **¿cómo cambia la amplitud de las ondas a medida que nos alejamos del punto donde caen las gotas?**

Ver solución 54

55. Velocidad de la luz en Master Chef

¿Sabes cómo medir la velocidad de la luz con un horno microondas, una tableta de chocolate y una regla?

QUÉ NECESITAS

- Horno microondas.
- Un plato plano de unos 20 cm de diámetro y que se pueda usar en el microondas.
- Una tableta de chocolate (también sirven el regaliz rojo, una loncha de queso o nubes).
- Regla.

PROCEDIMIENTO

1. Quita el plato giratorio del microondas.
2. Pon el chocolate en el plato plano, mételo en el microondas y conéctalo unos 10 s a máxima potencia.
3. Verás que en la tableta aparecen zonas en que el chocolate se ha derretido. Mide la distancia entre el centro de dos de esas zonas consecutivas.

¿Cómo puedes calcular a partir de esa medida la velocidad de la luz?

AYUDA: la frecuencia de las microondas en la mayoría de los hornos es 2450 MHz (compruébalo en la placa de especificaciones del tuyo).

Ver solución 55

56. ¿Cuánto ha llovido?

Si durante una tormenta se recogen 25 L de agua en un recipiente plano de 1 m^2 **¿qué altura en mm alcanza el agua en dicho recipiente?**

Si has respondido a esa pregunta, ya sabes por qué los datos de precipitación se suelen dar en L/m^2 o mm.

Si llovió uniformemente en todo el territorio, ¿cuánta agua cayó en una superficie de 3×3 km^2?

Para hacernos una idea, si una piscina tiene dimensiones en metros de 2×15×25, **¿cuántas piscinas se pueden llenar?**

Y si un camión cisterna puede cargar con 30 Toneladas métricas, **¿cuántos camiones podemos llenar?**

Ver solución 56

57. Eficiencia energética

Como sabes bien, las antiguas bombillas de filamento incandescente (basadas en las ideas de Edison de finales del siglo XIX) van siendo sustituidas por otras de mayor rendimiento. Primero fueron reemplazadas por las lámparas de descarga (tubos fluorescentes) de bajo consumo y más recientemente por las de tipo LED (Light-Emitting Diode o diodo emisor de luz), con un rendimiento lumínico mucho mayor. Su eficacia luminosa se mide en lumen por vatio (lm/W) y representa la cantidad de potencia lumínica percibida (útil) con respecto a la potencia consumida.

Según la bibliografía reciente, una moderna bombilla incandescente (de halógeno) aporta aproximadamente 10 lm/W, una de descarga (fluorescente) 50 lm/W y una de tipo LED 90 lm/W. Si quieres iluminar una casa durante doce horas diarias y necesitas 18.000 lm, **¿sabrías calcular el coste anual de la energía eléctrica con cada uno de los tres tipos de bombilla?**

Nota: El precio de la energía eléctrica es aproximadamente de 0,15 €/kWh.

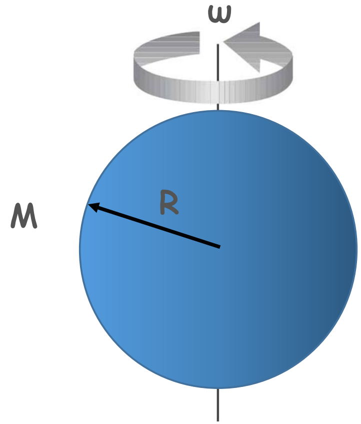
Ver solución 57

ÍNDICE

58. Colapso de una estrella en rotación

Una estrella de masa **M** y radio **R** rota con velocidad angular **ω**. Al cabo de miles de millones de años la estrella colapsa (debido a fuerzas internas) y adquiere un radio mucho menor pero manteniendo la misma masa.

¿Qué podrías decir acerca de las magnitudes velocidad de rotación ω, momento angular L, momento de inercia I, y energía cinética de rotación K, antes y después del colapso?

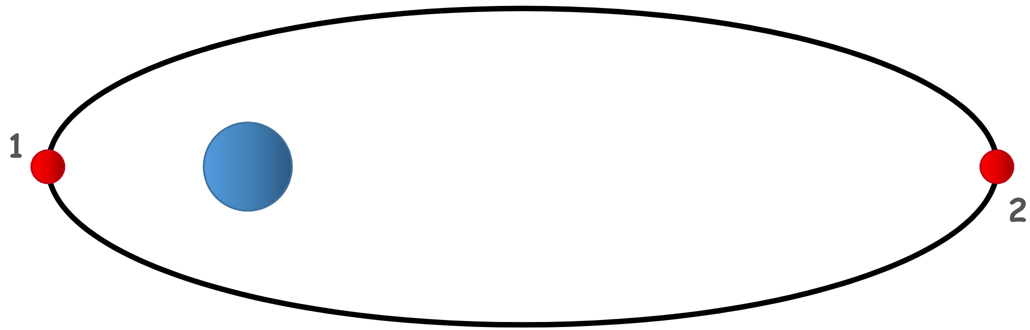


Ver solución 58

59. Momento lineal y angular

Un cometa orbita alrededor del un planeta con trayectoria elíptica como la de la figura.

¿Qué podrías decir acerca de las magnitudes vectoriales momento lineal p y momento angular L del cometa en las posiciones 1 y 2?



Ver solución 59

60. Eureka

Un cubo que está flotando en mercurio tiene sumergida la cuarta parte de su volumen (ver Figura 1). Si se agrega agua suficiente para cubrir el cubo (ver Figura 2) **¿qué fracción de su volumen quedará sumergida en el mercurio?**

Datos: $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $\rho_{\mathrm{agua}} = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

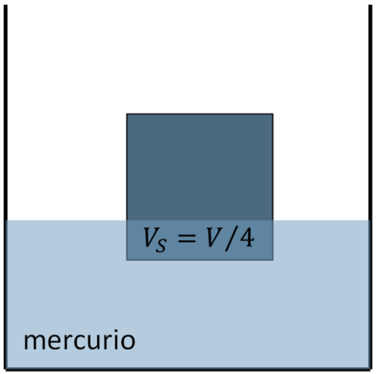


Figura 1

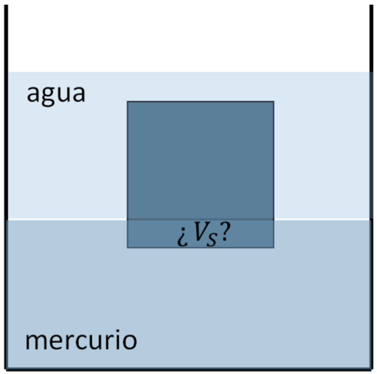


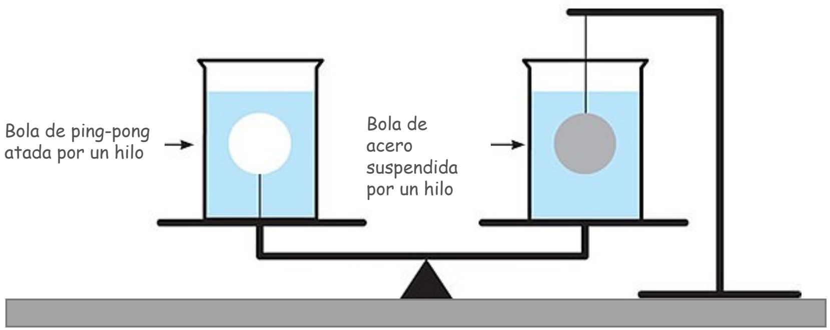
Figura 2

Ver solución 60

61. Bolas de ping-pong en una balanza

Sean dos vasos idénticos, llenos de la misma cantidad de agua y colocados en los platillos de una balanza, que obviamente estará equilibrada. A continuación introducimos en el vaso de la izquierda una pelota de ping-pong atada con un hilo a la base del recipiente. En el vaso de la derecha se sumerge una bola de acero, del mismo volumen que la de ping-pong, pero en este caso colgada por otro hilo de un soporte externo, como se muestra en la figura.

¿Hacia qué lado se inclinará la balanza: derecha, izquierda o se mantiene en equilibrio?



Adaptado de https://physics.stackexchange.com/questions/130688/which-way-does-the-scale-tip

Ver solución 61

ÍNDICE

62. Globo de helio en un cohete

La presión en una nave espacial es 1 atm y la temperatura 20°C. Dentro de la nave, una astronauta tiene un globo lleno de helio que mantiene sujeto al suelo mediante un cordel .

a) Antes de despegar la nave, **¿cuál es la tensión de la cuerda?**

b) Cuando el cohete alcanza una determinada altura se coloca en órbita alrededor de la Tierra. ¿Cómo cambia la tensión de la cuerda una vez en órbita: **es mayor, menor o igual que antes de despegar?**

c) Por un fallo del sistema de mantenimiento, parte del aire de la cabina se escapa, disminuyendo la presión en el interior de la misma. **¿Qué le ocurrirá al globo?**

Datos:
Densidad del aire a 20°C = 1,205 kg·m^{-3}
Volumen de helio introducido en el globo: 0,0150 m^3
Constante de los gases, R=8,314 J·K^{-1}·mol^{-1}
Masa molar del helio=4,003 g·mol^{-1};
Masa del globo deshinchado=1,700 g
1 atm.=1,013·10^5 Pa

Ver solución 62

63. Vacaciones en un crucero

Si alguna vez has hecho un crucero por el mar, quizá te hayas preguntado si, cuando al pasar del agua salada del océano al agua dulce de la desembocadura de un río, el barco se hunde más o menos. La densidad del agua dulce es 1,027 veces menor que la densidad del agua del mar.

¿Cómo cambian las fuerzas sobre el barco?

¿Cómo varía la línea de flotación*?

* La línea de flotación separa la parte sumergida de la que no lo está.

Ver solución 63

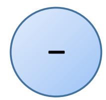
64. Partícula alfa

La partícula alfa tiene carga eléctrica positiva y doble que la del electrón. La masa de la partícula alfa es casi 2000 veces mayor que la del electrón.

1) Cuando una partícula alfa y un electrón se encuentran próximos, la partícula alfa ejerce sobre el electrón una fuerza cuyo módulo es

a) el doble b) igual c) la mitad

que la fuerza que el electrón ejerce sobre la alfa



2) ¿Cuál de las dos partículas experimenta una aceleración mayor?

a) la alfa b) el electrón c) ambas igual

3) A medida que las dos partículas se acercan entre sí hay un aumento de

a) fuerza b) velocidad c) aceleración d) todas las anteriores

Ver solución 64

65. Protones en un acelerador lineal

Un protón que se mueve a velocidad v_0 es acelerado hasta alcanzar una velocidad $2v_0$.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

Imagen: Acelerador lineal de Stanford (SLAC)

- **a** El momento del protón aumenta al doble y su longitud de onda también al doble.
- **b** El momento del protón aumenta al doble y su longitud de onda disminuye a la mitad.
- **c** El momento del protón se cuadruplica y su longitud de onda se duplica.
- **d** El momento del protón se cuadruplica y su longitud de onda se reduce a la mitad.
- **e** El momento del protón se cuadruplica y su longitud de onda se cuadruplica también.

Ver solución 65

66. Galletas radiactivas

Imagina que te ofrecen tres apetitosas galletas. A cada una de ellas se le ha añadido un potenciador de sabor, pero todos son radiactivos. Uno de ellos contiene un emisor alfa, otro un emisor beta y el tercero un emisor gamma. Para no quedar mal, tú decides comer una, quedarte con otra en la mano, y guardar la tercera en el bolsillo del pantalón.

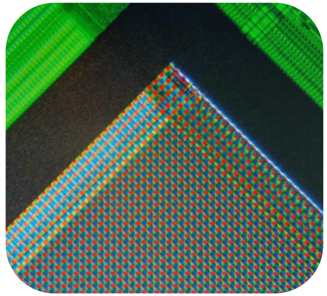
¿Cómo debes distribuirlas para minimizar los efectos de la radiación sobre tu organismo?

Adaptado de Hewitt Next-Time-Questions dev.physicslab.org

Ver solución 66

67. Efecto fotoeléctrico

Uno de los problemas que tenía la Física clásica para explicar el efecto fotoeléctrico era que nunca se observaba un tiempo de retardo entre la llegada de la luz al material y la emisión de los fotoelectrones. Según la teoría clásica la energía de la radiación electromagnética está repartida en toda la onda, de manera que el electrón comienza a absorber energía de la onda cuando entra en contacto con ella, pero necesitaría un tiempo para acumular la energía suficiente para desligarse del material.



Se tiene un haz cilíndrico de luz UV de potencia $1{,}6\cdot10^{-9}$ W y sección transversal 1 cm^2 que incide sobre un metal cuya función trabajo es 2,3 eV. La longitud de onda de los fotones del haz es 124 nm.

a) **¿Cuántos fotones hay en una longitud de 1 m del haz?**

b) Para calcular el tiempo de retardo clásico vamos a suponer que la superficie del átomo para la absorción de energía del haz es un disco de radio 10^{-10} m. **¿Cuánto tiempo necesitaría un electrón para absorber del haz la energía para desligarse del material?**

c) Si un fotón de luz azul es capaz de arrancar un electrón del material **¿cuántos electrones arrancará un fotón de RX, de energía 1000 veces mayor?**

Ver solución 67

68. Albert Einstein: $E=mc^2$

Una de las fórmulas más conocidas de la Física es la relación de Einstein que expresa la equivalencia entre la masa y la energía

$$E=mc^2$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

En la actualidad, láseres ultraintensos tienen potencia superior al petawatio (10^{15} W) e intensidades de 10^{15} W/cm^2. Teniendo en cuenta la equivalencia masa-energía, **¿cuál es la densidad equivalente del haz láser?**

Compárala con la densidad del agua.

Datos: densidad del agua: 10^3 kg·m^{-3}; velocidad de la luz en el vacío: $3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

Ver solución 68

69. Microscopio electrónico para estudiar el tamaño de un virus

Para poder tener buena resolución y apreciar los detalles más pequeños de un objeto, es necesario que la longitud de onda de la radiación con que "se ilumina" sea menor que el tamaño de esos detalles. En otro caso, los efectos de la difracción harían que la imagen no tuviera suficiente nitidez.

En el Instituto de Biología Funcional y Genómica (IBFG) de la USAL quieren estudiar un virus de 20 nm de diámetro. Para tener buena resolución, se decide que la longitud de onda que se va a utilizar sea mil veces menor que las dimensiones del virus, es decir, $2{\cdot}10^{-11}$ m.

a) Si se utilizara luz, **¿cuál debería ser la energía de los fotones** correspondientes?

b) En un microscopio electrónico, en vez de utilizar radiación electromagnética, se utiliza la onda asociada a electrones que se han acelerado con una diferencia de potencial grande. **Calcula el voltaje con que se deben acelerar los electrones** para conseguir esa resolución.

Datos: velocidad de la luz (vacío): $c = 3{\cdot}10^{8}$ m·s^{-1}; constante de Planck $h = 6{,}626{\cdot}10^{-34}$ J·s; carga del electrón $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C

Ver solución 69

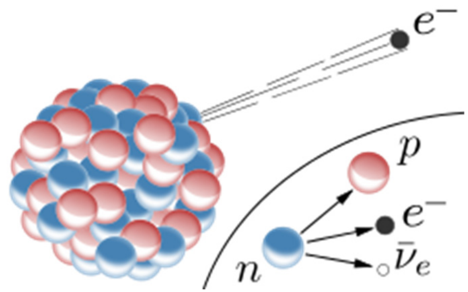
ÍNDICE

70. Desintegración beta

El ^{55}Cr (Z=24) se desintegra beta con una semivida de 3,5 minutos. Inicialmente tienes una muestra de 120 g de ^{55}Cr puro. Después de 14 minutos:

a) ¿qué elementos tendrás?

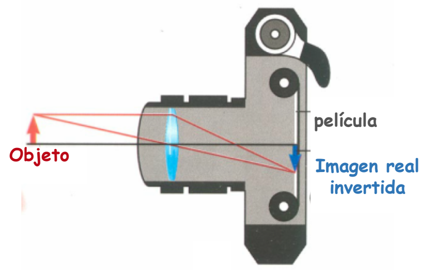
b) ¿qué cantidad de ^{55}Cr queda?



Ver solución 70

46. Enfoque correcto: solución

La cámara fotográfica no es más que una lente convergente que forma sobre la película una imagen real e invertida del objeto.



Para una lente delgada (y siguiendo el criterio de signos cartesiano) se verifica:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad \frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}$$

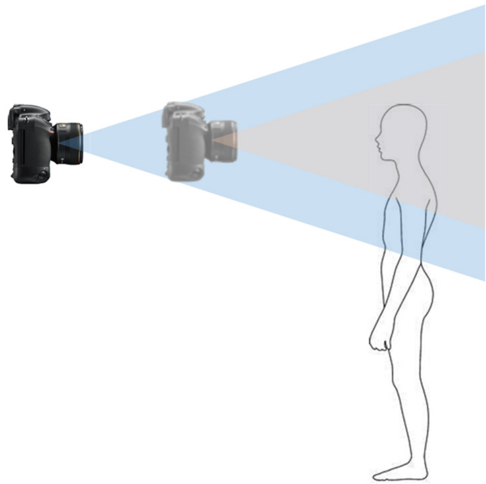
- s y s' son (respectivamente) las distancias objeto e imagen
- f es la distancia focal de la lente
- y e y' son (respectivamente) el tamaño del objeto y de la imagen.

Para la fotografía a tamaño natural de la flor tenemos que y'=-y → s' =-s = 20 cm y sustituyendo en la ecuación de las lentes delgadas obtenemos una focal de **f=10 cm**

En el caso de la bandada de aves en su migración, como vuelan a mucha altura, podemos considerar que la distancia objeto es casi infinita (s → ∞) y por tanto, la imagen se formará en el plano focal imagen (s'=f).
Es decir, la distancia entre lente y película cuando se fotografíen las aves será f=10 cm.

Ver enunciado 46

47. «Selfie»: solución



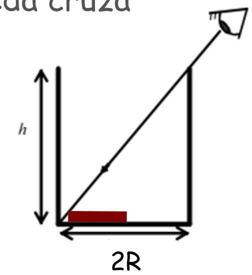
El objetivo de una cámara fotográfica muestra siempre la imagen de todo aquello que está dentro de su cono de visión (cono de apertura) de acuerdo con las características del objetivo, básicamente su distancia focal. Por lo tanto, si te pones cerca de la cámara, tu cara llenará la imagen y si te pones lejos ocupará solo una pequeña parte de ella. **De esta forma, al alargar el palo *selfie*, la fotografía mostrará una parte mayor de tu cuerpo, es decir, te verás más pequeña.**

Por el contrario, cuando apagas la pantalla y lo usas como espejo plano ves tu imagen virtual del mismo tamaño que tú y colocada simétricamente con respecto al espejo. **Independientemente de la distancia a la que te coloques siempre ves la misma porción de ti, es decir, te ves igual de grande.**

Ver enunciado 47

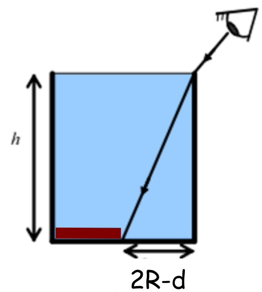
48. Refracción en un vaso de agua: solución

Lo que sucede es que **a medida que va subiendo el nivel del agua vas viendo cada vez mayor porción de la moneda**. La explicación está en las figuras: el rayo que sale de la moneda cruza primero el agua y cambia de dirección al llegar al aire.



Para que puedas ver el fondo del vaso, el rayo que salga del fondo tiene que salvar el borde del vaso y llegar a tu ojo. El ángulo que forma ese rayo con la normal (la pared del vaso) es tal que:

$$sen\theta_r = \frac{2R}{\sqrt{h^2 + (2R)^2}}$$



Cuando hay agua, el rayo que sale del fondo del vaso sufre refracción al salir al aire, pero el rayo refractado que llega al ojo debe formar el mismo ángulo que sin agua. En ese caso, teniendo en cuenta la ley de Snell: n_{agua} sen θ_i = sen θ_r

$$sen\theta_i = \frac{2R - d}{\sqrt{h^2 + (2R - d)^2}} \qquad n_{agua}\frac{2R - d}{\sqrt{h^2 + (2R - d)^2}} = \frac{2R}{\sqrt{h^2 + (2R)^2}}$$

Y teniendo en cuenta los valores de *R* y *d*, se obtiene: *h* = **$(7/5)^{1/2}$R= 3,1 cm**

Ver enunciado 48

49. Imagen del sol refractada: solución

a) Para un dioptrio esférico, de radio R, se verifica: $$\frac{n_1}{-s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

Donde n_1 es el índice de refracción del medio donde está el objeto y n_2 el del medio donde se forma la imagen.

Como el Sol está muy lejos, se puede considerar $s=\infty$, y, según el enunciado, $s'=2R$. Por tanto:

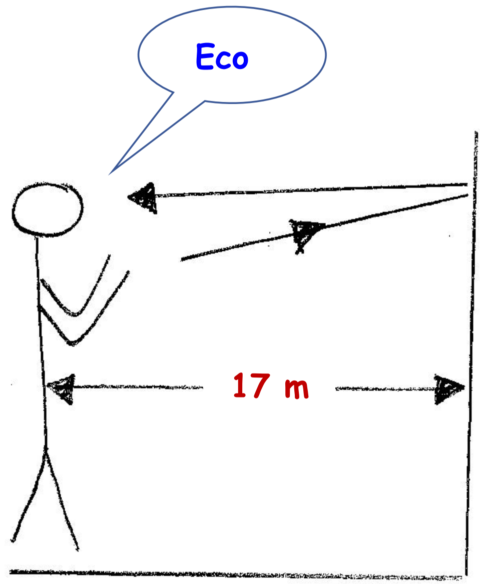
$$\frac{n_2}{2R}=\frac{n_2-n_1}{R}\rightarrow \boldsymbol{n_2=2}$$

Por lo tanto el **índice de refracción de la esfera** es: $\boldsymbol{n_2=2}$

b) Y, como se ve en la expresión anterior, **el resultado es independiente del radio de la esfera.**

Ver enunciado 49

50. Eco: solución



a) La longitud de onda, **λ**, y la frecuencia, **f**, están relacionadas por:

$$v = \lambda \cdot f$$

Por tanto:

- para f=20 Hz ➔ $\lambda=340/20=$**17 m**
- para f=20000 Hz ➔ $\lambda=340/20000=17\cdot10^{-3}$ m=**17 mm**

b) Si la distancia de la persona a la pared es **d**, el sonido recorre la distancia **2d** hasta que vuelve a la persona, tras reflejarse en la pared, en consecuencia:

$s=v\cdot t$ ➔ $2d=v\cdot t$ ➔ $2d=340\times0.1$ ➔ **d=17m**

Ver enunciado 50

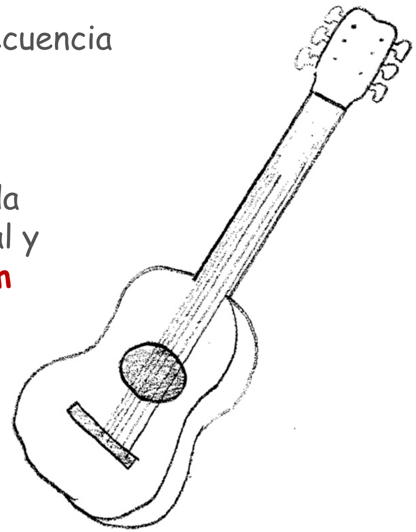
51. Ondas estacionarias en una guitarra: solución

La velocidad de propagación (**v**) de una onda en una cuerda es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda (**T**) e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad lineal

$$v = (T/\mu)^{0.5} \qquad \text{con } \mu = m/L$$

Una vez que se conoce la velocidad de propagación, se puede calcular la frecuencia producida como la velocidad (**v**) dividida por la longitud de onda (**λ**)

$$f = v/\lambda$$



1) La velocidad de propagación será la misma ya que no cambiamos la cuerda (densidad) ni su tensión. Pero $L = \lambda/2$ ya que suena en su modo fundamental y $f_{La} = v/(2L)$ y $f_{New} = v/(2L_{New}) \rightarrow L_{New} = L\times(f_{La}/f_{New}) \rightarrow$ $\mathbf{L_{New}=L/2=50\ cm}$

2) Ahora sí que cambia la velocidad de la onda pues varía la tensión, pero no varía la longitud de onda que será la mitad que antes, $\lambda' = 100$ cm.
$f_{La} = v_{New}/\lambda' = (T_{New}/\mu)^{0.5}/\lambda'$ y $2\times f_{La} = v/\lambda' = (T/\mu)^{0.5}/\lambda'$

$$(2\times f_{La})/f_{La}=\sqrt{T/T_{New}} \rightarrow \mathbf{T_{New}=T/4}$$

Ver enunciado 51

52. Teléfono móvil: solución

La variación de frecuencia registrada cuando el emisor está en movimiento es debido al **efecto Doppler**. Cuando una fuente sonora está en movimiento, el observador quieto mide una frecuencia que será mayor (si la fuente se acerca) o menor (si la fuente se aleja) que la frecuencia original. La expresión matemática es la siguiente:

$$f_{obs} = \frac{v_{sonido}}{v_{sonido} \pm v_{emisor}} f_{emitida}$$

donde los signos + (-) corresponden, respectivamente, a que la fuente se aleje (se acerque) respecto al observador y v_{sonido} es la velocidad del sonido en el aire (340 m/s).

Como la fuente sonora está unida a un muelle, su velocidad aumenta al acercarse a la posición de equilibrio y disminuye según va teniendo mayor elongación. Por tanto, el mayor desplazamiento en frecuencia corresponde al mayor valor del módulo de la velocidad.

$$\frac{803}{800} = \frac{340}{340 - v_{emisor}}$$

Despejando obtenemos que **v_{emisor}=1,27 m/s**. Esta velocidad corresponde al paso por x=0, en que la energía potencial elástica es cero y toda la energía del sistema muelle-móvil es cinética.
Por lo tanto: **$E_T = mv^2/2 =$ 0,081 J.**

Ver enunciado 52

53. Murciélago, polilla y decibelios: solución

1) $\lambda = \frac{v_s}{f} = 5{,}67\ 10^{-3}$ m

2) Por la definición del nivel de intensidad en decibelios:

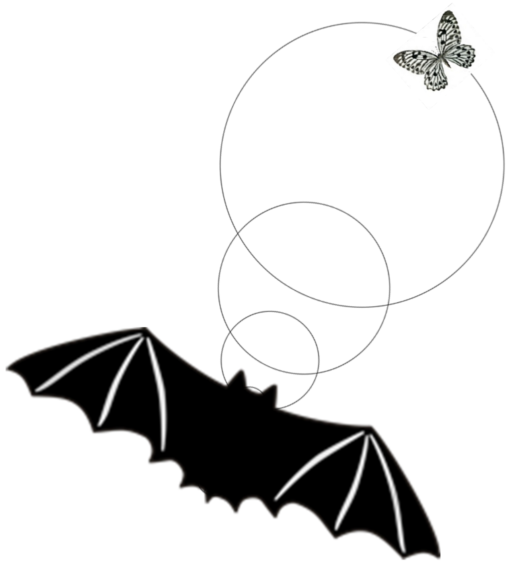
$$80\ dB = 10 \log \frac{I_{80}}{I_0} \rightarrow I_{80} = I_0\ 10^8$$

$$40\ dB = 10 \log \frac{I_{40}}{I_0} \rightarrow I_{40} = I_0\ 10^4$$

Variación de la intensidad con la distancia:

$$I_1\, r_1^2 = I_2\, r_2^2 \rightarrow I_{40}\, r_{40}^2 = I_{80}\, r_{80}^2 \rightarrow \boldsymbol{r_{40}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{I_{80}}}{\boldsymbol{I_{40}}}}\, \boldsymbol{r_{80}} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{m}$$

La polilla escapará cuando el murciélago esté a 10 m.



Ver enunciado 53

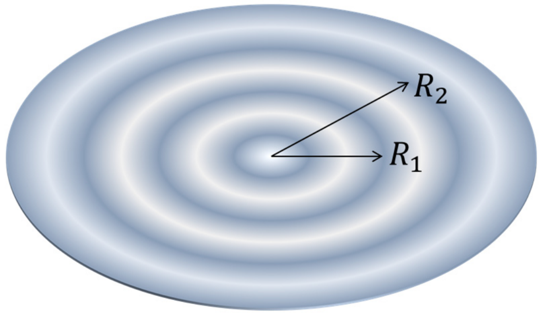
54. Grifo goteando: solución

La frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación están relacionadas a través de la siguiente expresión: $v = \lambda/T = \lambda f$. **Por tanto,**

$$\boldsymbol{v} = \lambda f = 0.45\ \mathrm{m} \cdot {}^{80}/_{60}\,\mathrm{Hz} = \mathbf{0,6\ m/s}$$

Por otro lado, la intensidad a una distancia del foco R viene dada por

$$I = \frac{P}{2\pi R}$$



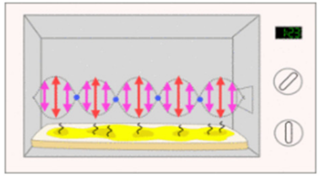
donde P es la potencia (energía por unidad de tiempo). Si la potencia permanece constante a medida que la onda se aleja del foco tenemos que $I_1 R_1 = I_2 R_2$. Como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud,

$$\left({}^{A_1}/_{A_2}\right)^2 = {}^{I_1}/_{I_2} = {}^{R_2}/_{R_1}$$

Por tanto, **la amplitud de la onda es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia al foco, $\boldsymbol{A \propto R^{-1/2}}$**

Ver enunciado 54

55. Velocidad de la luz en Master Chef: solución



Las microondas son ondas electromagnéticas (como la luz visible) pero de distinta longitud de onda. Mientras que la longitud de onda para la luz visible es del orden de la micra, para las microondas es del orden del centímetro. Sin embargo, todas las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío (y también en el aire) a la misma velocidad.

Como sabes, la velocidad de propagación (v), la longitud de onda (λ) y la frecuencia (f) de una onda están relacionadas como: $v = \lambda \cdot f$ (1)

En el horno microondas se generan ondas estacionarias de la forma que ves en el esquema. La potencia en cada punto está relacionada con la elongación de la onda en ese punto (en realidad con su cuadrado). Así, en los puntos en que el módulo de la elongación es máximo la energía aportada por unidad de tiempo es también máxima y se funde rápidamente el chocolate. La distancia entre dos puntos fundidos consecutivos representa media longitud de onda.

RESULTADOS
La distancia medida entre dos puntos fundidos ha sido: L=6 cm, luego la longitud de onda es λ=12 cm.
Según la expresión (1), sabiendo que la frecuencia de las microondas es $2{,}45 \cdot 10^9$ Hz,
se obtiene para la velocidad de la luz: $c=12 \cdot 10^{-2} \times 2{,}45 \cdot 10^9 = 2{,}94 \cdot 10^8$ m s^{-1}

Ver enunciado 55

56. ¿Cuánto ha llovido?: solución

1 L=1 dm^3 y 1 m^2=100 dm^2 → Por tanto, 1 L/m^2=(1/100) dm=1 mm

La precipitación se mide en milímetros de agua o litros caídos por unidad de superficie (m^2), es decir, la altura de la lámina de agua recogida en una superficie plana es medida en mm o L/m^2. 1 milímetro de agua de lluvia equivale a 1 L de agua por m^2 → **Así 25 mm son 25 L/m^2**

La cantidad de lluvia que cae en un lugar se mide con los pluviómetros. La medición se expresa en milímetros de agua y equivale al agua que se acumularía en una superficie horizontal e impermeable durante el tiempo que dure la precipitación o solo en una parte del periodo de la misma.

En 3×3 km^2 caerán $25\cdot(3000)^2=225\cdot10^6$ L=**$225\cdot10^3$ m^3**

El volumen de la piscina $2\cdot15\cdot25=750$ m^3 → **300 piscinas**

Por último, como 1 m^3 de agua pesa 1 Tm, con esa cantidad llenaremos **7500 camiones**

Ver enunciado 56

57. Eficiencia energética: solución

El lumen (símbolo: lm) es la unidad del Sistema Internacional de Medidas para medir el flujo luminoso, una medida de la potencia luminosa emitida por la fuente.

Si llamamos a la eficacia luminosa EF en (lm/W), la cuenta es bien sencilla:

(18.000 lm/EF)×12 h × 365 días ×10^{-3} kW/W × 0,15 €/kWh

De esta forma para cada tipo de bombilla tenemos:

Incandescente (10 lm/W) → 1.182,6 €
Fluorescente (50 lm/W) → 236,52 €
LED (90 lm/W) → 131,4 €

Ver enunciado 57

58. Colapso de una estrella en rotación: solución

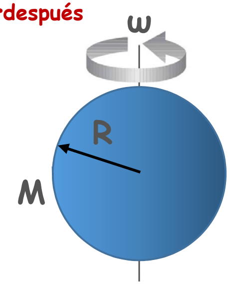
Como el colapso de la estrella se produce por fuerzas internas, no hay ninguna fuerza externa que cambie el momento angular **L**, por lo que $\mathbf{L_{antes}=L_{después}}$.

El momento de inercia I es directamente proporcional a su radio al cuadrado $I=(2/5)MR^2$. Por lo tanto, al colapsar, I disminuye → $\mathbf{I_{antes} > I_{después}}$

Tenemos además que $L=I\omega$ por lo que como $L_{antes}=L_{después}$ → $I_{antes}\,\omega_{antes} = I_{después}\,\omega_{después}$ → la velocidad angular aumenta en la misma proporción que disminuía el momento de inercia → $\boldsymbol{\omega_{antes} < \omega_{después}}$

La energía cinética de rotación es igual a $K=I\omega^2/2$. Aunque hemos visto que el momento de inercia disminuye, como la energía va con el cuadrado de la velocidad angular → $\mathbf{K_{antes} < K_{después}}$

Es interesante darse cuenta que este aumento de energía cinética procede de una disminución de la energía gravitacional al colapsar la estrella.



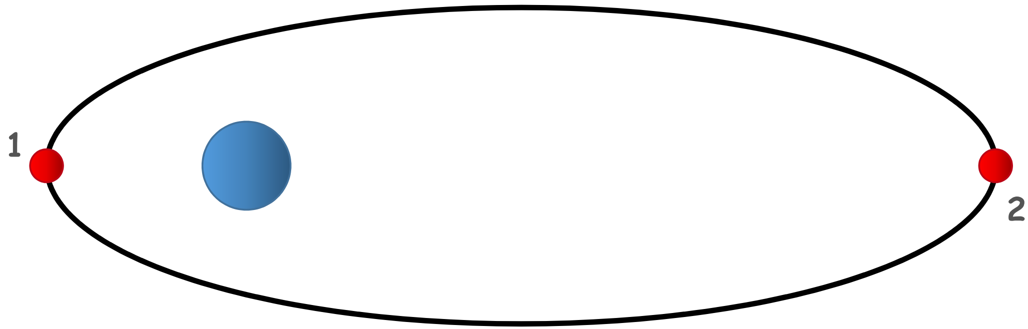
Ver enunciado 58

59. Momento lineal y angular: solución

Si no actúan fuerzas externas sobre el sistema, se debe conservar el momento angular del cometa:

$$L_1=L_2$$

Por otra parte, **L**=r**x**m**v**. Por la segunda ley de Kepler, el cometa barre áreas iguales en tiempos iguales. Cuando el cometa está más lejos del planeta, su velocidad lineal es menor que cuando está cerca. Por lo tanto, en la posición 1 la velocidad es mayor que en la posición 2 y se tiene que → $p_1 > p_2$



Ver enunciado 59

60. Eureka: solución

En ambos casos (Figuras 1 y 2) el cubo está flotando y, por tanto, se ha de cumplir la ecuación de equilibrio:

$$P = E$$

Donde P es el peso del cubo y E es el empuje debido al principio de Arquímedes (peso del fluido desalojado).

En la Figura 1 la ecuación de equilibrio se traduce en lo siguiente:

$$\rho_{\text{cubo}}\, \mathrm{g}\, V = \rho_{\text{Hg}}\, \mathrm{g}\, \frac{V}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{cubo}} = \frac{1}{4}\rho_{\text{Hg}}$$

En la Figura 2, sin embargo, también hay que tener en cuenta el empuje debido al agua desalojada. Si llamamos α a la fracción del volumen del cubo sumergida en mercurio la ecuación de equilibrio viene dada por:

$$\rho_{\text{cubo}}\, \mathrm{g}\, V = \rho_{\text{Hg}}\, \mathrm{g}\, \alpha\, V \; + \rho_{\text{agua}}\, \mathrm{g}\, (1-\alpha)\, V$$

Sustituyendo $\rho_{\text{cubo}} = \rho_{\text{Hg}}/4$ en la ecuación anterior y despejando α se obtiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\rho_{\text{Hg}}/4 - \rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{agua}}} = \frac{13{,}6/4 - 1.0}{13{,}6 - 1.0} = \mathbf{0,19}$$

Por tanto, **el 19% del volumen del cubo está sumergido en mercurio** y el 81% en agua.

Ver enunciado 60

61. Bolas de ping-pong en una balanza: solución

La respuesta correcta es la primera, la balanza se inclinará hacia la derecha.

Para justificar la respuesta de forma simple vamos a despreciar la masa de la pelota de ping-pong y las de los hilos de sujeción en ambos lados. Así, podemos decir que el platillo de la izquierda ha de soportar la misma fuerza que antes, el peso de la masa de agua sobre él. Nótese que el empuje que tiende a hacer flotar la pelota no cambia el razonamiento porque es una fuerza interna, dentro del sistema. (*No conocerás a nadie que se levante tirando de los cordones de sus zapatos.*) Por el contrario, en el platillo de la derecha podemos asegurar que la fuerza ha aumentado porque sobre él tenemos el peso del agua y <u>parte</u> del peso de la bola de hierro. En efecto, el peso de esa bola está soportado <u>parcialmente</u> (su peso menos el empuje) por el hilo del que cuelga. Y la <u>otra</u> <u>parte</u> de su peso, el empuje, ha de estar soportado por el platillo derecho. Y por lo tanto la balanza se inclinará hacia la derecha.

Si llamamos V al volumen de la bola de hierro, ρ_h y ρ_a a las densidades del hierro y del agua respectivamente y g a la aceleración de la gravedad, el desequilibrio de la balanza (hacia la derecha) corresponderá simplemente a $V\rho_a g$, mientras la tensión del hilo será $V(\rho_h-\rho_a)g$.

Ver enunciado 61

62. Globo de helio en un cohete: solución

a) Antes de despegar las fuerzas que actúan sobre el globo son: su peso (el helio más el material del globo), el empuje y la tensión de la cuerda.
Como el sistema está en reposo, la suma de las fuerzas es cero: $E = (m_1 + m_2)g + F$
El empuje es el peso del aire desalojado, es decir:

$$E = V(globo) \cdot \rho(aire) \cdot g = 0.177 \text{ N}$$

Para conocer la masa de helio encerrada en el globo utilizamos la ecuación de los Gases, ya que tenemos la presión, el volumen y la temperatura $P \cdot V = \frac{m_2}{M} \cdot R \cdot T \rightarrow m_2 = 0{,}002496 \text{ kg}$

El peso del helio más el globo será: $(m_1 + m_2)g = 0{,}0411 \text{ N}$

Por lo que la tensión de la cuerda vale: $\boldsymbol{F} = E - (m_1 + m_2)g = \mathbf{0,136\ N}$

b) Cuando está en órbita: Cuando está en órbita todos los cuerpos del interior de la nave están en estado de ingravidez, es decir, su peso aparente es cero por lo que el empuje es cero y la tensión se hace cero $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$

c) Cuando disminuye la presión: Para igualar la presión en el interior del globo con la presión exterior, el globo aumenta su volumen (ley de Boyle Mariotte). Si la presión es suficientemente baja, el globo explotará, pero los trozos de globo quedarán flotando libremente en el interior de la nave por estar en órbita.

Ver enunciado 62

63. Vacaciones en un crucero: solución

¿Cómo cambian las fuerzas sobre el barco?
El peso del barco no varía su valor siempre es mg. Lo que **sí cambia** es **el empuje** $E=\rho \cdot g \cdot V$, pues al cambiar la densidad del agua (ρ), se modifica el volumen del líquido desalojado (V).

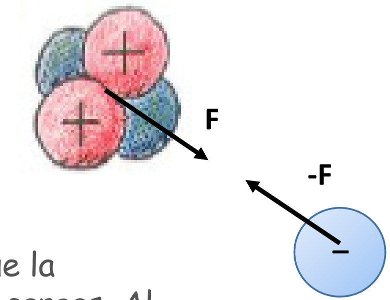
¿Cómo varía la línea de flotación?
La línea de flotación sube ligeramente, ya que la densidad del agua dulce es 1,027 veces menor que la del mar y, por lo tanto, ha de crecer el volumen de líquido desalojado por el casco del barco. Subirá algo menos del 2,7% (sería el 2,7% si la parte sumergida del buque tuviera sección constante pero, como bien sabemos, la sección se hace progresivamente más estrecha en la zona inferior).

Ver enunciado 63

64. Partícula alfa: solución

1) Por el principio de acción-reacción, la fuerza que ejerce el electrón sobre la partícula alfa es igual y de sentido contrario a la que ejerce la partícula alfa sobre el electrón. **Respuesta b**

2) A igualdad de fuerzas, la aceleración es inversamente proporcional a la masa de la partícula. Por tanto, el electrón tiene mayor aceleración. **Respuesta b**



3) A medida que las dos partículas se acercan, aumenta la fuerza, puesto que la atracción coulombiana es inversamente proporcional a la distancia entre las cargas. Al aumentar la fuerza, aumenta la aceleración de cada partícula. También aumenta la velocidad, puesto que la energía total (suma de energía cinética más energía potencial) se conserva. Al acercarse, la energía potencial disminuye (se hace más negativa), por lo que tiene que aumentar la energía cinética y, por tanto, la velocidad. **Respuesta d**

Ver enunciado 64

65. Protones en un acelerador lineal: solución

El momento para un protón se calcula como $p=mv$

Por lo tanto tenemos que:
$p_0=mv_0$
$p=m(2v_0)$ → $\mathbf{p=2p_0}$

Para calcular la longitud de onda asociada a una partícula usamos la expresión de *de Broglie* $\lambda=h/p=h/(mv)$

Por lo tanto tenemos que:
$\lambda_0=h/(mv_0)$
$\lambda=h/(m2v_0)$ → $\mathbf{\lambda=\lambda_0/2}$

a El momento del protón aumenta al doble y su longitud de onda también al doble.

b **El momento del protón aumenta al doble y su longitud de onda disminuye a la mitad.**

c El momento del protón se cuadruplica y su longitud de onda se duplica.

d El momento del protón se cuadruplica y su longitud de onda se reduce a la mitad.

e El momento del protón se cuadruplica y su longitud de onda se cuadruplica también.

Ver enunciado 65

66. Galletas radiactivas: solución

Los efectos de las radiaciones ionizantes sobre el organismo están relacionados con la cantidad de energía que pueden depositar en la zona que atraviesan. A igualdad de energía de la radiación, las partículas alfa se frenan antes, de manera que depositan su energía en un volumen muy pequeño y en él pueden producir daños importantes. Sin embargo, las gammas pueden recorrer distancias mucho mayores en el mismo medio y depositan por ello mucha menor energía por unidad de recorrido, lo que supone menor daño.

Podemos suponer que somos esencialmente agua. En el agua las partículas alfa se pueden frenar con menos de 1 mm, las betas tienen un alcance de menos de un centímetro y las gammas de alguna decena de centímetros. La piel es capaz de parar las partículas alfa, por lo que el verdadero peligro de este tipo de radiación para el organismo está en la ingestión del correspondiente isótopo radiactivo.

Por tanto, ante el dilema de qué hacer con las galletas:

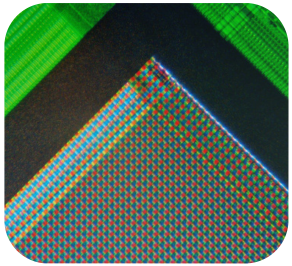
- Dejaría **en la mano** la contaminada con el emisor de **alfas**, ya que no atraviesan la piel.
- Metería **en el bolsillo** la contaminada con el emisor de **betas**, ya que el tejido del pantalón será capaz de frenarlas.
- Me **comería** la del emisor **gamma**, porque las gammas depositan poca energía por unidad de recorrido en el organismo, y por tanto supondrán poco peligro.

Ver enunciado 66

67. Efecto fotoeléctrico: solución

La energía de cada fotón del haz es $E_\gamma = \dfrac{hc}{\lambda} = 1{,}6 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 10\,\mathrm{eV}$

a) Los fotones van a la velocidad de la luz. Para recorrer 1 m necesitan un tiempo de $1/(3{\cdot}10^{8})=3{,}33{\cdot}10^{-9}$ s. Los fotones que durante ese tiempo salen de la fuente llenan un cilindro de sección 1 cm^2 y longitud 1 m.
En cada segundo salen de la fuente $1{,}6{\cdot}10^{-9}$ J, que corresponde a 10^{9} fotones. Por tanto, en $3{,}33{\cdot}10^{-9}$ s salen en **promedio 3,33 fotones, que ocuparán una longitud del haz de 1 m.** Esto nos da idea de que es un haz muy poco intenso, apropiado para medir tiempo de retardo.



b) Si la energía del haz está distribuida uniformemente en su sección, a la superficie del electrón ($\pi r^2=\pi{\cdot}10^{-20}$ m^2) llegan en cada segundo:

$1{,}6{\cdot}10^{-9}\,\mathrm{W\,cm^{-2}} \cdot 3{,}14{\cdot}10^{-16}\,\mathrm{cm^2} = 5{,}024 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J} = 3{,}275{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{eV}$.

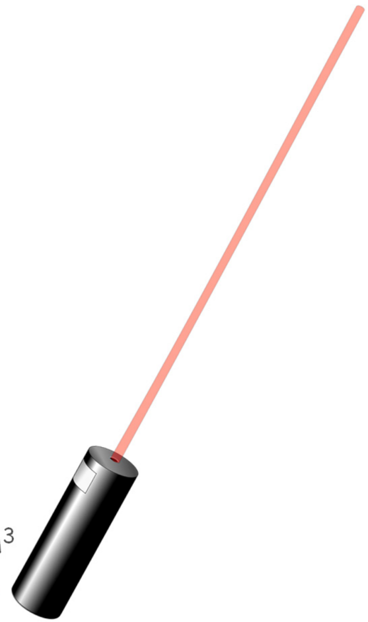
Para acumular los 2,3 eV necesarios para desligarse del material **necesitaría**

$2{,}3/3{,}275{\cdot}10^{-6} = 3{,}05{\cdot}10^{5}$ s= **3,53 días**

c) En el efecto fotoeléctrico cada fotón (independientemente de su energía, siempre que sea mayor que la función trabajo) arranca un electrón. **Tanto el fotón de luz azul, como el de rayos X de energía 1000 veces mayor arrancan un electrón.**

Ver enunciado 67

68. Albert Einstein: E=mc²: solución



Si la sección del haz es circular, de área *S* y *l* es la longitud que el haz recorre en el tiempo *t* (a velocidad c), por la definición de intensidad de la radiación:

$$I = \frac{E}{t \cdot S} = \frac{E}{t} \cdot \frac{l}{V} = \frac{mc^2}{V} \cdot \frac{l}{t} = \rho c^3$$

Es decir, que la densidad equivalente de la radiación está relacionada con la intensidad como:

$$\rho = \frac{I}{c^3}$$

Para el láser de pettawatio I= 10^{19}W m^{-2} y se obtiene ρ=3,7·10^{-7} kg/m^3
Esta **densidad es mucho menor que la densidad del agua (10^3 kg/m^3).**

Ver enunciado 68

69. Microscopio electrónico para estudiar el tamaño de un virus: solución

a) Energía de los fotones de esa longitud de onda: $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 62\ \mathrm{keV}$

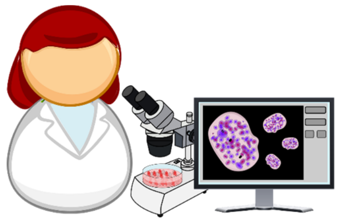
Serían **Rayos X "duros", de energía 62 keV.**

b) Según el principio de *de Broglie*, cualquier partícula material tiene una onda asociada cuya longitud de onda depende del momento lineal de la partícula *p*. $\lambda = \frac{h}{p}$

La energía cinética de los electrones que tengan longitud de onda $2 \cdot 10^{-11}$ m será

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 3{,}76 \cdot 10^3\ \mathrm{eV}$$

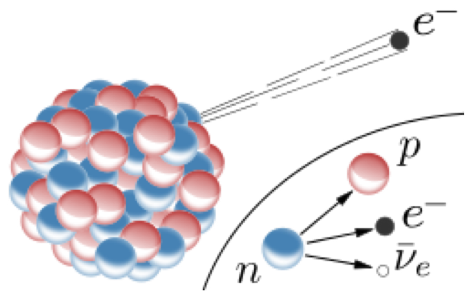
Por tanto, como los electrones parten de energía cinética 0, $\Delta Ec = e\Delta V$
Luego el potencial acelerador debe ser 3,76 kV.



Ver enunciado 69

70. Desintegración beta: solución

a) $^{55}_{24}Cr \rightarrow ^{55}_{25}Mn + e^-$ luego **produce manganeso 55**, que es estable.



b) Teniendo en cuenta la ley de desintegración radiactiva:

$N(t) = N_0 \exp(-\ln 2 \ t/t_{1/2})$, siendo N número de átomos.

Entonces $N(t)/N_0 = 0{,}0625$ y la relación entre las masas será la misma: $m(t)/m_0 = 0{,}0625$

Luego **m(t=14 minutos) = 7,5 g**

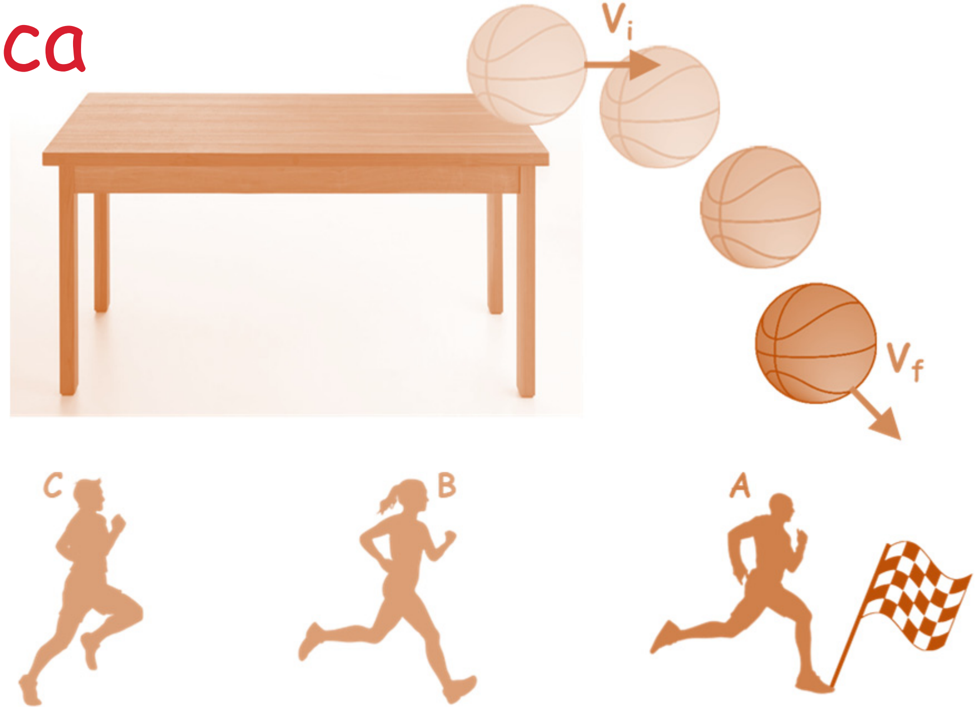
Se podría haber llegado al mismo resultado teniendo en cuenta que después de una semivida queda la mitad de la especie radiactiva, después de dos semividas, la cuarta parte… Los 14 minutos suponen 14/3,5=4 semividas, luego la cantidad de ^{55}Cr que queda será la dieciseisava parte ($1/2^4$) de la inicial.

Ver enunciado 70

ÍNDICE

Desafíos

Cinemática y dinámica



71. Cruzando un río en barca

Partiendo de una orilla, un barquero quiere cruzar un río con una barca manteniendo una velocidad constante de $2\ \mathrm{m/s}$ medida respecto del agua.

a) Si la corriente de agua circula a una velocidad de $1\ \mathrm{m/s}$, ¿en qué dirección debe remar de forma que la distancia recorrida sea mínima? ¿A qué velocidad se mueve la barca con respecto a la tierra?

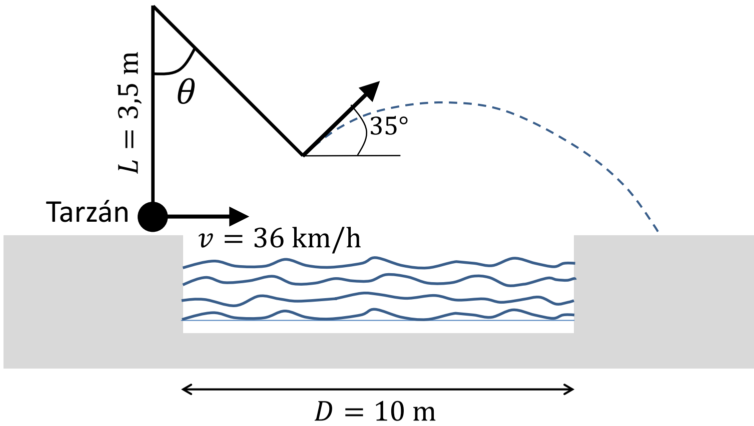
b) ¿Y si la velocidad del río fuera de $4\ \mathrm{m/s}$?

Nota: Especifica la dirección en la que ha de remar el barquero mediante el ángulo que forma con respecto a la línea perpendicular al río que une ambas orillas.

Ver solución 71

72. Tarzán saltando con una liana

Tarzán quiere saltar sobre un río salvando una distancia $D = 10{,}0\ \mathrm{m}$ entre las dos orillas. Para ello utiliza una liana de longitud $L = 3{,}5\ \mathrm{m}$ que cuelga verticalmente de un árbol en el extremo de la orilla izquierda. Tarzán alcanza una velocidad de $v = 36\ \mathrm{km/h}$ en el momento de coger la liana y se suelta cuando esta forma un ángulo $\theta = 35^\circ$ con la vertical. Suponemos que la masa de la liana es despreciable y que el centro de gravedad de Tarzán coincide con el extremo inferior de la liana. Calcula la distancia horizontal que consigue con el salto medida desde la posición inicial de la liana. ¿Consigue llegar a la orilla derecha?



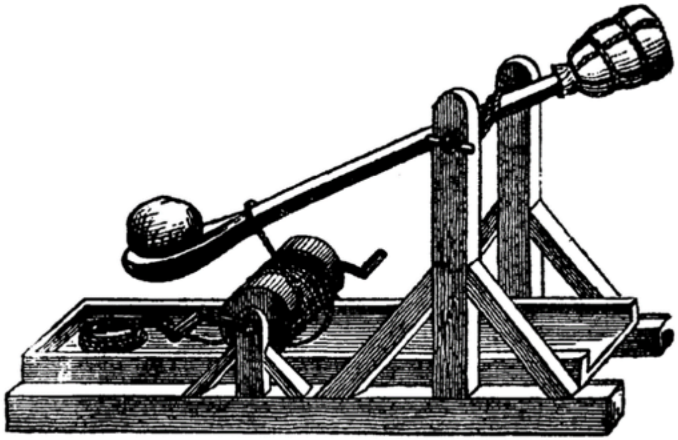
Ver solución 72

73. La catapulta

Una catapulta, situada en reposo, puede lanzar una piedra a una distancia máxima L. ¿Cuál es el ángulo necesario para lograr ese máximo alcance?

Si la catapulta avanza horizontalmente con la misma velocidad con la que lanza la piedra, ¿cuál sería el nuevo ángulo de tiro y la máxima distancia L' a la que puede lanzarla?

(Despreciar la resistencia del aire)

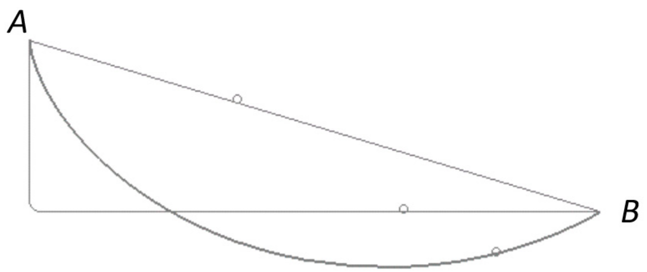


Ver solución 73

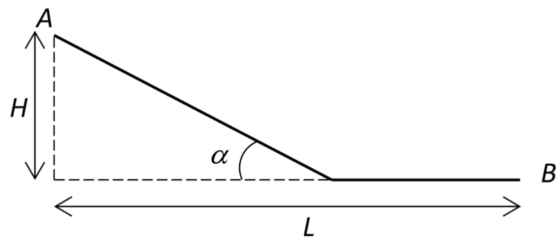
74. Caer en el menor tiempo posible

Como es bien sabido, la trayectoria más rápida de descenso de un objeto entre dos puntos bajo la acción de la gravedad recibe el nombre de **braquistócrona**. Se trata de un problema muy interesante cuyo estudio fue realizado por eminentes matemáticos a finales del siglo XVII como Johann y Jacobo Bernoulli, aunque hubo otros muchos como Leibniz, L'Hôpital o Newton ocupados en este tema.

En la gráfica de la derecha vemos tres posibles trayectorias diferentes para bajar desde el punto A hasta el punto B. Una formada por una simple rampa, otra por dos tramos rectos (con una esquina en forma de curva suave) y otra con una forma curva más compleja. Esta última trayectoria es la braquistócrona, la que resulta más rápida para descender desde el punto A hasta el B bajo la acción de la gravedad, pasando incluso por una región que está más abajo que el punto de destino como se observa en la figura. La solución del problema es bastante compleja y aquí vamos a plantear un caso mucho más sencillo, con una trayectoria formada simplemente por dos tramos rectilíneos.



Veamos la gráfica de abajo. Se trata de descender desde el punto A, situado a una altura H, hasta el punto B, a una distancia L de la vertical del punto de partida, utilizando solo dos tramos rectos. El primero es una rampa de pendiente α y el segundo un recorrido completamente horizontal. De esta forma, durante la bajada desde A el objeto gana velocidad por acción de la gravedad para llegar lo más pronto posible al final del recorrido, al punto B.



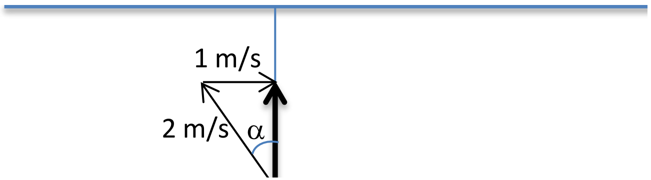
Pues bien, se desea saber cuál es el ángulo óptimo de la rampa para alcanzar el destino en el menor tiempo posible y mostrar que existe un valor mínimo de L para que la solución tenga efectivamente un tramo horizontal.

En todos los cálculos despreciaremos el rozamiento.

Ver solución 74

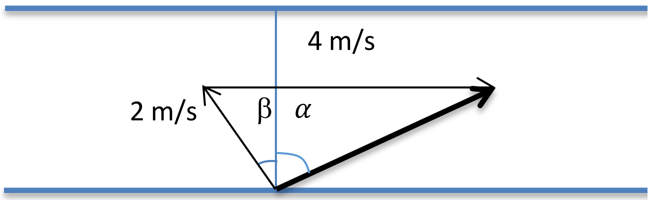
71. Cruzando un río en barca: solución

a) En el primer caso basta hacer que la velocidad resultante, con respecto a las orillas del río, sea perpendicular al mismo. Por tanto, la respuesta es que ha de remar apuntando en una dirección α respecto a la perpendicular al río dada por $\sin(\alpha) = 1/2$, es decir $30°$, resultando su velocidad respecto a tierra de $v = \sqrt{3} = 1{,}73\,\mathrm{m/s}$



b) El segundo caso es más complicado, pues la velocidad del agua es mayor que la de la barca, y eso hace que nunca pueda alcanzar el punto de la otra orilla situado justamente enfrente. Podemos resolver este apartado, al menos, de dos formas distintas:

Opción 1:



Si llamamos h a la anchura del río, la distancia recorrida por la barca es $d = h/\cos\alpha$. Para que esta distancia sea mínima el ángulo α debe ser mínimo.

A partir de la figura podemos deducir que

$$\tan\alpha = \frac{4-2\operatorname{sen}\beta}{2\cos\beta} = \frac{2-\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$

El valor de β que hace α mínimo también hará $\tan\alpha$ mínimo. Por tanto, podemos obtener dicho valor resolviendo la ecuación

$$\frac{d\tan\alpha}{d\beta} = 0$$

Así pues

$$0 = \tan'\alpha = \frac{-\cos^2\beta + \operatorname{sen}\beta\,(2-\operatorname{sen}\beta)}{\cos^2\beta} = \frac{-1+2\operatorname{sen}\beta}{\cos^2\beta} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\beta = \arctan\frac{1}{2} = 30°$$

Nótese que hemos obtenido el mismo ángulo que en el apartado (a).

Sustituyendo este valor en la ecuación para $\tan\alpha$ obtenemos que $\alpha = 60^\circ$, con lo que la velocidad a la que se mueve la barca es

$$v = \sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3} = 3{,}46\ \mathrm{m/s}$$

Opción 2:

El tiempo necesario para cruzar el río es

$$t = \frac{h}{2\cos\beta}$$

y la distancia d recorrida será:

$$d = \sqrt{h^2 + \left[(4 - 2\,\mathrm{sen}\,\beta)\frac{h}{2\cos\beta}\right]^2}$$

$$\frac{d^2}{h^2} = 1 + \left(\frac{4 - 2\,\mathrm{sen}\,\beta}{2\cos\beta}\right)^2$$

Derivando esta cantidad con respecto al ángulo β e igualando a cero encontramos la condición que debe cumplir β para recorrer la mínima distancia:

$$\frac{(\mathrm{sen}\,\beta - 2)(2\,\mathrm{sen}\,\beta - 1)}{(\cos\beta)^3} = 0$$

Por tanto,

$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$$

pues la otra solución de la ecuación anterior es absurda.

Ver enunciado 71

72. Tarzán saltando con una liana: solución

La distancia horizontal total es la suma de las distancias que recorre antes (d_1) y después (d_2) de soltar la liana.

La primera de ellas se calcula fácilmente:

$$d_1 = L \operatorname{sen} \theta = 2{,}01 \text{ m}$$

Para obtener d_2 planteamos las ecuaciones del movimiento parabólico situando el origen de coordenadas en el punto donde Tarzán suelta la liana:

$$x = v_0 \cos \theta \, t$$

$$y = v_0 \operatorname{sen} \theta \, t - {}^{g}/_{2} \, t^2$$

donde la velocidad inicial v_0 puede calcularse aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0$$

siendo y_0 la altura alcanzada en el momento de soltar la liana:

$$y_0 = L\,(1 - \cos \theta\,) = 0{,}63 \text{ m}$$

Por tanto, v_0 viene dada por

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2 g y_0} = 9{,}36 \text{ m/s}$$

Despejando t en la primera ecuación del movimiento parabólico y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

que es la ecuación de la parábola que describe la posición de Tarzán una vez que suelta la liana. La distancia d_2 corresponde al valor de x cuando $y = -y_0 = 0{,}63\ \mathrm{m}$:

$$-y_0 = d_2\tan\theta - \frac{g}{2}\left(\frac{d_2}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

Despejando d_2 obtenemos una ecuación de 2º grado en la que únicamente la raíz positiva tiene sentido físico. Por lo tanto,

$$d_2 = \frac{v_0\cos\theta}{g}\left(v_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta + 2gy_0}\right) = 9{,}21\ \mathrm{m}$$

Así, la distancia horizontal total recorrida por Tarzán desde la orilla izquierda del río es

$$D = d_1 + d_2 = 11{,}22\ \mathrm{m}$$

Tarzán consigue con su salto alcanzar la orilla derecha del río.

Ver enunciado 72

73. La catapulta: solución

Sea, en el primer caso, V_0 la velocidad inicial y α el ángulo de lanzamiento sobre la horizontal. Como es bien sabido podemos escribir las coordenadas de la piedra en coordenadas cartesianas como:

$$x = V_0 t cos\, \alpha$$

$$y = V_0 t\, sin\, \alpha - \frac{g}{2} t^2$$

La distancia alcanzada corresponde a $y = 0$, o lo que es lo mismo $t = 2\frac{V_0}{g} sin\, \alpha$. Por lo tanto:

$$x(y = 0) = \frac{{V_0}^2}{g} sin\, 2\alpha$$

* El ángulo de máximo alcance se obtiene igualando a cero la derivada con respecto al ángulo α:

$$0 = \frac{\partial x'}{\partial \alpha} = \frac{{V_0}^2}{g} 2cos\, 2\alpha$$

La máxima distancia horizontal L se obtiene para $\alpha = 45°$:

$$L = \frac{{V_0}^2}{g}$$

Es decir, podemos escribir que la velocidad inicial V_0 es:

$$V_0 = \sqrt{gL}$$

Ver enunciado 73

Si el lanzamiento se produce ahora cuando la catapulta se mueve hacia adelante con velocidad $V_0 = \sqrt{gL}$, y siendo β el nuevo ángulo de lanzamiento con respecto al suelo, tendremos que:

$$V_x' = \sqrt{gL}(1 + \cos\beta)$$

$$V_y' = \sqrt{gL}\sin\beta - gt$$

De esta forma:

$$x' = \sqrt{gL}(1 + \cos\beta)t$$

$$y' = \sqrt{gL}\, t\, \sin\beta - \frac{1}{2}gt^2$$

Para $y = 0$, o $t = \frac{2\sqrt{gL}}{g}\sin\beta$, se tiene que la nueva distancia horizontal será:

$$x'(y' = 0) = \sqrt{gL}(1 + \cos\beta)\frac{2\sqrt{gL}}{g}\sin\beta = 2L(1 + \cos\beta)\sin\beta$$

Si queremos maximizar (minimizar) la distancia horizontal alcanzada debemos hacer la derivada con respecto al ángulo β:

$$\frac{\partial x'}{\partial\beta} = 2L[2(\cos\beta)^2 + \cos\beta - 1]$$

Igualando a cero obtenemos que:

$$\cos\beta = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos\beta = -1$$

O lo que es lo mismo:

$$\beta = 60^\circ \quad \text{y} \quad \beta = 180^\circ$$

La segunda derivada para el caso de $\beta = 60^\circ$ es negativa y por lo tanto se corresponde a un máximo. Por el contrario, para $\beta = 180^\circ$, la segunda derivada es cero de forma que no es ni un máximo ni un mínimo. De hecho, como es obvio se corresponde con lanzamiento "nulo" puesto que la velocidad de la piedra con respecto al suelo es nula de forma que la piedra se queda en la posición del lanzamiento.

Por lo tanto:

$$L'(\beta = 60^\circ) = 2L(1 + \cos 60^\circ)\sin 60^\circ = 2L\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y finalmente podemos escribir que la distancia será:

$$L' = \frac{3\sqrt{3}}{2}L$$

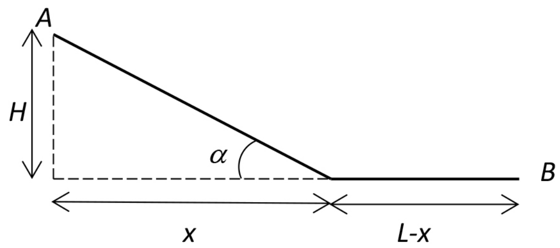
* Para saber más de cómo se obtiene el alcance máximo en el plano horizontal (llamado problema de tarzán) visita el siguiente link:

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/cinematica/tarzan/tarzan.html

74. Caer en el menor tiempo posible: solución

La distancia horizontal L entre ambos puntos se descompone en dos partes: x correspondiente a la rampa y L-x a la parte horizontal. Así, se trata de minimizar el tiempo total t_1 (caída en la rampa) más t_2 (recorrido horizontal):

$$t = t_1 + t_2$$



Evidentemente se cumple que la velocidad al final de la rampa y durante el tramo horizontal será:

$$v = \sqrt{2gH}$$

y que los tiempos t_1 y t_2 satisfacen:

$$\frac{1}{2} g \sin \alpha \; t_1^2 = \sqrt{H^2 + x^2}$$

$$\sqrt{2gH}\; t_2 = L - x$$

Ver enunciado 74

Así,

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{H^2 + x^2}}{g \sin \alpha}} + \frac{L - x}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{2(H^2 + x^2)}{gH}} + \frac{L - x}{\sqrt{2gH}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2gH}}\left(2\sqrt{H^2 + x^2} + L - x\right)$$

Para minimizar ese tiempo hacemos la derivada respecto de x:

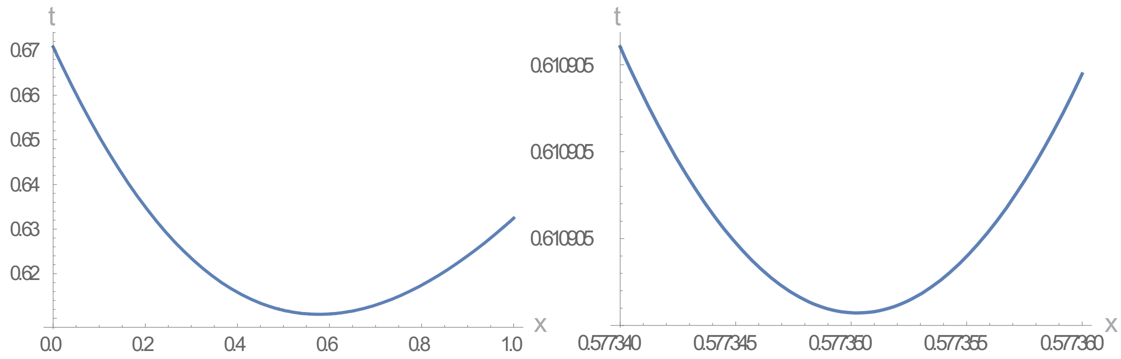
$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\left(\frac{2x}{\sqrt{H^2 + x^2}} - 1\right)$$

e igualando a cero obtenemos:

$$x = \frac{H}{\sqrt{3}}$$

y por lo tanto un ángulo $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$.

Eligiendo por ejemplo $H = 1\mathrm{m}$ (tomando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$), podemos ver la dependencia del tiempo de descenso en segundos con $0 \leq x \leq L$ y también en las proximidades del mínimo $x \approx 0{,}57735\ H$.

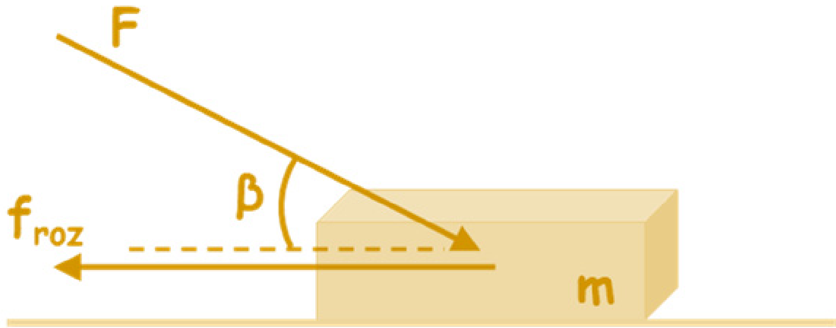


Es evidente que para que esto pueda ser existe un valor mínimo de $L = H/\sqrt{3} \approx 0{,}57735\ H$, en cuyo caso $x = L$ y no habría recorrido horizontal, de forma que si no se alcanza ese valor mínimo tendríamos solo una rampa uniendo el punto de partida y el de llegada con un ángulo evidentemente mayor de 60°, en el límite $x = 0$ y $\alpha = 90^\circ$ como era de esperar.

ÍNDICE

Desafíos

Fuerza, trabajo y energía



75. Arrastrando una caja por el suelo

Seguro que alguna vez has tenido que arrastrar un objeto muy pesado por el suelo y te has dado cuenta de la importancia del rozamiento. Quizá hayas observado que cuando la fuerza aplicada, en lugar de tirar horizontalmente, apunta ligeramente hacia arriba, resulta más sencillo trasladarlo. Pues bien, imagina que estás en tu casa y tu familia, que confía plenamente en tus conocimientos de física, te consulta sobre la forma óptima de arrastrar un pesado armario a lo largo del pasillo. Veamos el enunciado del problema:

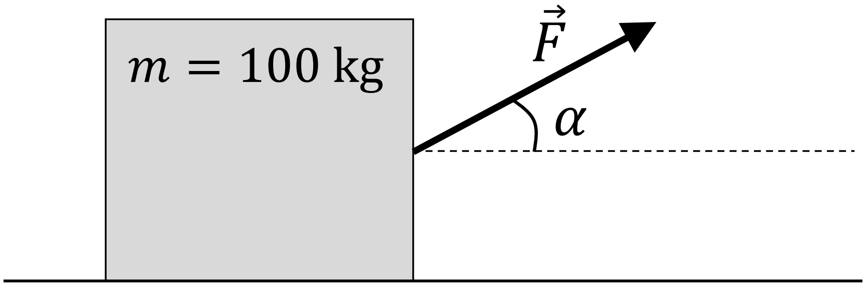
Sea un armario de $100\ \mathrm{kg}$ situado sobre el suelo horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento entre ambos $\mu = 1$.

a) Calcula la fuerza mínima, F_m, y su ángulo α con respecto a la horizontal, capaz de desplazar el armario.

b) Calcula la aceleración si se duplica la fuerza calculada en el primer apartado ($F = 2F_m$) manteniendo el ángulo α.

c) Comenta la situación del apartado anterior.

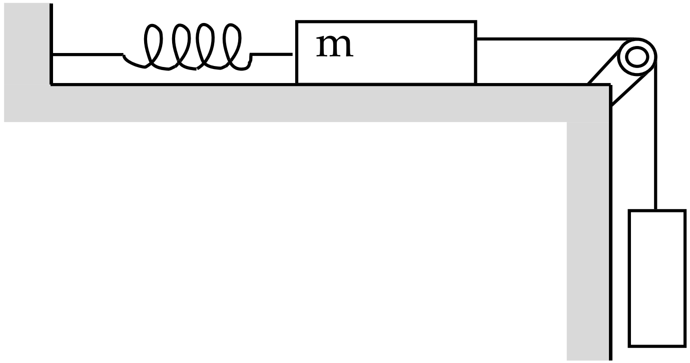
NOTA: Supondremos el mismo valor, $\mu = 1$, para el coeficiente de rozamiento estático y dinámico y tomaremos $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.



Ver solución 75

76. Polea y muelle

Un bloque m_2 de 4 kg cuelga de una cuerda que pasa por una polea. Por el otro extremo la cuerda está atada a un bloque m_1 de 6 kg que está en contacto con un muelle según indica la figura.



El coeficiente de fricción cinética (únicamente para la masa m_1) es 0,2 y la constante del muelle 180 N/m. El muelle está inicialmente comprimido 30 cm y en cierto momento el sistema se deja en libertad.

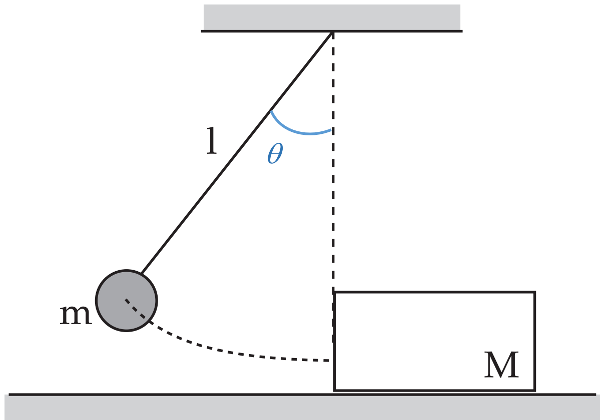
Determina la velocidad de los bloques cuando el de 4 kg ha descendido 40 cm.

Nota: Supondremos que la cuerda está siempre tensa (esto no sucede si la constante elástica del muelle es muy elevada). Por otro lado, hay dos posibles interpretaciones, que el muelle esté o no soldado a la masa m_1, con lo cual existen dos soluciones a este problema.

Ver solución 76

77. Péndulo que golpea una caja

Siguiendo el esquema de la figura, se suelta un péndulo de longitud $l = 120\ \mathrm{cm}$ y de masa $m = 100\ \mathrm{g}$ desde una posición inicial que forma un ángulo $\theta_\mathrm{i} = 37°$ con la vertical. Después de la colisión con la masa $M = 300\ \mathrm{g}$, el péndulo rebota hasta una posición $\theta_\mathrm{f} = 20°$ y la masa M se desliza por la superficie hasta detenerse. Si el coeficiente de fricción de la superficie con la masa M vale $\mu = 0{,}2$, calcula la distancia que recorre M hasta detenerse.



<u>NOTA</u>: Como sabes en la colisión se conserva el momento lineal. Se debe tener en cuenta que esta es una magnitud vectorial.

Ver solución 77

78. Agujero en el saco de harina

Con motivo de las fiestas de Navidad, se va a celebrar en el instituto un concurso de cocina navideña. Alberto decide participar haciendo un gran roscón de Reyes. Para ir preparándolo, baja desde su casa, (en un tercer piso sin ascensor y a 15 m sobre el nivel de la calle) a comprar 5 kg de harina. A la vuelta se encuentra a su vecina Marta en el portal, y charlan durante un rato, en el que se hace un agujerillo en la bolsa, de forma que se va pendiendo harina a un ritmo constante. Tras despedirse de Marta, empieza a subir la escalera también a ritmo constante y cuando llega a casa, 45 s después, solo le quedan en la bolsa 3 kg de harina.

¿Qué trabajo ha realizado Alberto para subir la harina?

Ayuda: recuerda que el trabajo que realiza una fuerza al desplazarse se puede calcular como el área bajo la curva de F y el eje OX.

Ver solución 78

ÍNDICE

79. Partícula moviéndose

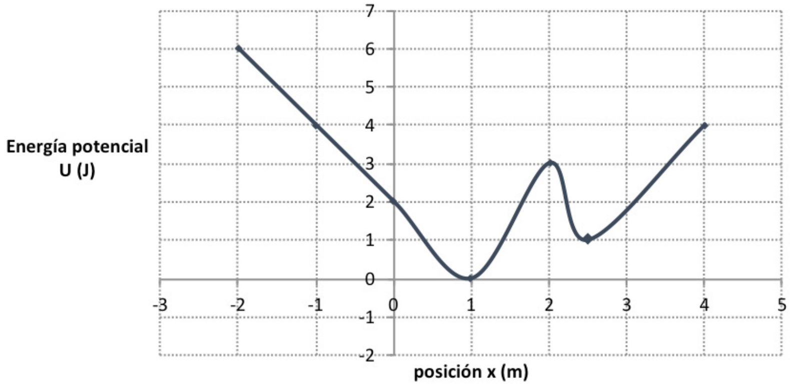
Una partícula se mueve sobre el eje X dentro de un campo conservativo unidimensional. La gráfica de la energía potencial de dicha partícula en función de su posición está representada en la figura adjunta.

a) ¿En qué posiciones de la partícula la fuerza que actúa sobre ella es cero?

b) Si colocamos la partícula con velocidad cero en la posición $x = 0$, ¿cómo se moverá?

c) ¿Cuál es la energía cinética mínima que hay que suministrar a la partícula en el punto $x = 0$ para que pueda alcanzar la posición $x = 4$? Describir su movimiento.

d) ¿Cuál sería el posible movimiento de la partícula si tuviera una energía mecánica de 2 J en la posición $x =$ -1?



Ver solución 79

80. Subidón de adrenalina bajo el puente

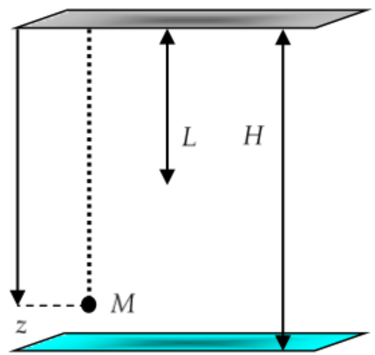
Entre los llamados deportes de riesgo ha alcanzado gran popularidad el *bungee jumping* (en castellano *goming*, *puenting*). Consiste en dejarse caer colgado de una cuerda elástica atada a un sólido amarre. La elasticidad de la cuerda frena progresivamente la caída y el saltador oscila verticalmente colgado de la cuerda elástica (*goming*).

Un día decides ir con los amigos a practicar *goming* y te pones en contacto con la afamada empresa de multiaventura *Adrenaline Downloads*, pero antes quieres hacer unos cálculos sobre la Física del salto.

La descripción del movimiento es sencilla. Te dejas caer con velocidad inicial nula atado a una cuerda elástica de longitud L desde un puente de altura H sobre el agua ($L < H$, ¡por supuesto!). Inicialmente (*primera parte de la caída*) tu velocidad crece con la aceleración de la gravedad g y caes en caída libre una distancia L, momento en que la cuerda empezará a estirarse. La creciente fuerza recuperadora elástica va frenando progresivamente tu caída y la aceleración disminuye hasta anularse cuando g se compensa con el estiramiento de la cuerda (*segunda parte*). Por fin la aceleración neta cambia de signo hasta anular la velocidad en el punto más bajo de la caída (*tercera parte*). A continuación, volverías de nuevo hacia arriba y hacia abajo …

Para simplificar los cálculos supondremos que la masa de la cuerda es despreciable, que el saltador se comporta como una masa puntual y que no hay disipación de energía durante el movimiento.

I. Pues bien, sea M la masa del saltador (tu masa) y se sabe que, en la caída, en el punto más bajo de tu trayectoria, llegarás exactamente a rozar el agua. ¿Eres capaz de responder a estas preguntas?



a) ¿Cuánto vale la constante recuperadora elástica k de la cuerda?

b) ¿Cuál es la aceleración a del saltador en función de su posición z? Debes distinguir las tres diferentes zonas señaladas. Haz una gráfica de $a = f(z)$. (Por sencillez, se recomienda medir la posición del saltador, coordenada z, desde el puente, es decir, positiva hacia abajo).

c) ¿Cuál es la velocidad máxima v_m durante la caída? ¿Dónde se alcanza?

d) Haz una gráfica aproximada de $v = f(z)$. Para ello no hagas los cálculos matemáticos, solo se pide una gráfica aproximada.

e) ¿Cuál es la aceleración máxima a_m en la caída? ¿Dónde se alcanza?

II. Merece la pena hacer unos números. Supongamos los siguientes datos: $H = 40$ m, $L = 20$ m y $M = 50$ kg. Tomando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, calcula

a) El valor de la constante elástica k.

b) La velocidad v_m y aceleración a_m máximas alcanzadas.

III. En la práctica, la oscilación se amortigua por la disipación de energía (fricción con el aire y cuerda no perfectamente elástica) y el saltador, tras ejecutar pequeñas oscilaciones, acabará parándose a una distancia $L+Mg/k$ debajo del punto de apoyo. ¿Cuál es su periodo? ¿Se trata de un oscilador armónico?

IV. Te acompaña un amigo que no entiende de Física y también quiere tirarse. Le aconsejas que no lo haga porque está muy gordo, pesa el doble que tú, y chocaría violentamente contra el agua. Con el fin de garantizar la integridad de tu amigo decides doblar la cuerda formando otra de longitud $L/2$:

a) Calcula la nueva constante elástica k' de la cuerda doblada.

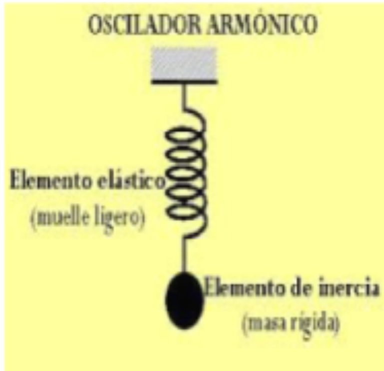
b) Si la masa de tu amigo es 100 kg (aún lo seguiremos considerando como una masa puntual; ya ves, cosas de la Física...) ¿A qué distancia mínima, h, del agua llegará en su caída? ¿Se mojará?

Ver solución 80

81. Determinación de la constante recuperadora de un oscilador armónico

Como es sabido un oscilador armónico es un sistema constituido por un elemento deformable (resorte) con un extremo fijo y el otro unido a un cuerpo de masa m. En ausencia de fuerzas exteriores el sistema se encuentra en la posición de equilibrio.

Al desviarlo verticalmente hacia abajo, por la acción de una fuerza externa, y dejar el sistema en libertad el cuerpo comienza a oscilar describiendo una trayectoria rectilínea entre dos posiciones extremas, pasando por la posición de equilibrio.



En el oscilador ideal no hay amortiguamiento debido a la interacción con el aire, ni pérdidas de energía por rozamiento. En esa situación, el periodo de oscilación permanece constante y su valor depende de la naturaleza del resorte y de la masa del cuerpo suspendido. La dependencia con la naturaleza del resorte se engloba en una constante (constante recuperadora) que depende del material del que está construido y de sus magnitudes geométricas (longitud, sección, etc.). En consecuencia, para un resorte dado, su periodo de oscilación dependerá de la masa del cuerpo al que está unido. Con ello tenemos dos magnitudes medibles al hacer oscilar el sistema: la masa del cuerpo m y el periodo de oscilación T, y se trata de establecer la ecuación matemática que las relaciona:

$$m = f(T)$$

El material necesario es el siguiente:

- Soporte
- Resorte

- Portapesas
- Pesas calibradas
- Cronómetro

Una vez fijado el resorte al soporte se suspende del extremo libre el portapesas. Mediante una fuerza de tracción se desplaza levemente el sistema de la posición de equilibrio y se mide el tiempo que tarda en dar un número de oscilaciones (10, 20, ...). A partir de él, se determina el periodo de cada oscilación. Repitiendo el procedimiento para diferentes masas, estos fueron los valores obtenidos.

m(g)	0	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
T(s)	0	0,783	0,818	0,849	0,890	0,918	0,951	0,983	1,01	1,05	1,07	1,09	1,12	1,14	1,17

a) Realizar el análisis gráfico de los datos obtenidos. Aunque la variable independiente es la masa, aconsejamos representar el periodo en abscisas.

b) Realizar una transformación para que los datos tengan una tendencia lineal.

c) Obtener la recta de regresión determinando su pendiente y su margen de error.

d) Establecer la ecuación matemática que relaciona "m-T". Esta es la ecuación experimental (empírica).

e) Realizar un estudio analítico (ley de Hooke, 2ª ley de Newton, ...) para establecer la ecuación teórica que relaciona ambas magnitudes.

f) Por comparación de las ecuaciones experimental y teórica obtener la constante recuperadora del resorte empleado.

Ver solución 81

75. Arrastrando una caja por el suelo: solución

a) Se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$F\cos\alpha = F_R$$

$$F\,\mathrm{sen}\,\alpha + N = mg$$

Como $F_R = \mu N$, se tiene que

$$F\cos\alpha = \mu(mg - F\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

Por tanto,

$$F_m = \frac{\mu\, m\, g}{\cos\alpha + \mu\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Derivando:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \mu\, m\, g \frac{\mathrm{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha}{(\cos\alpha + \mu\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}$$

Anulando esta derivada se obtiene el ángulo para fuerza mínima (*trivial comprobar que es mínimo**):

$$\tan\alpha = \mu$$

Y por tanto la fuerza mínima necesaria:

$$F_m = \frac{\mu\, m\, g}{\cos\alpha + \tan\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{\mu\, m\, g}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

En nuestro caso, $\mu = 1$, el ángulo será $\alpha = 45^\circ$ y la fuerza

$$F_m = \frac{\mu\, m\, g}{\sqrt{1+\mu^2}} = 50\sqrt{2}\ g \approx\ 693\ \mathrm{N}$$

b) Si se duplica la fuerza y mantenemos el mismo ángulo α (es decir, $\tan\alpha = \mu$) tendremos que la aceleración, a, satisface le ecuación:

$$m\,a = 2F_m \cos\alpha - \mu(mg - 2F_m \operatorname{sen}\alpha)$$

$$m\,a = 2F_m(\cos\alpha + \mu \operatorname{sen}\alpha) - \mu\, m\, g$$

$$m\,a = 2\frac{\mu\, m\, g}{\sqrt{1+\mu^2}}\sqrt{1+\mu^2} - \mu\, m\, g$$

$$m\,a = 2\,\mu\, m\, g - \mu\, m\, g = \mu\, m\, g$$

$$a = g$$

c) Este es un resultado muy interesante. Para ese valor de la fuerza, $2F_m$, su componente vertical compensa exactamente el peso, $2F_m \sin\alpha = mg$, y no hay fricción, $F_R = 0$. Y la componente horizontal, también equivale al peso, $2F_m \cos\ \alpha = mg$, ya que en nuestro caso $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$. Las fuerzas verticales se compensan y la única resultante, la horizontal mg, arrastra obviamente el armario con aceleración g.

Puede decirse que ese valor, $2F_m$, es un valor máximo por encima del cual el armario despega del suelo y describiría un movimiento con aceleración vertical y horizontal. Es decir, si aplicamos una fuerza $F > 2F_m$, las aceleraciones vertical y horizontal serían respectivamente $a_v = (F \sin\alpha - mg)/m$ y $a_h = F\cos\alpha/m$.

* Puede comprobarse fácilmente que para ese ángulo la fuerza es efectivamente mínima, y además que:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{1+\mu^2}$$

Veamos:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\,(1+\tan^2\alpha)$$

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = 1/\cos\alpha$$

Multiplicando ambas y haciendo la raíz cuadrada:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

Es decir, en nuestro caso:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+\mu^2}$$

Ver enunciado 75

76. Polea y muelle: solución

Según el Teorema del trabajo-energía cinética sobre el conjunto formado por el muelle y las masas ($m_1 + m_2$):

$$W_{12} = \Delta Ec$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 \Rightarrow W_{12} = \frac{1}{2}(6+4)v_f^2 = 5v_f^2$$

Para calcular el trabajo realizado sobre el sistema total:

$$W_{12} = W_{muelle} + W_{m_2} + W_{rozamiento} \qquad (1)$$

Para determinar el trabajo debido al muelle, al tratarse de una fuerza conservativa:

$$W_{muelle} = -\Delta E_{muelle} = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

hay dos posibles interpretaciones:

Si el muelle está soldado a $\mathrm{m_1}$, entonces x_1=-0,3cm y x_2=0,1cm, así:

$$W_{muelle,A} = \frac{1}{2}180(0{,}3^2 - 0{,}1^2) = 7{,}2 \text{ J}$$

Si el muelle no está soldado (es como un "pinball"), entonces x_1 = -0,3 cm y x_2 = 0 cm y $W_{muelle,B} = \frac{1}{2}180(0{,}3^2) = 8{,}1 \text{ J}$

Para determinar el trabajo debido a la variación de energía potencial gravitatoria de la masa m_2:

$$W_{m_2} = -\Delta E_{gravitaria} = m_2 g(h_1 - h_2) = 4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}4 = 15{,}68 \text{ J}$$

Para determinar el trabajo debido a la fuerza de rozamiento:

$$W_{rozamieneto} = -\vec{F_r} \cdot \vec{d} = -(\mu \cdot m_1 g)d = -0{,}2 \cdot 6 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}4 = -4{,}704 \text{ J}$$

Sustituyendo todos estos valores en la expresión (1)

$$W_{12,A} = 18.176 \text{ J} = 5v_{f,A}^2 \Rightarrow v_{f,A} = 1{,}91 \text{ m/s}$$

$$W_{12,B} = 19.076 \text{ J} = 5v_{f,B}^2 \Rightarrow v_{f,B} = 1{,}95 \text{ m/s}$$

Ver enunciado 76

77. Péndulo que golpea una caja: solución

Nos fijamos en cuatro instantes de la situación que plantea el problema:

1º El péndulo cae, hasta justo el instante en el que choca con la masa M. En este caso se conserva la energía mecánica del sistema:

$$\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0$$

$$\frac{1}{2} m {v_A}^2 + mg\Delta h_A = 0$$

siendo $\Delta h_A = lcos\theta_i - l$, por lo tanto:

$$v_A = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_i)} = 2{,}176 \text{ m/s}$$

2º El péndulo tendrá una velocidad después del choque, por lo que asciende de nuevo. Análogamente a la situación anterior, se conserva la energía mecánica del sistema:

$$\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0$$

$$-\frac{1}{2} m {v_B}^2 + mg\Delta h_B = 0$$

siendo $\Delta h_B = l - lcos\theta_f$, por lo tanto:

$$v_B = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\theta_f\right)} = 1{,}191 \text{ m/s}$$

3º Colisión entre las masas. Se verifica: $\Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow mv_A = -mv_B + Mv_f$

$$v_f = \frac{m(v_A + v_B)}{M} = 1{,}122 \text{ m/s}$$

4° La energía cinética del bloque M tras la colisión será igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento $R = \mu N$:

$$\Delta E_c = W_R$$

$$\frac{1}{2} M {v_f}^2 = Rd$$

En este caso $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = P \Rightarrow R = \mu M g$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} M {v_f}^2 = \mu M g d$$

Finalmente, la distancia recorrida por el bloque M es:

$$d = \frac{{v_f}^2}{2\mu g} = 0{,}321 \text{ m}$$

Ver enunciado 77

78. Agujero en el saco de harina: solución

El trabajo que realiza Alberto para subir la harina es el producto escalar de la fuerza que aplica por el desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{L}$$

La fuerza (igual al peso de la harina, pero de sentido contrario) va en la dirección OY positiva y la proyección del desplazamiento L sobre esa dirección es el desnivel total que tiene que superar Alberto (15 m).

Como el peso de la harina varía, el trabajo ΔW_i que realiza para subir un pequeño tramo Δy también cambia, y para calcular el trabajo total habrá que sumar todas esas pequeñas contribuciones $\Delta W_i = F_i$ Δy. (En matemáticas esa operación se llama integrar.)

El peso de la harina va variando linealmente con el tiempo. Llamando r al ritmo con el que se escapa de la bolsa, después de un tiempo t queda:

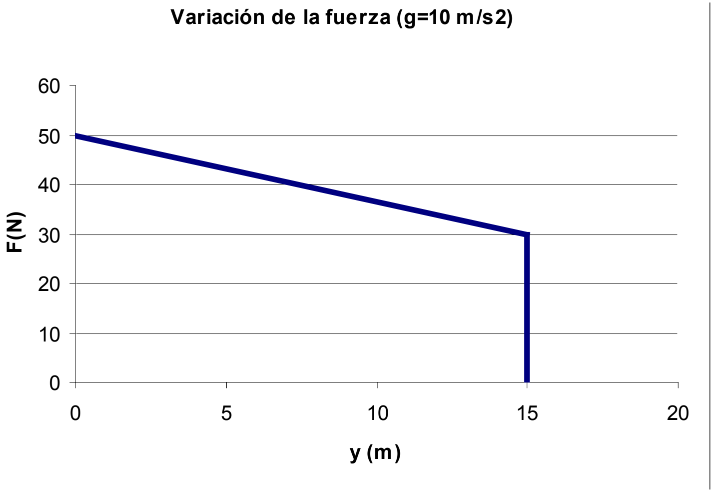
$$M(t) = M_0 - r \cdot t$$

En la subida, la altura y varía también linealmente con el tiempo, de forma que se puede expresar M en función de y:

$$y(t) = v_y \cdot t \rightarrow M(y) = M_0 - r \cdot \frac{y}{v_y}$$

Por tanto, el peso de la harina (es decir, la fuerza aplicada) varía de la misma forma con el desplazamiento y.

$$F(y) = M(y) \cdot g = \left(M_0 - r \cdot \frac{y}{v_y}\right) \cdot g$$



El trabajo es el área comprendida entre la curva de F y el eje de abscisas. Por lo tanto, tomando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$:

$$W = \frac{30 + 50}{2} \cdot 15 = 600\ \mathrm{J}$$

Ver enunciado 78

79. Partícula moviéndose: solución

a) En un campo conservativo unidimensional se cumple:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Siendo U la función que determina la energía potencial de la partícula en función de su posición x.

Por tanto, la fuerza será cero en aquellas posiciones en las que la energía potencial adquiera un valor máximo o mínimo. De acuerdo con la gráfica las posiciones en las que la fuerza que actúa sobre la partícula es cero son:

$$x = 1\ \mathrm{m} \qquad x = 2\ \mathrm{m} \qquad x = 2{,}5\ \mathrm{m}$$

b) En la posición $x = 0$ la partícula tiene una energía potencial de $2\ \mathrm{J}$. Como su velocidad es cero, la energía cinética es cero.

En un campo conservativo la energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, es constante

$$E = E_c + U$$

$$E = 2\ \mathrm{J}$$

El cuerpo iniciará su movimiento en el sentido en el que disminuye su energía potencial, es decir, hacia valores positivos de la posición, sin superar la energía mecánica el valor de $2\ \mathrm{J}$.

Al disminuir su energía potencial aumenta su energía cinética hasta la posición $x = 1\ \mathrm{m}$ en la que la energía potencial se hace cero y la energía cinética será de $2\ \mathrm{J}$.

A partir de $x = 1\ \mathrm{m}$ la energía potencial vuelve a aumentar y por lo tanto la energía cinética disminuye hasta llegar a la posición $x = 1{,}7\ \mathrm{m}$ en la que la energía potencial vuelve a tener el valor de $2\ \mathrm{J}$ y por lo tanto la energía cinética y la velocidad son cero.

Al llegar a esta posición se repetirá el movimiento anterior en sentido contrario.

El cuerpo oscila entre las posiciones $x = 0$ y $x = 1{,}7\ \mathrm{m}$, en las que la velocidad es cero, pasando por $x = 1\ \mathrm{m}$ con velocidad máxima.

c) En la posición $x = 4\ \mathrm{m}$ la partícula posee una energía potencial de $4\ \mathrm{J}$. La energía cinética mínima que hay que suministrar será la necesaria para que llegue a $x = 4\ \mathrm{m}$ con velocidad cero, por tanto, la energía mecánica de la partícula en dicha posición es $E = 4\ \mathrm{J}$.

La energía mecánica se mantiene constante por lo que la energía en el punto $x = 0$ será:

$$E = E_c + U$$

$$4\ J = E_c + 2\ J$$

$$E_c = 2\ \mathrm{J}$$

Es la energía cinética mínima que hay que comunicar a la partícula.

La partícula comienza su movimiento en $x = 0$ con una determinada velocidad ($E_c = 2\ \mathrm{J}$). Entre $x = 0$ y $x = 1\ \mathrm{m}$ disminuye la energía potencial por lo que aumenta la energía cinética, aumentando la velocidad hasta llegar a $x = 1\ \mathrm{m}$ donde la energía potencial se hace cero y la energía cinética y la velocidad son máximas ($E_c = 4\ \mathrm{J}$).

Entre $x = 1\ \mathrm{m}$ y $x = 2\ \mathrm{m}$ vuelve a aumentar la energía potencial por lo que disminuyen la energía cinética y la velocidad hasta llegar a $x = 2\ \mathrm{m}$ donde $U = 3\ \mathrm{J}$ y $E_c = 1\ \mathrm{J}$.

Entre $x = 2\ \mathrm{m}$ y $x = 2{,}5\ \mathrm{m}$ la energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta. En $x = 2{,}5\ \mathrm{m}$ se tiene que $U = 1\ \mathrm{J}$ y $E_c = 3\ \mathrm{J}$

A partir de $x = 2{,}5\ \mathrm{m}$ la energía potencial aumenta hasta llegar a $x = 4\ \mathrm{m}$ donde la energía potencial vale $U = 4\ \mathrm{J}$ y por tanto la energía cinética y la velocidad se hacen cero.

La partícula lleva un movimiento acelerado entre $x = 0$ y $x = 1\ \mathrm{m}$.

Entre $x = 1\ \mathrm{m}$ y $x = 2\ \mathrm{m}$ el movimiento es retardado

Entre $x = 2\ \mathrm{m}$ y $x = 2{,}5\ \mathrm{m}$ el movimiento vuelve a ser acelerado

Entre $x = 2{,}5\ \mathrm{m}$ y $x = 4\ \mathrm{m}$ el movimiento es retardado hasta llegar a $x = 4\ \mathrm{m}$ con velocidad cero.

d) En $x = \text{-}1\ \mathrm{m}$ la energía potencial es $4\ \mathrm{J}$

$$E = E_c + U$$

$$2J = E_c + 4\,J$$

$$E_c = -2\ \mathrm{J}$$

La energía cinética nunca puede ser negativa por lo que el valor de la energía mecánica $E = 2\ \mathrm{J}$ es imposible en $x = \text{-}1\ \mathrm{m}$.

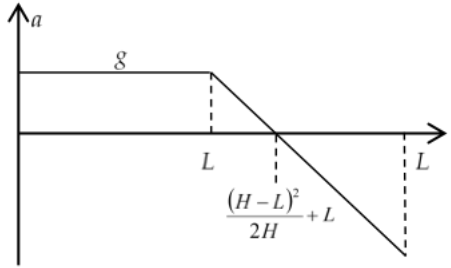
Ver enunciado 79

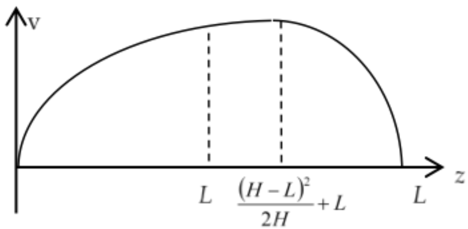
80. Subidón de adrenalina bajo el puente: solución

I. El balance de energía permite escribir: $MgH = \frac{1}{2}k(H-L)^2$.

a) Por tanto: $k = \frac{2MgH}{(H-L)^2}$.

b) En la primera parte, $0 < z < L$, y $a = g$. En la segunda y tercera partes, $L < z < H$, y $a = g - \frac{k}{M}(z-L)$, como se ve en la gráfica:





c)

La velocidad es máxima cuando $a = 0$, y por tanto para $z_0 = \frac{Mg}{k} + L = \frac{(H-L)^2}{2H} + L$. El balance de energía se escribe ahora $Mgz_0 = \frac{1}{2}(z_0 - L)^2 + \frac{1}{2}Mv_m^2$. Sustituyendo k y z_0 por las expresiones obtenidas anteriormente, podemos llegar a la expresión para la velocidad máxima del saltador: $v_m = \sqrt{2gL + \frac{g(H-L)^2}{2H}}$.

d) La gráfica aproximada de la velocidad es como se muestra en la figura. Nótese cómo para $0<z<L$ la velocidad crece linealmente con el tiempo, pero cuando representamos $v(z)$ obtenemos evidentemente una parábola.

e) Los valores extremos de la aceleración corresponden a sus valores inicial y final $a_i = g$ y $a_f = g - \frac{k}{M}(H-L) = g\left(1 - \frac{2H}{H-L}\right)$. Para cualquier valor de la longitud de la cuerda $0<L<H$ el valor máximo del módulo de la aceleración es su valor final. Así, $a_m = g\left(1 - \frac{2H}{H-L}\right)$.

II. Con esos datos numéricos tenemos:

$$k = \frac{2MgH}{(H-L)^2} = 100\ \mathrm{N/m}$$

$$v_m = \sqrt{2gL + \frac{g(H-L)^2}{2H}} = \sqrt{450}\ \mathrm{m/s} = 21.21\ \mathrm{m/s} = 76{,}37\ \mathrm{km/h}$$

$$a_m = g\left(1 - \frac{2H}{H-L}\right) = -30\ \mathrm{m/s^2}$$ (dirigida hacia arriba).

III. Se trata de oscilaciones amortiguadas por lo que no corresponden exactamente a un movimiento armónico. Su periodo es $T \approx 2\pi\sqrt{M/k} = \pi\sqrt{2}\,\mathrm{s}$. Además, la cuerda sólo tiene comportamiento elástico cuando se estira. Cuando el saltador está por encima de su punto final de equilibrio, $L+Mg/k$, y si la amplitud de oscilación es grande y la cuerda se destensa, sube y baja libremente con aceleración g durante una parte de la oscilación, mientras que cuando está por debajo experimenta la aceleración correspondiente a la fuerza recuperadora elástica.

IV. Si con una masa de 50 kg se llega justo a rozar la superficie del agua, está claro que con 100 kg el saltador chocaría violentamente con ella. Para evitarlo hay dos procedimientos. Si disminuimos la longitud de la cuerda reducimos también su elongación y aumentamos su constante elástica. Y si ponemos varias cuerdas en paralelo sumamos sus constantes elásticas.

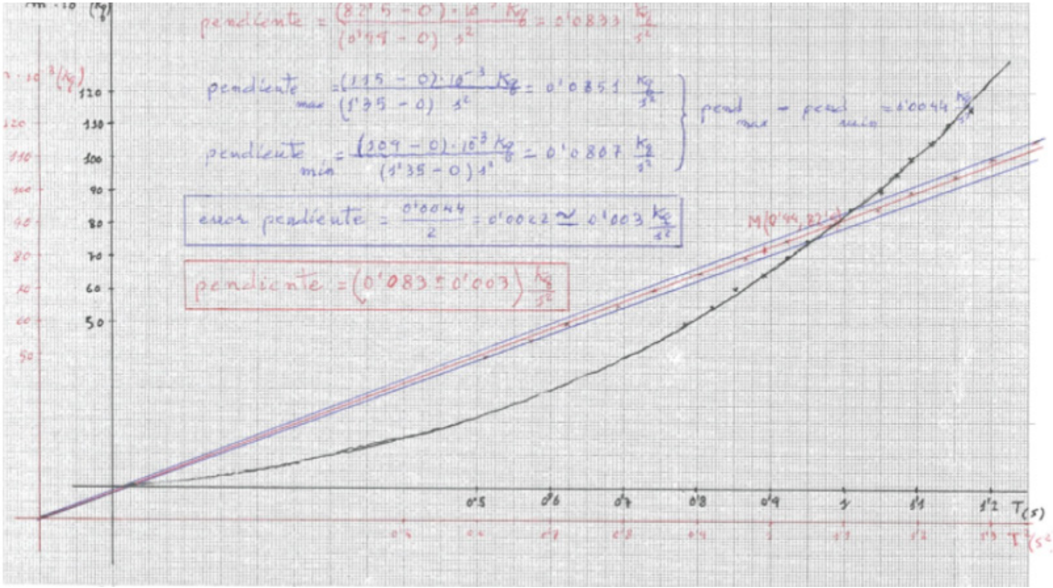
a) Si doblamos la cuerda tendremos una constante $2k$ en cada una de sus mitades y, sumando, la constante recuperadora elástica de la cuerda doblada será $k' = 4k = 400\ \mathrm{N/m}$.

b) Si la masa del nuevo saltador es 100 kg, la distancia mínima alcanzada, h, sobre el nivel del agua cumplirá $Mg(M-h) = \frac{1}{2}4k\left[\left(H-\frac{L}{H}\right)-h\right]^2$ y $100g(40-h) = \frac{1}{2}400\left[\left(40-\frac{20}{2}\right)-h\right]^2$, cuyas solución es $\mathrm{h} = 20\ \mathrm{m}$. (La otra solución, $\mathrm{h} = 35\ \mathrm{m}$, no vale pues la cuerda mide solamente 10 m). Luego el saltador no llega a mojarse.

Ver enunciado 80

81. Determinación de la constante recuperadora de un oscilador armónico: solución

a) En la siguiente imagen se ha realizado, en negro, la gráfica "m-T" donde se observa una relación parabólica



b) En la imagen anterior, se ha representado (en rojo) "m-T^2" observándose una tendencia lineal. Estos son los datos representados:

m (g)	0	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
T(s)	0	0,613	0,669	0,721	0,792	0,843	0,904	0,966	1,02	1,10	1,145	1,188	1,254	1,299	1,369

d) Como se observa en la imagen el valor obtenido para la pendiente es:

$$pendiente = (0{,}083 \pm 0{,}003)\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

e) La ecuación experimental se corresponde con la ecuación de la recta de regresión:

$$m = (0{,}083 \pm 0{,}003).T^2$$

f) Estudio analítico:

- Por la ley de Hooke el alargamiento producido en el resorte depende de la fuerza aplicada.

$$F_{(t)} = -K \cdot y(t) \qquad (1)$$

Donde "K" es la constante recuperadora del resorte e "y" es la deformación producida por la fuerza con respecto a la posición de equilibrio en cada instante (elongación).

- Al dejar el sistema en libertad, la fuerza recuperadora "$F(t)$" acelera la masa "m" hacia la posición de equilibrio. En consecuencia:

$$F(t) = m \cdot a(t) \qquad (2)$$

Donde "$a(t)$" es la aceleración en cada instante.

- La aceleración y la elongación para un oscilador armónico están relacionadas por la siguiente expresión:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot y(t) = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y(t) \qquad (3)$$

- Realizando operaciones se obtiene la ecuación teórica:

$$m = \frac{K}{4\pi^2} . T^2$$

g) Al comparar ambas ecuaciones se obtiene que:

$$(0{,}083 \pm 0{,}003) = \frac{K}{4\pi^2}$$

En consecuencia $K = (3{,}276 \pm 0{,}118)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

Ajustando el margen de error a una sola cifra significativa y redondeando el valor de "K", queda:

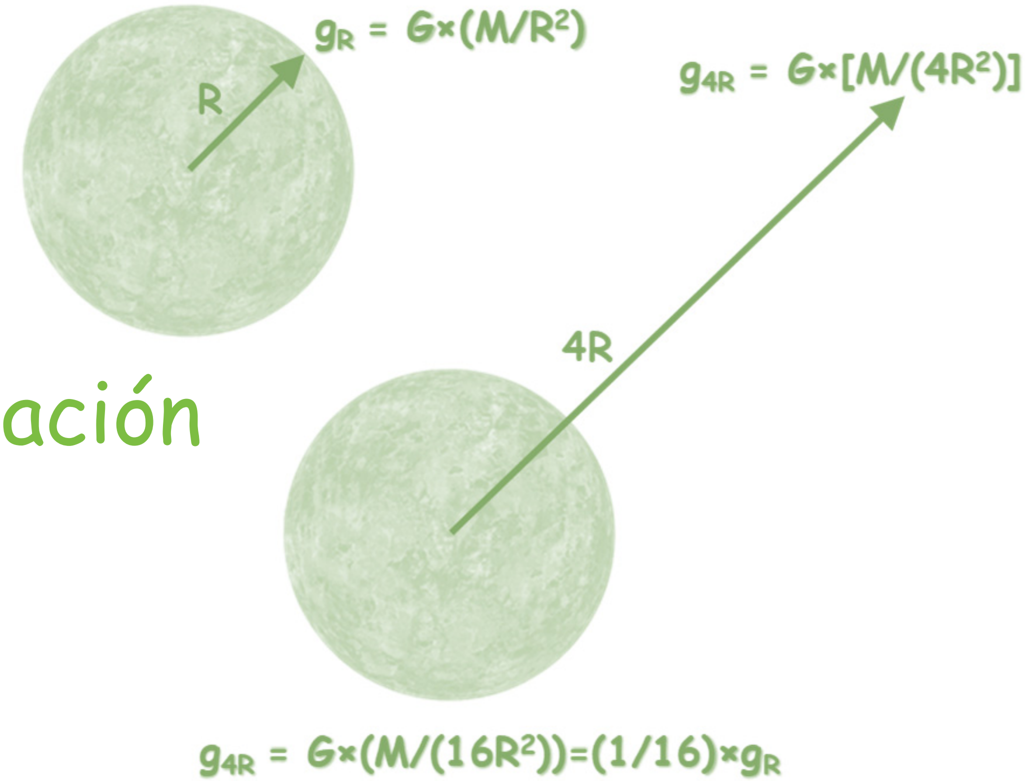
$K = (3{,}3 \pm 0{,}2)\frac{kg}{s^2}$ o bien $K = (3{,}3 \pm 0{,}2)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

Ver enunciado 81

ÍNDICE

Desafíos

Gravitación

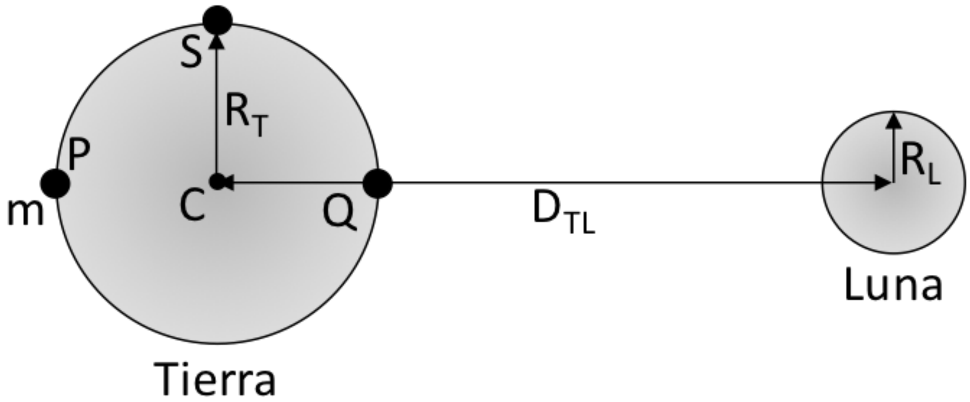


82. El origen de la fuerza de marea

El origen de las mareas se debe a que la Tierra es un cuerpo extenso y el campo gravitatorio producido por la Luna o por el Sol no es uniforme en todos sus puntos, ya que unos están más cercanos y otros más alejados de dichos cuerpos celestes.

La fuerza de marea sobre un objeto de masa m en una determinada posición de la superficie de la Tierra se define como la diferencia entre la fuerza de atracción que otro cuerpo celeste ejerce sobre él en dicha posición, y la fuerza de atracción que ejercería sobre tal objeto si estuviese en el centro de la Tierra.

Para el sistema Tierra-Luna, mostrado en la figura, consideremos la Tierra (radio R_T y masa M_T) y la Luna (radio R_L y masa M_L) inmóviles y sin rotar en el espacio, estando sus centros separados una distancia D_{TL}.



a) Dibuja la fuerza de marea causada por la Luna en los puntos P, Q y S indicando su dirección y sentido.

b) Teniendo en cuenta que $D_{TL} >> R_T$, obtén una expresión aproximada para el valor de la fuerza de marea en los tres puntos del apartado a).

c) Escribe la expresión análoga a la del apartado anterior para la fuerza de marea causada por el Sol en el punto P de la Tierra teniendo en cuenta que se cumple que la distancia de la Tierra al Sol es $D_{TS} >> R_T$.

A partir de ahora usa los siguientes valores numéricos:

$$R_T = 6{,}37\times10^{6}\ \mathrm{m}$$

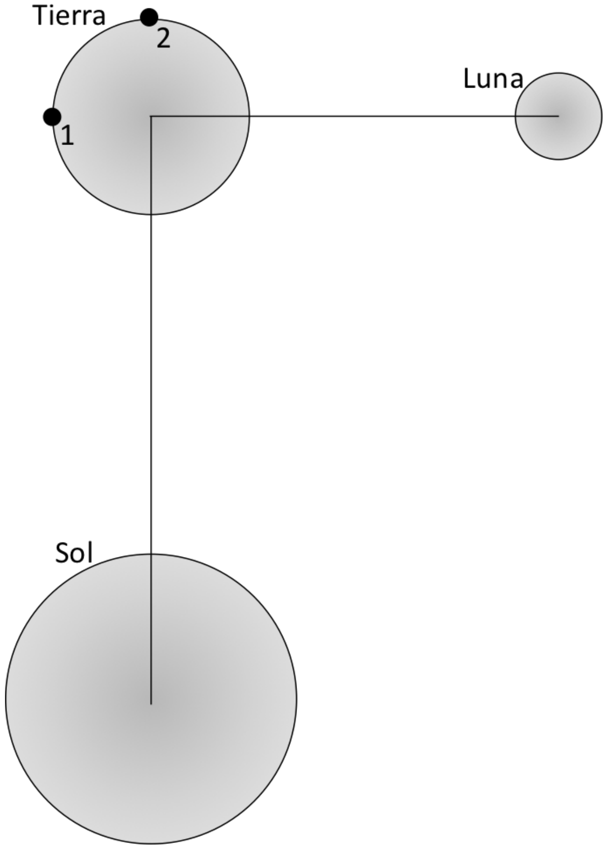
$$M_T = 5{,}98\times10^{24}\ \mathrm{kg},\ M_L = 7{,}35\times10^{22}\ \mathrm{kg},\ M_S = 1{,}98\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

$$D_{TL} = 3{,}84\times10^{8}\ \mathrm{m},\ D_{TS} = 1{,}50\times10^{11}\ \mathrm{m}$$

d) Para el punto P, calcula el cociente entre las fuerzas de marea obtenidas en los apartados b) y c). ¿Qué conclusión obtienes?

e) Para el punto P, calcula el cociente entre la fuerza de marea obtenida en el apartado b) y la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre una masa m situada en su superficie. ¿Qué conclusión obtienes?

f) Con la información obtenida en los apartados anteriores, dibuja la fuerza neta de marea en los puntos 1 y 2 para el sistema Tierra-Sol-Luna como el mostrado en la figura, indicando su dirección y sentido. ¿En cuál de los dos puntos tendrá mayor magnitud?

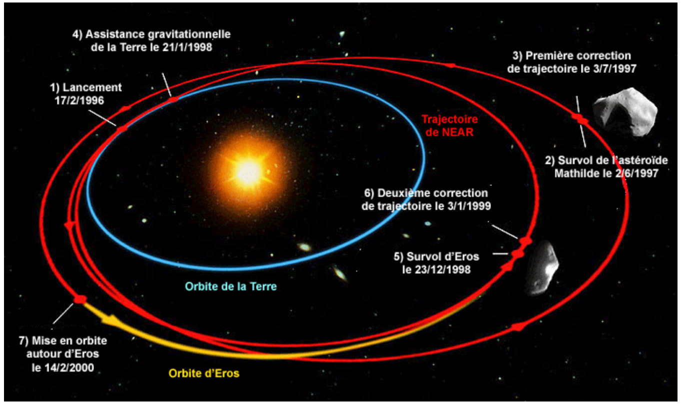


Ver solución 82

83. Rosetta en su rumbo al cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko

La nave espacial Rosetta, construida por la Agencia Espacial Europea (ESA), fue lanzada al espacio en marzo de 2004. Su misión era alcanzar el cometa *67P/Churyumov-Gerasimenko* con el fin de depositar en él la sonda Philae para estudiar su composición y acercarnos más al conocimiento del origen del Universo.

Al no poder comunicarle la enorme cantidad de energía necesaria para alcanzar directamente el cometa, Rosetta ha viajado durante más de 10 años, dando 4 veces la vuelta al Sol, siendo acelerada tres veces por el tirón gravitacional de la Tierra (en 2005, 2007 y 2009), una vez por el de Marte (en 2007) y por los de los asteroides Stein (en 2008) y Lutetia (en 2010). En mayo de 2014 se colocó en la órbita del cometa, al que alcanzó en agosto de 2014. En diciembre de 2014 la sonda Philae descendió finalmente sobre la superficie del cometa.



El tirón gravitacional consiste en aprovechar un campo gravitatorio (Tierra, Marte, etc.) para incrementar la velocidad de la nave y desviarla en una dirección adecuada para alcanzar su objetivo, ya que al "entrar en el campo gravitatorio de un planeta la nave es "arrastrada" por este en su movimiento orbital alrededor del Sol.

La figura adjunta (a la vuelta de la hoja) muestra la trayectoria esquemática de la nave Rosetta acelerada por Marte.

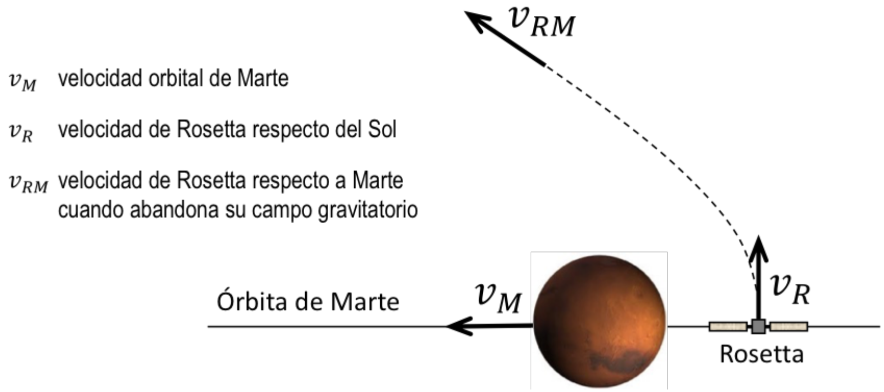
a) Calcula la velocidad orbital de Marte alrededor del Sol, suponiendo que su órbita es circular.

Cuando la nave Rosetta se encuentra a una distancia de la superficie de Marte de $250\ \mathrm{km}$ se apagan los motores. Su velocidad en ese momento es de $20\ \mathrm{km/s}$, medida respecto al Sol. Supondremos, además, que la velocidad de Rosetta en ese instante es perpendicular a la órbita de Marte (ver el esquema adjunto).

b) ¿Cuál es su velocidad relativa respecto a Marte? Haz el diagrama vectorial.

c) Considerando únicamente la interacción entre Marte y Rosetta, ¿qué energía tiene la nave cuando se encuentra a 250 km de la superficie de Marte? ¿Qué puedes deducir a partir del resultado?

d) Calcula, utilizando el principio de conservación de la energía, la velocidad de Rosetta cuando abandona el campo gravitatorio de Marte, medida respecto a dicho planeta.



Datos:

Constante de Gravitación Universal: $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$

Masa del Sol: $1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

Distancia media de Marte al Sol: $2{,}28 \cdot 10^{8}\ \mathrm{km}$

Masa de Marte: $6{,}42 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}$

Radio de Marte: $3{,}40 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$

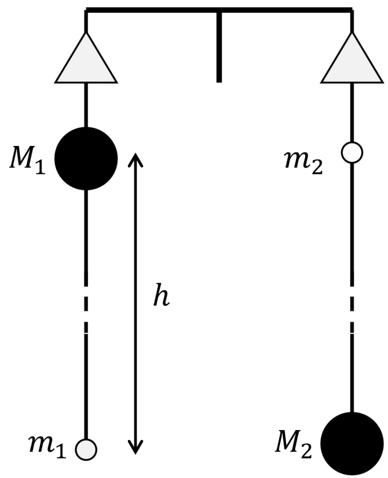
Masa de la nave Rosetta: $3000\ \mathrm{kg}$

Ver solución 83

84. El experimento de Von Jolly

Hacia 1881, el físico alemán Philipp Von Jolly realizó una serie de experimentos relacionados con la ley de gravitación de Newton. En uno de tales experimentos intentó comprobar la dependencia con $^1/_{r^2}$ de dicha ley. Para ello, colgó de los platos de una balanza cuatro esferas tal como se muestra en la figura. Con esa posición, la balanza se encontraba en equilibrio. Al intercambiar las posiciones de las esferas, las de abajo arriba y viceversa, Von Jolly debió añadir una masa μ en el plato de la derecha con objeto de restablecer el equilibrio. En su experiencia, las esferas grandes tenían una masa $M_1 \cong M_2 = 5\ \mathrm{kg}$, mientras que las masas m_1, m_2 de las pequeñas eran mucho menores que las de las grandes $(m_1, m_2 << M_1, M_2)$, la distancia vertical entre esferas era de $h = 21\ \mathrm{m}$ y $\mu = 65\ \mathrm{mg}$. Mediante el cálculo adecuado, indíquese si Von Jolly tuvo éxito en su comprobación.

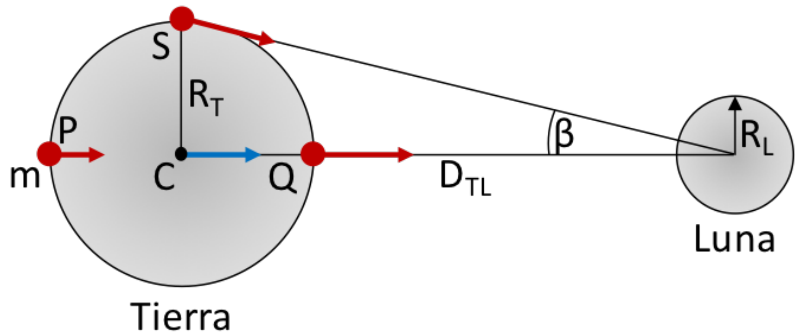
Dato: Radio de la Tierra $R_T = 6370\ \mathrm{km}$.



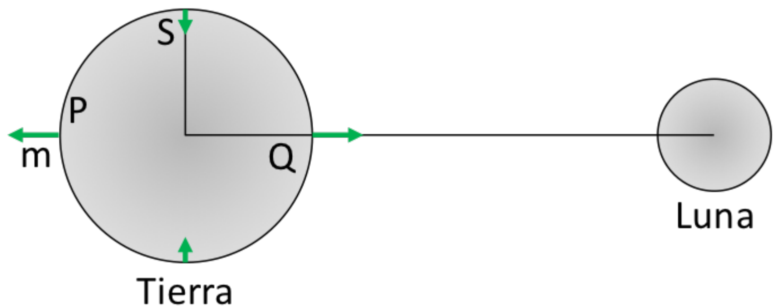
Ver solución 84

82. El origen de la fuerza de marea: solución

a) Dibujamos en color rojo las fuerzas de atracción que ejerce la Luna sobre un objeto de masa m situado en los puntos P, Q y S, y en azul la fuerza sobre dicho objeto si estuviese situado en el centro (punto C) de la Tierra.



A continuación, se dibujan en verde las fuerzas de marea como la diferencia entre los vectores rojos y azul en los puntos P, Q y S teniendo en cuenta que el ángulo β es muy pequeño.



b) Para el objeto de masa m colocado en el centro de la Tierra la fuerza de atracción está dirigida hacia el centro de la Luna:

$$F_C = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2} i$$

En los puntos P y Q la fuerza de atracción que ejerce la Luna:

$$F_P = G\frac{M_L m}{(D_{TL}+R_T)^2} i \qquad F_Q = G\frac{M_L m}{(D_{TL}-R_T)^2} i$$

Para el punto S, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que la fuerza de atracción que ejerce la Luna:

$$F_S = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2 + R_T^2}(cos\,\beta i - sen\,\beta j)$$

Por lo tanto, solamente tenemos que restar vectorialmente para obtener la fuerza de marea en los tres puntos, que denotamos con el subíndice m:

$$F_{m,P} = F_P - F_C = G\frac{M_L m}{(D_{TL} + R_T)^2} i - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2} i$$

$$F_{m,Q} = F_Q - F_C = G\frac{M_L m}{(D_{TL} - R_T)^2} i - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2} i$$

$$F_{m,S} = F_S - F_C = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2 + R_T^2}(cos\,\beta i - sen\,\beta j) - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2} i$$

Para el punto P sacando factor común podemos escribir que:

$$F_{m,P} = F_P - F_C = GM_L m \left\{ \frac{D_{TL}^2 - (D_{TL}^2 + R_T^2 + 2D_{TL}R_T)}{(D_{TL} + R_T)^2 D_{TL}^2} \right\} i = GM_L m \left\{ \frac{-(R_T^2 + 2D_{TL}R_T)}{(D_{TL} + R_T)^2 D_{TL}^2} \right\} i$$

en donde, si usamos la aproximación de que $D_{TL} >> R_T$, se tiene que:

$$F_{m,P} \cong -GM_L m \frac{2R_T}{D_{TL}^3} i \qquad (1)$$

De forma análoga para el punto Q tenemos que

$$F_{m,Q} \cong GM_L m \frac{2R_T}{D_{TL}^3} i \qquad (2)$$

Para el punto S, usamos que $D_{TL} >> R_T$ para determinar el coseno y el seno del ángulo β:

$$\cos(\beta) = \frac{D_{TL}}{\sqrt{D_{TL}^2 + R_T^2}} \cong \frac{D_{TL}}{D_{TL}} = 1 \qquad \operatorname{sen}(\beta) = \frac{R_T}{\sqrt{D_{TL}^2 + R_T^2}} \cong \frac{R_T}{D_{TL}}$$

por lo que:

$$F_{m,S} = F_S - F_C = G \frac{M_L m}{D_{TL}^2 + R_T^2} \left(i - \frac{R_T}{D_{TL}} j \right) - G \frac{M_L m}{D_{TL}^2} i$$

en donde, si usamos de nuevo que $D_{TL} >> R_T$, se tiene que:

$$F_{m,S} = F_S - F_C = -GM_L m \frac{R_T}{D_{TL}^3} j \qquad (3)$$

Nos damos también cuenta de que en módulo: $F_{m,P} = F_{m,Q} = 2F_{m,S}$

c) Análogamente, para el sistema Tierra-Sol la fuerza de marea en el punto P, usando ahora que $D_{TS} >> R_T$, se tiene que:

$$F_{m,P}^{sol} \cong -G\,M_S m \frac{2R_T}{D_{TS}^3}\,i \qquad (4)$$

donde hemos usado el superíndice sol para diferenciarla de la del apartado anterior.

d) Sin más que dividir (1) entre (4) tenemos que:

$$\frac{F_{m,P}}{F_{m,P}^{sol}} = \frac{GM_L\,m\dfrac{2R_T}{D_{TL}^3}}{GM_S\,m\dfrac{2R_T}{D_{TS}^3}} = \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{D_{TS}}{D_{TL}}\right)^3 = \frac{7{,}35\text{x}10^{22}}{1{,}98\text{x}10^{30}}\left(\frac{1{,}50\text{x}10^{11}}{3{,}84\text{x}10^{8}}\right)^3 = 2{,}2$$

La masa de Sol es mucho mayor que la de la Luna, pero como la distancia a la Tierra también es mayor ($D_{TS} > D_{TL}$) y va elevada al cubo se tiene que la fuerza de marea producida por el Sol es más pequeña, aproximadamente la mitad, que la producida por la Luna.

e) La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto de masa m situado en su superficie es:

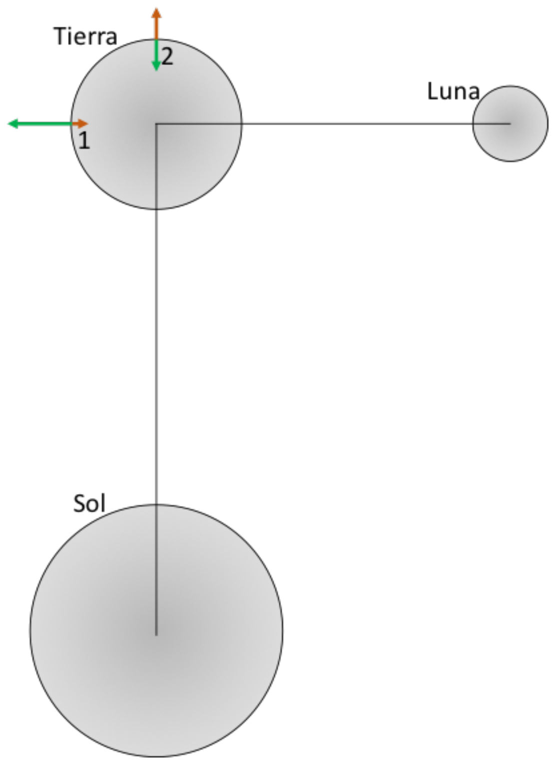
$$F_{m,Tierra} = \frac{G\,M_T m}{R_T^2}\,r \qquad (5)$$

Por lo que el cociente entre (1) y (5) será:

$$\frac{F_{m,P}}{F_{m,Tierra}} = \frac{G M_L m \dfrac{2R_T}{D_{TL}^3}}{\dfrac{G M_T m}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T} 2 \left(\frac{R_T}{D_{TL}}\right)^3 = \frac{7{,}35\text{x}10^{22}}{5{,}98\text{x}10^{24}} 2 \left(\frac{6{,}37\text{x}10^6}{3{,}84\text{x}10^8}\right)^3 = 1{,}12\text{x}10^{-7}$$

Esta cifra nos indica que las fuerzas de marea son muy pequeñas comparadas con la fuerza de atracción de la Tierra sobre un objeto de masa m situado en su superficie, pero sus efectos son notables.

f) El dibujo muestra en color verde las fuerzas de marea debidas a la Luna, donde el vector en 1 es el doble de largo que en 2 pues habíamos visto que en un punto tipo S la fuerza de marea debida a la Luna es la mitad que la que aparece en el punto tipo P. Si dibujamos ahora en naranja las fuerzas de marea debidas al Sol debemos tener en cuenta que la fuerza de marea en 1 creada por la Luna debe ser un poco mayor que el doble de la producida por el Sol en el punto 2. Tenemos, que en el punto 2 prácticamente se compensan y, por lo tanto, $F_{m,1} > F_{m,2}$.



Ver enunciado 82

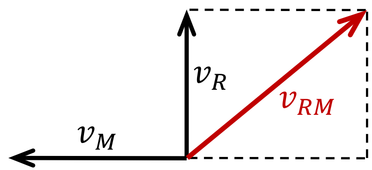
83. Rosetta en su rumbo al cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko: solución

a) La velocidad orbital de Marte alrededor del Sol viene dada por:

$$v_M = \sqrt{\frac{G\ M_S}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 1{,}99 \times 10^{30}}{2{,}28 \times 10^{-11}}} = 24{,}1\ \text{km/s}$$

b) La velocidad relativa de Rosetta con respecto a Marte vendrá dada por la siguiente relación:

$$v_{RM} = \sqrt{v_M^2 + v_R^2} = 31{,}3\ \ \text{km/s}$$



c) La energía total vendrá dada por la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = -\frac{\mathrm{G}\ M_M\ m_R}{r} + \frac{1}{2} m_R\ v^2$$
$$= 3 \times 10^3 \left(-\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6{,}42 \times 10^{23}}{3{,}4 \times 10^6 + 2{,}5 \times 10^5} + \frac{1}{2}(31{,}3 \times 10^3)^2\right)$$
$$= 1{,}43 \times 10^{12}\ \mathrm{J}$$

Como esta energía es positiva, podemos concluir que la nave Rosetta saldrá del campo gravitatorio de Marte.

d) Aplicando conservación de la energía:

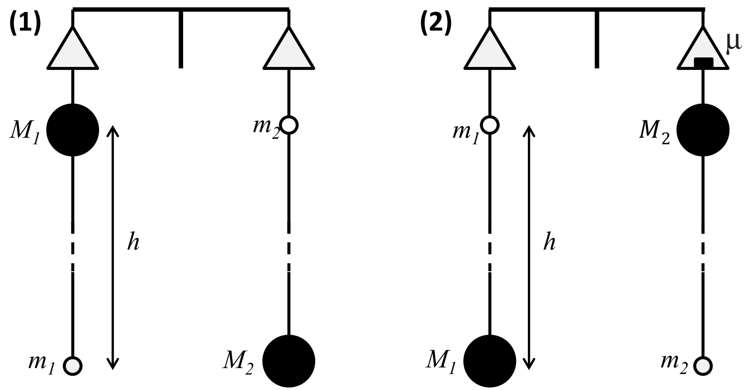
$$E = E' = \frac{1}{2} m_R \, v_{RM}'^2$$

$$v'_{RM} = \sqrt{\frac{2E}{m_R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}43 \times 10^{12}}{3 \times 10^3}} = 30{,}9 \text{ km/s}$$

Ver enunciado 83

84. El experimento de Von Jolly: solución

Llamemos a las dos posiciones (1) y (2):



Llamemos $g_1(g_0)$ al valor de la constante gravitatoria en la parte de arriba (abajo) de la cuerda.

En (1): $m_1\, g_0 + M_1\, g_1 = m_2\, g_1 + M_2\, g_0$

En (2): $m_1\, g_1 + M_1\, g_0 = (M_2 + \mu)\, g_1 + m_2\, g_0$

Restando ambas ecuaciones se obtiene $(M_1 - m_1)(g_1 - g_0) = (M_2 - m_2)(g_0 - g_1) - \mu\, g_1$

Despejando:

$$\frac{g_0 - g_1}{g_1} = \frac{\mu}{M_1 + M_2 - m_1 - m_2} \approx \frac{\mu}{M_1 + M_2} = 6{,}5 \times 10^{-6}$$

Aplicando la ley de gravitación universal de Newton:

$$\frac{g_0 - g_1}{g_1} = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2} - 1 = \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2 - 1 \approx \frac{2\,h}{R_T} = 6{,}6 \times 10^{-6}$$

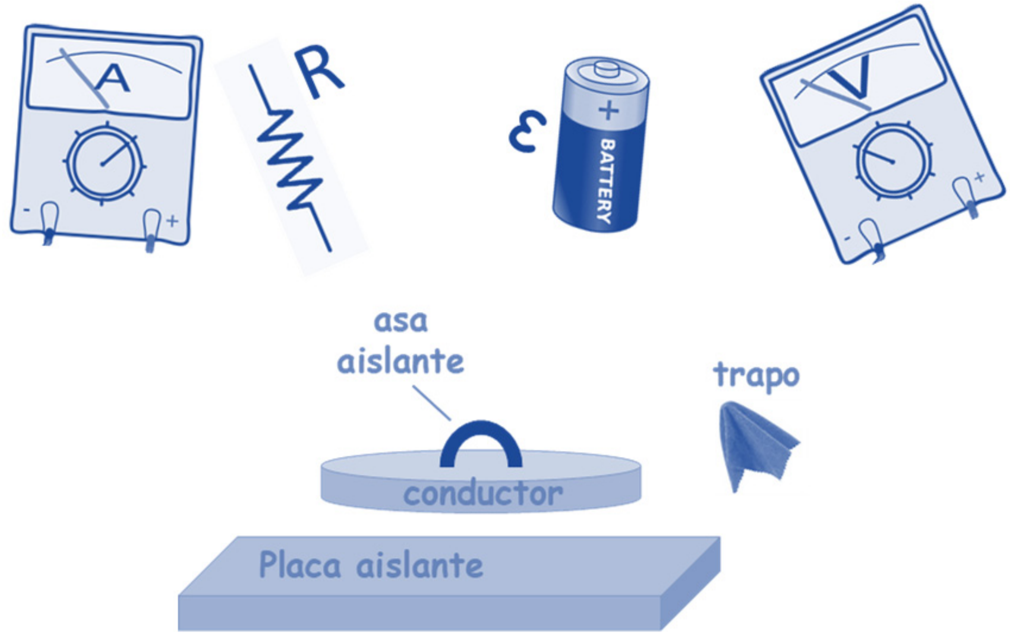
$$\frac{\mu}{2\,M} = 6{,}5 \times 10^{-6}$$

Conclusión: tuvo bastante éxito.

Ver enunciado 84

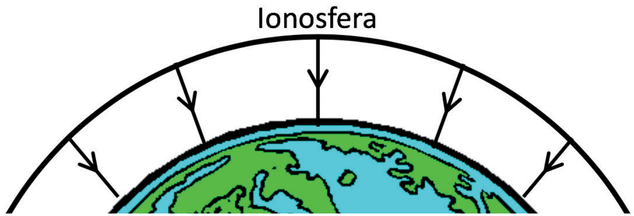
Desafíos

Electricidad y magnetismo



85. Bola cargada y campo eléctrico terrestre

Todo el mundo sabe que existe un campo magnético terrestre, pero poca gente sabe que también existe un campo eléctrico terrestre. Este campo eléctrico se debe al predominio de los iones positivos sobre los negativos en la ionosfera, mientras que la carga neta de la Tierra es negativa. El campo está dirigido, por tanto, desde la ionosfera hacia la Tierra y su valor promedio es $100\ \mathrm{N/C}$.



En este problema vamos a explorar la posibilidad de utilizar este campo eléctrico para hacer que un objeto cargado eléctricamente levite venciendo la fuerza gravitatoria. Para ello consideraremos una esfera de radio $R = 20\ \mathrm{cm}$ de espuma de poliuretano, un material muy ligero ($\rho = 40\ \mathrm{kg/m^3}$).

a) ¿Cuánto pesa dicha esfera?

Para poder cargar la esfera, esta se cubre con una capa de pintura metálica, dado que el poliuretano es un material aislante.

b) Suponiendo que el peso de la capa de pintura es despreciable y que el campo eléctrico terrestre es uniforme y tiene un valor de $100\ \mathrm{N/C}$, ¿cuánta carga tendríamos que colocar en la esfera para compensar la fuerza gravitatoria? ¿De qué signo debe ser la carga?

¿Crees que es posible colocar toda esta carga en la esfera? Debes tener en cuenta que, a medida que colocamos carga en un material conductor, esta se coloca en la superficie externa y el campo eléctrico a su alrededor crece. Si este campo es suficientemente intenso, es capaz de ionizar las moléculas que hay en el aire y, por tanto, el conductor se descarga a través del aire en el que está inmerso. Este fenómeno se denomina ruptura dieléctrica y ocurre cuando el campo eléctrico supera el valor $3\text{x}10^6$ N/C. Teniendo en cuenta que el campo en la superficie de un conductor es $E_S = 4\pi k\sigma$, donde $\text{k} = 9 \text{ x } 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ es la constante de Coulomb y σ es la carga por unidad de superficie,

c) ¿cuál es la carga máxima que podemos colocar en la esfera?

d) Suponiendo que colocamos dicha carga máxima, ¿cuál es la razón entre la fuerza que experimenta la esfera debida al campo eléctrico terrestre y la fuerza gravitatoria?

e) ¿Aumentaría esta razón si tuviéramos una esfera más grande? Razona tu respuesta.

Ver solución 85

86. Placas deflectoras y pantalla

Se ha diseñado un sistema para desviar electrones que consta de dos placas metálicas cuadradas paralelas de 5 cm de lado y separadas 3 cm, entre las que se aplica una diferencia de potencial V_P, de forma que se genera entre ellas un campo eléctrico uniforme vertical hacia abajo.

Los electrones, previamente acelerados horizontalmente desde el reposo hasta una velocidad v_X mediante una diferencia de potencial de 1500 V, penetran entre las placas en dirección paralela a las mismas, como muestra la figura. A 10 cm de la salida de las placas se ha situado una pantalla vertical.

Calcula:

a) La velocidad con que los electrones se introducen entre las placas v_X.

b) El tiempo que tarda un electrón en recorrer el espacio entre las placas.

c) El tiempo que tarda un electrón en alcanzar la pantalla desde que sale de las placas.

Si los electrones inciden en la pantalla en una posición tal que el desplazamiento vertical respecto a su posición de entrada entre las placas es $\Delta y = 5\ \text{cm}$ (ver figura), calcula:

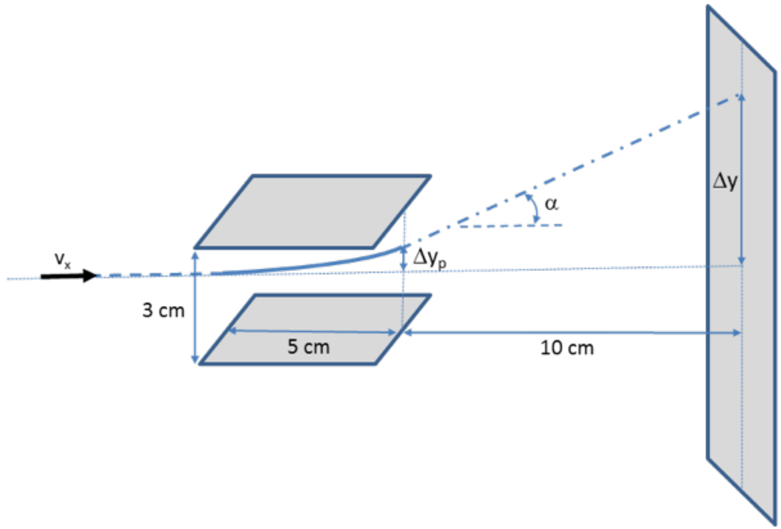
d) La diferencia de potencial V_P aplicada entre las placas.

e) La intensidad del campo eléctrico entre las placas.

f) El desplazamiento vertical Δy_P que experimenta el electrón mientras permanece entre las placas.

g) El ángulo α que se ha desviado la trayectoria del electrón cuando sale de las placas.

Datos: Carga del electrón $\mathrm{e} = 1{,}6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$, masa del electrón $m_0 = 9{,}109\times10^{-31}\mathrm{kg}$.



Ver solución 86

87. Calculadora de carga eléctrica

Se lanza una carga eléctrica negativa de valor -q y masa m con velocidad horizontal v a una altura $3d$ del origen de coordenadas (punto P), hacia una región (zona sombreada de la figura) en la que existe un campo eléctrico, E, uniforme en la dirección $+y$. Ignorando los efectos de la gravedad:

a) ¿Qué tipo de movimiento describe la carga eléctrica en presencia del campo eléctrico?

b) Establece las relaciones de las variables cinemáticas posición, velocidad y aceleración con respecto al tiempo: $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$, $a_y(t)$ en esta región.

Después de atravesar la zona con campo eléctrico, la carga sale de él a una altura $2d$ del suelo.

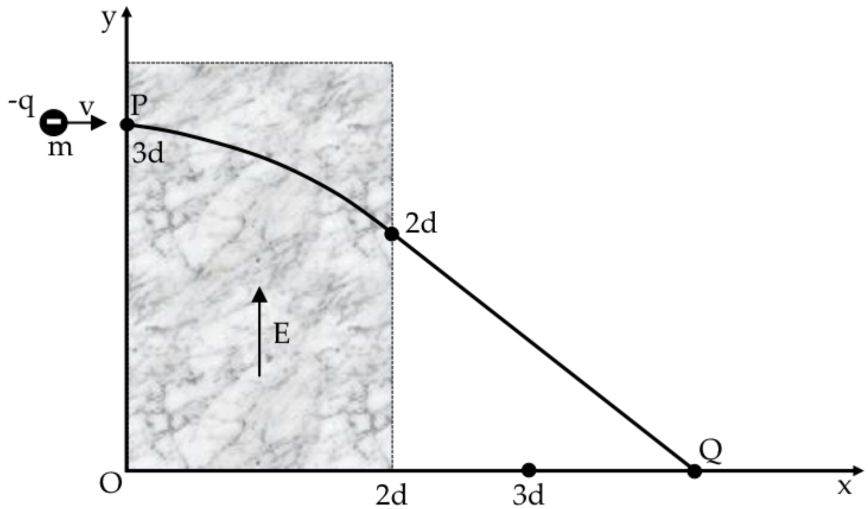
c) Expresa el campo eléctrico E en función de q,m,v y d.

A partir de ese momento, y de nuevo despreciando la gravedad, la carga lleva un movimiento uniforme.

d) ¿A qué distancia del origen (punto O) impacta en el suelo (punto Q)?

Otra partícula con la misma masa, pero con carga desconocida, entra en la región de campo eléctrico por el mismo punto P y con la misma velocidad que la primera. Si se desea que dicha partícula impacte en el suelo a una distancia $3\mathrm{d}$ del origen, y sin necesidad de disponer de más datos:

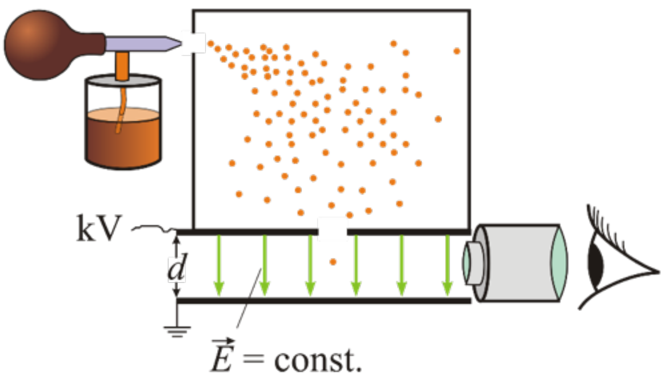
e) ¿Cuál ha de ser el valor de la carga de esta segunda partícula con respecto a la primera?



Ver solución 87

88. El experimento de Millikan

A principios del siglo XX, Robert Millikan desarrolló un método para determinar la carga eléctrica de gotas de aceite. El montaje experimental que utilizó está representado en la figura. Usando un pulverizador esparcía minúsculas gotas de aceite en una cámara, algunas de las cuales pasaban a una cámara inferior a través de un pequeño orificio. Al pasar por el chorro del pulverizador, la mayor parte de las gotitas se cargaban eléctricamente por fricción. En otras palabras, cada gotita ganaba o perdía algunos electrones. Aquellas que no habían logrado cargarse por fricción podían ser cargadas con la ayuda de un haz de rayos X proyectado sobre ellas. Por otro lado, en la cámara inferior existía un intenso campo eléctrico vertical creado aplicando una diferencia de potencial entre las placas superior (electrodo positivo) e inferior (electrodo negativo). Mediante un microscopio, Millikan analizó el movimiento de las gotitas dentro de la cámara, lo que le permitió demostrar la existencia de la unidad fundamental de carga y establecer su cuantización. Este experimento está considerado como uno de los más importantes del siglo XX.



Para estudiar el movimiento de las gotitas de aceite debemos tener en cuenta, además del peso y la fuerza debida al campo eléctrico, la fricción con el aire. Las fuerzas de fricción se oponen siempre al movimiento y su módulo aumenta con la velocidad. De esta forma, al cabo de un tiempo muy corto se establece una situación de equilibrio dinámico y las gotas se mueven con una velocidad constante denominada velocidad terminal. En este caso, la fuerza de fricción viene dada por la ley de Stokes,

$$F_v = -6\,\pi\,R\,\eta\,v,$$

donde R es el radio de las gotas, v es su velocidad terminal y η es el coeficiente de viscosidad del aire.

I. Las gotas de aceite tienen un diámetro $D = 4\ \mu\mathrm{m}$ $(4 \times 10^{-6}\ \mathrm{m})$ y, en un primer momento, consideraremos su movimiento sin campo eléctrico. En este caso, se observa que caen con una velocidad constante $v_g = 0{,}46\ \ \mathrm{mm/s}$.

   a) Haz un diagrama de las fuerzas que actúan sobre las gotas en su caída.

   b) ¿En qué unidades se mide el coeficiente de viscosidad η?

   c) Calcula el coeficiente de viscosidad del aire, sabiendo que la densidad del aceite es $\rho_{aceite} = 920\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

II. A continuación se aplica un potencial entre las dos placas creando un campo eléctrico uniforme vertical y dirigido hacia abajo de módulo $E = 808\,\mathrm{kV/m}$. En este caso se observa que las gotas se mueven hacia arriba con una velocidad constante $v_e = 0{,}13\,\mathrm{mm/s}$

   a) ¿De qué signo es la carga de las gotas de aceite?

   b) Calcula dicha carga.

III. Las dos placas metálicas están conectadas a una fuente de potencial variable y, por tanto, el módulo del campo eléctrico puede variarse a voluntad.

a) ¿Qué campo eléctrico debe existir para que las gotas de aceite queden suspendidas sin moverse?

b) Si la distancia entre las placas del condensador es $5\ \mathrm{mm}$, ¿qué diferencia de potencial hay que aplicar para crear dicho campo?

Ver solución 88

89. Carga moviéndose en una recta

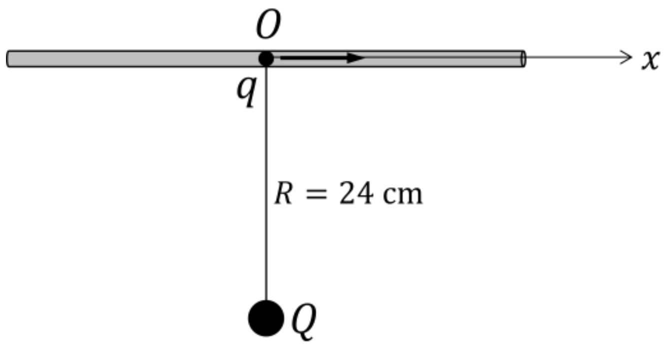
Una partícula con carga eléctrica $q = -1{,}6 \times 10^{-9}\mathrm{C}$ se encuentra en el punto O, situado en la mitad de un túnel muy estrecho por el que la partícula solo puede moverse en dirección horizontal (eje x). A una distancia $R = 24\ \mathrm{cm}$ medidos perpendicularmente al túnel (ver figura), hay una carga eléctrica $Q = 0{,}1\ \mathrm{C}$ que está fija.

a) Inicialmente, se le da a la partícula con carga q una energía cinética de $2\ \mathrm{J}$ y esta se mueve hacia la derecha ($x > 0$). ¿Qué energía cinética tendrá cuando haya recorrido $5\ \mathrm{cm}$ en esa dirección, suponiendo que no hay pérdidas de energía por rozamiento?

b) ¿Cuál es el punto más lejano (x_{max}) respecto al inicial (O) que puede alcanzar?

c) Dibuja el diagrama de las fuerzas que actúan sobre la partícula de carga q cuando está situada en un punto del eje x genérico. A partir de dicho diagrama, razona qué tipo de movimiento seguirá la partícula.

NOTA: no se tiene en cuenta la fuerza gravitatoria.



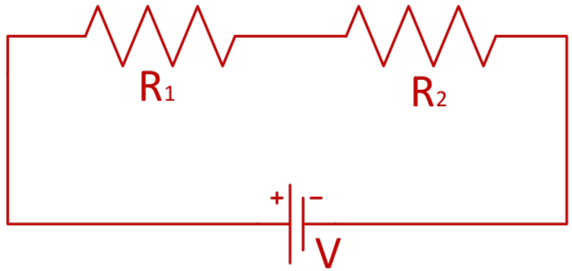
Ver solución 89

ÍNDICE

90. Diferencia de potencial en las resistencias

En el circuito mostrado en la figura se presentan dos resistencias R_1 y R_2 y una batería ideal V. Si utilizamos un voltímetro no ideal (resistencia interna R_v) para medir la diferencia de potencial entre los extremos de R_1, luego entre los extremos de R_2 y finalmente la que hay entre los bornes de la batería obtenemos como lecturas los siguientes valores: $2{,}0\ \mathrm{V}$, $3{,}0\ \mathrm{V}$ y $6{,}0\ \mathrm{V}$.

¿Cuál es la diferencia de potencial real que hay en cada resistencia?



Ver solución 90

91. Determinación del coeficiente de temperatura de una resistencia eléctrica

La resistencia de un conductor depende de su forma geométrica (longitud l y sección S) y del material que está construido (ρ resistividad específica), siendo constante para una temperatura dada. Tal resistencia, se determina según la expresión:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Si se modifica la temperatura, las variaciones en la longitud (dilatación lineal) y en la sección (dilatación superficial) pueden considerarse despreciables frente a la variación en la resistividad específica ρ.

Tal variación de ρ viene determinada por la expresión:

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha \cdot T)$$

donde:

ρ_0 es la resistividad específica a $0°C$

α es el coeficiente de temperatura del material del que está construida

T es la temperatura en $°C$

Si se sustituye esta expresión en la resistencia, se obtiene:

$$R(T) = [\rho_0(1 + \alpha \cdot T)]\frac{l}{S}$$

Quedando al final que:

$$R(T) = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot T \qquad (1)$$

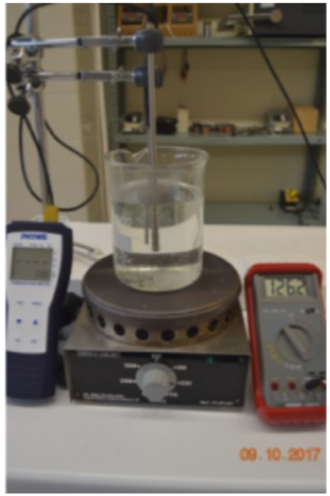
Donde R_0 es la resistencia a $0°C$.

La expresión anterior relaciona dos magnitudes medibles: resistencia "R" y temperatura "T" que guardan entre sí una dependencia lineal.

Realización práctica

El material necesario es el siguiente:

- Óhmetro
- Termómetro
- Resistencia
- Placa calefactora
- Vaso de precipitados
- Agua



Una vez montado el instrumental necesario, como aparece en la imagen, se irán tomando un conjunto de pares de valores R-T. En la experiencia, se utilizó una resistencia blindada de platino y estos fueron los resultados obtenidos:

$T\ (^0C)$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$R(\Omega)$	103,9	106,1	107,8	109,6	111,5	113,4	115,3	117,2	119,2	121,1	123	125

a) Realizar el análisis gráfico de los datos obtenidos y obtener la recta de regresión.

b) Comparar la ecuación de la recta de regresión con la expresión "1" y determinar los valores de R_0 y α junto con sus márgenes de error.

c) Determinar un intervalo de temperatura en que el platino sea superconductor ($R = 0$).

Ver solución 91

85. Bola cargada y campo eléctrico terrestre: solución

a) El peso viene dado por

$$P = \rho\, V\, g = \rho\, \frac{4}{3}\pi R^3 g = 13{,}1\ \mathrm{N}$$

b) Para que la fuerza debida al campo eléctrico esté dirigida hacia arriba la carga debe ser negativa. Su módulo se obtiene a partir de la ecuación

$$P = F_e = q\, E_T$$

Por tanto,

$$q = {}^{P}/_{E_T} = 131\ \mathrm{mC}$$

c) La carga máxima es aquella para la cual el campo en la superficie del conductor es el de ruptura:

$$E_r = 4\pi k\sigma = 4\pi k\frac{q_{max}}{4\pi R^2} = k\frac{q_{max}}{R^2}$$

Por tanto,

$$q_{max} = \frac{E_r R^2}{k} = 1{,}33 \times 10^{-5}\ \mathrm{C}$$

d) Con esta carga la fuerza debida al campo eléctrico es mucho menor que el peso:

$$\frac{F_e}{P} = \frac{q_{max}\, E_T}{P} = 1{,}01 \times 10^{-4}$$

e) La razón es proporcional a R^{-1} porque el peso crece con R^3 (proporcional al volumen) y la fuerza eléctrica con R^2 (carga total proporcional a la superficie).

Ver enunciado 85

86. Placas deflectoras y pantalla: solución

a) Para obtener la velocidad de los electrones aplicamos conservación de la energía

$$eV = \frac{1}{2} m v_{x0}^2 \Rightarrow v_{x0} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 2{,}3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

b) Como el movimiento a lo largo del eje x es uniforme tenemos que

$$t_1 = \frac{l_1}{v_{x0}} = 2{,}17 \times 10^{-9} \text{ s}$$

c) Cuando salen de las placas deflectoras el movimiento de los electrones sigue siendo uniforme. Por tanto,

$$t_2 = \frac{l_2}{v_{x0}} = 4{,}35 \times 10^{-9} \text{ s}$$

d) El movimiento a lo largo del eje y dentro de las placas deflectoras es uniformemente acelerado y la aceleración es $a = \frac{eE}{m}$. Por tanto, la desviación vertical en este tramo es

$$\Delta y_p = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{eV_p}{md} t_1^2$$

Por otro lado, como fuera de las placas el movimiento en la dirección y es uniforme, la desviación vertical en esta región es

$$\Delta y_f = \Delta y - \Delta y_p = v_{yf} t_2$$

donde v_{yf} viene dada por

$$v_{yf} = at_1 = \frac{eV_p}{md} t_1$$

Por tanto, tenemos que

$$\Delta y = \Delta y_p + \Delta y_f = \frac{1}{2} \frac{eV_p}{md} t_1^2 + \frac{eV_p}{md} t_1 t_2$$

Despejando obtenemos la expresión para V_p:

$$V_p = \frac{\Delta y}{\frac{e\,t_1}{md}\left(\frac{1}{2} t_1 + t_2\right)} = 724\ \mathrm{V}$$

e) El campo eléctrico viene dado por

$$E = \frac{V_p}{d} = 24{,}13\ \mathrm{kV/m} = 24{,}13\ \mathrm{kN/C}$$

f) Conocido el potencial en las placas V_p ya podemos calcular la desviación vertical

$$\Delta y_p = \frac{1}{2} \frac{eV_p}{md} t_1^2 = 10^{-2}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{cm}$$

g) El ángulo α viene dado por

$$\alpha = \arctan \frac{v_{yf}}{v_{x0}}$$

donde v_{yf} es la velocidad en el eje y con la que los electrones salen de las placas

$$v_{yf} = \frac{eV_p}{md} t_1 = 9{,}2 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Por tanto,

$$\alpha = \arctan \frac{v_{yf}}{v_{x0}} = \arctan 0{,}4 = 0{,}38 \text{ rad} = 21{,}8°$$

Ver enunciado 86

87. Calculadora de carga eléctrica: solución

a) Si ignoramos los efectos de la gravedad tendremos un movimiento parabólico donde la fuerza vertical es la originada por el campo eléctrico que, al ser la carga negativa, irá dirigida en el sentido negativo del eje vertical.

$$F = -qE = ma, \text{ con } a_x = 0 \text{ y } a_y = -\frac{qE}{m}$$

b) Usando las siguientes condiciones iniciales:

$$v_{0,x} = v \qquad v_{0,y} = 0 \qquad x_0 = 0 \qquad y_0 = 3d$$

escribimos las ecuaciones del movimiento parabólico:

$$v_x(t) = v + a_x t = v \qquad v_y(t) = 0 + a_y t = -\frac{qE}{m} t$$

$$x(t) = 0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = vt$$

$$y(t) = 3d + v_{0,y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 3d - \frac{1}{2}\frac{qE}{m} t^2$$

c) Evidentemente, el tiempo que tarda la partícula en recorrer la zona de campo es:

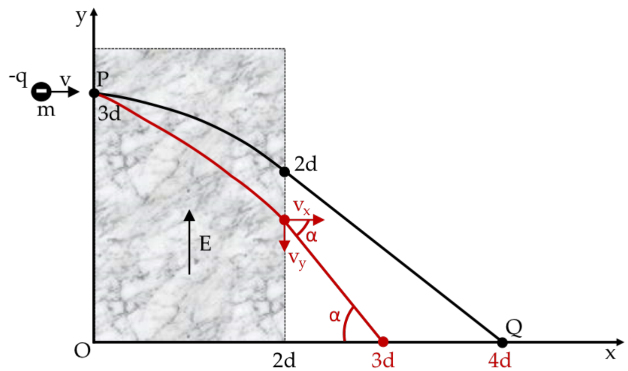
$$t = \frac{2d}{v}$$

Para este tiempo nos dicen que la partícula sale a una altura $2d$, y, por lo tanto:

$$2d = 3d - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{2d}{v}\right)^2$$

Es decir, las magnitudes de los datos del problema han de verificar que:

$$E = \frac{mv^2}{2qd} \qquad (1)$$



d) Una vez que la partícula sale de la zona de campo eléctrico lleva un movimiento uniforme con las siguientes componentes para cada una de las velocidades:

$$v_x = v \qquad\qquad v_y\left(t = \frac{2d}{v}\right) = -\frac{qE}{m}\frac{2d}{v}$$

Para calcular la distancia recorrida en horizontal debemos simplemente calcular primero el tiempo, t_s, que tarda en llegar al suelo. Es decir, el tiempo en recorrer una distancia $2d$ en vertical:

$$y(t=t_s)=2d=v_y t_s \rightarrow t_s=\frac{2d}{\frac{qE}{m}\frac{2d}{v}}=\frac{mv}{qE}$$

El espacio recorrido en horizontal es entonces este tiempo t_s multiplicado por la velocidad horizontal:

$$\Delta x(t=t_s)=v_x t_s=v t_s=v\frac{mv}{qE}=\frac{mv^2}{qE}=2d$$

donde hemos usando la ecuación (1).

Por lo tanto, la distancia al origen del punto Q es:

$$x=2d+\Delta x(t=t_s)=2d+2d=4d$$

e) El tiempo que tarda la segunda partícula en atravesar la zona de campo eléctrico es el mismo pues la velocidad horizontal es igual. Podemos calcular entonces la altura a la que sale d':

$$y\left(t=\frac{2d}{v}\right)=d'=3d-\frac{1}{2}\frac{q'E}{m}\left(\frac{2d}{v}\right)^2$$

donde usando la ecuación (1) obtenemos:

$$d'=3d-d\frac{q'}{q} \qquad (2)$$

Al salir la partícula de la zona de campo eléctrico describe una trayectoria rectilínea, por tanto podemos escribir que:

$$\tan(\alpha) = \frac{d'}{d} \qquad (3)$$

La clave es darse cuenta que podemos expresar también esa tangente del ángulo α en función de las componentes de las velocidades que, prescindiendo del signo, es:

$$\tan(\alpha) = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{\frac{q'E}{m}\frac{2d}{v}}{v} = \frac{2Ed}{mv^2}q' = \frac{q'}{q} \qquad (4)$$

donde hemos vuelto a emplear la ecuación (1). Por lo tanto*:

$$\frac{q'}{q} = \frac{d'}{d} \qquad (5)$$

Usando (2) y (5) tenemos que:

$$\frac{q'}{q} = 3 - \frac{q'}{q}$$

Es decir:

$$q' = \frac{3}{2}q$$

* La expresión (5) también se puede obtener de la siguiente manera. Por analogía, podemos escribir para la partícula q' las siguientes componentes de las velocidades en el punto d' justo al salir de la zona de campo eléctrico:

$$v_x = v \qquad\qquad v_y\left(t = \frac{2d}{v}\right) = -\frac{q'E}{m}\frac{2d}{v}$$

Como esta segunda partícula impacta en el suelo a una distancia $3d$ del origen podemos calcular el tiempo, t'_s, que tarda en recorrer la distancia d en horizontal:

$$\Delta x(t = t'_s) = v_x t'_s = v t'_s = d \rightarrow t'_s = \frac{d}{v}$$

Por lo tanto, la distancia d' recorrida en vertical hasta impactar con el suelo será:

$$y(t = t'_s) = d' = v_y t'_s = \frac{q'E}{m}\frac{2d}{v}\frac{d}{v} = \frac{q'2Ed}{mv^2} = \frac{q'}{q}d$$

donde hemos vuelto a emplear la ecuación (1).

$$\frac{d'}{d} = \frac{q'}{q} \qquad (5)$$

Ver enunciado 87

88. El experimento de Millikan: solución

I. En este primer apartado no existe campo eléctrico y, por tanto, las únicas fuerzas que actúan sobre la gota son su propio peso y la fuerza de fricción.

a) El diagrama de fuerzas es el siguiente:

b) A partir de la expresión de la fuerza de fricción deducimos las unidades del coeficiente de viscosidad: $\mathrm{Pa \cdot s = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$

c) Como la gota cae con velocidad constante la fuerza neta que actúa sobre ella es nula y, por tanto

$$F_v = F_g \Rightarrow 6\,\pi\,R\,\eta\,v_g = {}^4\!/_3\,\pi\,R^3 \rho\,\mathrm{g}$$

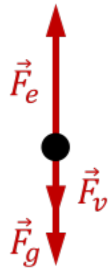
A partir de la igualdad anterior obtenemos el valor del coeficiente de viscosidad:

$$\eta = \frac{2\,R^2\,\rho\,\mathrm{g}}{9\,v_g} = 17{,}4\ \mathrm{\mu Pa \cdot s}$$

II. Sobre las gotitas actúa ahora un campo eléctrico $E = 808\ \mathrm{kV/m}$ dirigido hacia abajo.

a) Como las gotas se mueven hacia arriba, la fuerza debida al campo eléctrico debe ser hacia arriba, por lo que necesariamente su carga es negativa ($q < 0$).

b) Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas en esta nueva situación



se tiene que cumplir

$$F_g + F_v = F_e = q\ E$$

donde la fuerza gravitatoria y la de fricción son conocidas:

$$F_g = {}^4\!/_3\ \pi\ R^3 \rho\ \mathrm{g} = 3{,}02 \times 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

$$F_v = 6\ \pi\ R\ \eta\ v_e = 8{,}53 \times 10^{-14}\ \mathrm{N}$$

Por tanto,

$$q = \frac{F_g + F_v}{E} = 4{,}79 \times 10^{-19}\mathrm{C} = 3\mathrm{e}$$

III. En esta situación la gota de aceite queda suspendida en el aire. Por tanto $v = 0$ y la fuerza de fricción es nula ($F_v = 0$).

a) Como la gota está suspendida $F_g = F_e = q\ E$

$$E = {}^{F_g}/_{q} = 630\ \ \mathrm{kV/m}$$

b) El potencial que se debe aplicar para obtener dicho campo eléctrico es

$$V = E\ d = 3{,}15\,\mathrm{kV}.$$

Ver enunciado 88

89. Carga moviéndose en una recta: solución

a) Al tratarse de interacción coulombiana entre las cargas y no haber rozamiento, la energía total se conserva. La energía total es:

$$E = E_c + E_p = E_c + K\frac{Q\,q}{r}$$

donde K es la constante de Coulomb y r es la distancia entre Q y la posición de la carga q. Escribiendo la energía potencial electrostática en función de la distancia horizontal x respecto al punto O se tiene

$$E = E_c + E_p = E_c + K\frac{Q\,q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

En la posición inicial ($x = 0$ y $E_c = 2\ \mathrm{J}$) se obtiene que la energía total es

$$E = 2 + 9 \times 10^9\,\frac{0.1 \cdot (-1{,}6 \times 10^{-9})}{0{,}24} = -4\ \mathrm{J}$$

Cuando la carga q está en $x = 5\ \mathrm{cm}$, teniendo en cuenta que la energía total se conserva:

$$E_c = E - E_p = -4 - 9 \times 10^9\,\frac{0.1 \cdot (-1{,}6 \times 10^{-9})}{\sqrt{0{,}24^2 + 0{,}05^2}} = 1{,}87\ \mathrm{J}$$

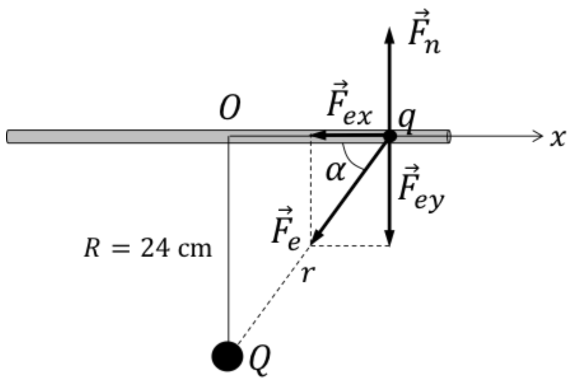
b) A medida que la carga q se aleja de O, su energía potencial es mayor (menos negativa) y la energía cinética será más pequeña. Así, q va reduciendo su velocidad hasta llegar a un punto en que $E_c = 0$. En ese punto la separación respecto de O es x_{max} y vendrá dada por:

$$0 = E - K\frac{Q\,q}{\sqrt{x_{max}^2 + R^2}}$$

Despejando obtenemos

$$x_{max} = \sqrt{(\mathrm{K}\,Q\,q/E)^2 - R^2} = 26{,}8\,\mathrm{cm}$$

c) Diagrama de fuerzas:



Como no hay movimiento en la dirección vertical, la componente de la fuerza electrostática en esta dirección se compensa con la fuerza normal que ejerce la base del túnel ($F_n = F_{ey}$), mientras que la componente en la dirección x tiende siempre a devolver a la carga q a su posición inicial O ($x = 0$). Por esto último, y por el hecho de que la energía se conserva, la partícula oscilará indefinidamente en torno al punto O. La oscilación será simétrica respecto a dicho punto. Sin embargo, no se trata de una oscilación armónica puesto que la fuerza neta no depende linealmente de la posición. En concreto:

$$F_x = K\frac{Q\ q}{x^2 + R^2}\cos\alpha = K\frac{Q\ q}{x^2 + R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = K\frac{Q\ q\ x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Solo si el desplazamiento en horizontal es muy pequeño en comparación con la distancia que separa las cargas ($x << R$) entonces tendremos una oscilación armónica, ya que, en este caso, $x^2 + R^2 \approx R^2$ y entonces

$$F_x = K\frac{Q\ q\ x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{KQq}{R^3}x$$

Ver enunciado 89

90. Diferencia de potencial en las resistencias: solución

El valor finito no nulo de la resistencia R_v del voltímetro es la responsable de las discrepancias entre la lectura del mismo y el valor real. Mientras que la medida en bornes de la batería, $6\,V$, es siempre cierta independiente de R_v (la resistencia interna de una batería ideal es cero), las lecturas en extremos de R_1 y R_2 son siempre menores que su valor real. La diferencia con respecto al valor real es mayor cuanto mayores sean R_1 y R_2 con respecto a R_v, mientras que si R_1 y R_2 son comparables con respecto a R_v dicha diferencia es despreciable.

Utilizando las ecuaciones de circuitos básicas, el voltaje real en bornes de R_1 será:

$$V\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Mientras que la lectura a través de R_1 cuando conectamos el voltímetro es:

$$V\frac{(R_1 \parallel R_v)}{(R_1 \parallel R_v)+R_2}$$

donde $(R_1 \,||\, R_v)$ representa la resistencia paralelo equivalente de R_1 y R_v.

Si definimos un factor de corrección k_1, como el cociente entre ambos valores, encontramos que:

$$k_1=\frac{\dfrac{R_1}{R_1+R_2}}{\dfrac{(R_1 \parallel R_v)}{(R_1 \parallel R_v)+R_2}}=1+\frac{(R_1 \parallel R_2)}{R_v}$$

Este resultado, perfectamente simétrico con respeto a R_1 y R_2, permite garantizar que el factor de corrección k_2 para la resistencia R_2 será idéntico y por lo tanto:

$$k_1 = k_2 = \frac{6}{2+3} = 1{,}2$$

De esta forma, el valor real del voltaje en extremos de R_1 y R_2 se calcula fácilmente como:

$$V_1 = 1{,}2 \times 2 = 2{,}4\ \mathrm{V} \qquad V_2 = 1{,}2 \times 3 = 3{,}6\ \mathrm{V}$$

Por último, podemos obtener los valores para R_1 y R_2 en función de R_v. Es suficiente con tener en cuenta que el ratio entre R_1/R_2 es el mismo que la relación entre los valores reales de los voltajes:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2.4}{3.6} = \frac{2}{3}$$

y, utilizando el valor del factor de corrección previamente calculado $k = 1{,}2$ obtenemos que:

$$\frac{(R_1 \parallel R_2)}{R_\mathrm{v}} = \frac{1}{5}$$

Concluimos después de un poco de álgebra que:

$$R_1 = \frac{R_\mathrm{v}}{3} \qquad R_2 = \frac{R_\mathrm{v}}{2}$$

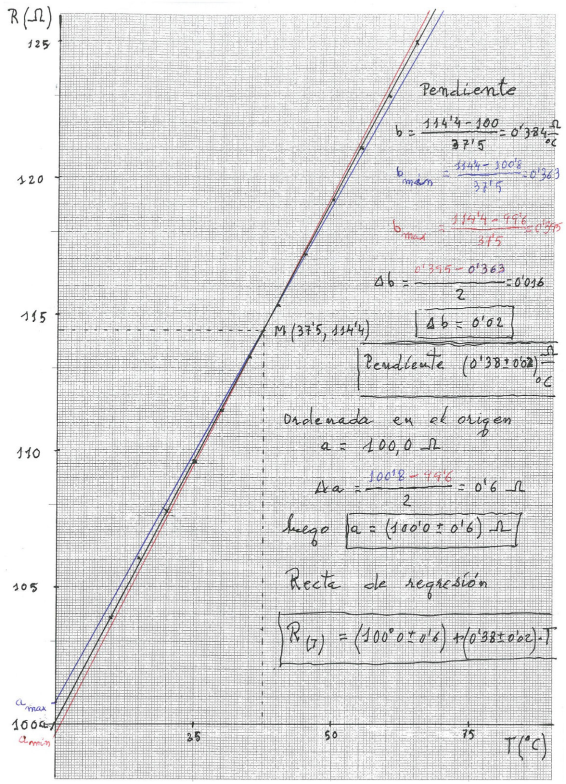
<u>NOTA</u>: Es importante darse cuenta que nuestro resultado $k_1 = k_2$ no es universal. Solo puede aplicarse al caso de dos resistencias conectadas a una batería ideal. Por ejemplo, para el caso de tres resistencias es fácil encontrar que existe una relación no simétrica con respecto a los valores de R_1, R_2 y R_3:

$$k_1 = 1 + \frac{R_1}{R_v} \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Ver enunciado 90

91. Determinación del coeficiente de temperatura de una resistencia eléctrica: solución

a) En la siguiente gráfica se ha realizado el correspondiente análisis.



b) La ordenada en el origen se corresponde con el valor "R_0", que es:

$$R_o = (100{,}0 \pm 0{,}6)\Omega$$

Al comparar la recta de regresión con la ecuación (1) se observa que "$b = R_O \cdot \alpha$", con lo que:

$$\alpha = \frac{b}{R_O} = \frac{0{,}384}{100} = 3{,}84.\,10^{-3}\,°\mathrm{C}^{-1}$$

cuyo error "$\Delta\alpha$" se determina así:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta R_0}{R_0} = \frac{0{,}016}{0{,}384} + \frac{0{,}6}{100} = 0{,}0477$$

Resultando

$$\Delta\alpha = 0{,}0477 \times 3{,}84.10^{-3} = 1{,}83.10^{-4} \approx 2 \times 10^{-4}\,°\mathrm{C}^{-1}$$

Con ello la expresión correcta para el coeficiente de temperatura es

$$\alpha = (3{,}8 \pm 0{,}2) \times 10^{-3}\,°\mathrm{C}^{-1}$$

c) Es sabido que el límite inferior de temperaturas es el $0\ \mathrm{K} = -273{,}16\,°\mathrm{C}$. La temperatura para la que $R = 0$ se determina mediante la ecuación (1):

$$R(T) = R_0 + R_0 \cdot \alpha \cdot T = 0$$

que queda

$$1 + \alpha \cdot T = 0$$

Por tanto

$$T = -\frac{1}{\alpha} \cong -263{,}2°C$$

Considerando la incertidumbre "$\Delta\alpha$" se obtiene el intervalo de temperaturas en el que el platino será superconductor:

$$T_{máx} = -\frac{1}{\alpha + \Delta\alpha} = -250\ °C$$

$$T_{mín} = -\frac{1}{\alpha - \Delta\alpha} = -277{,}8\ °C < -273{,}16\ °C \text{ imposible.}$$

En consecuencia, el platino será superconductor en el intervalo:

$-273{,}16\ °C \leq T \leq -250\ °C$ o bien $0\ K \leq T \leq 23{,}16\ K$

Ver enunciado 91

ÍNDICE

Desafíos

Miscelánea

92. Flotando en el Mar Muerto

Un objeto de forma cilíndrica y volumen 113 litros, con radio mucho mayor que su altura, flota en el Mar Muerto de forma que está hundido hasta su mitad (ver figura a). Se observa que, al colocar encima una masa de 70 kg, el objeto se hunde justo en su totalidad (ver figura b). ¿Cuál es la densidad del agua del Mar Muerto?

(a) (b)

Ver solución 92

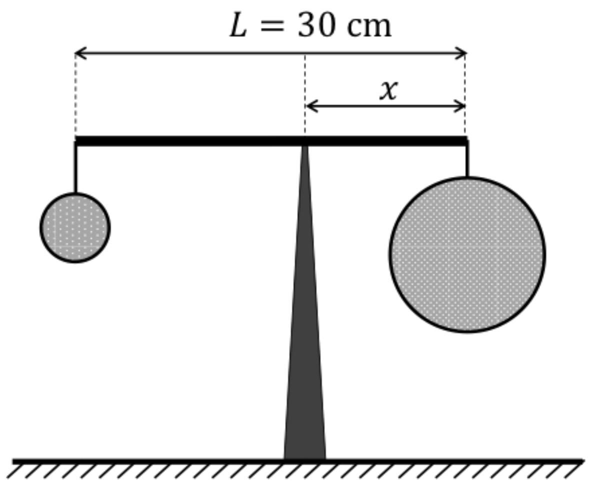
93. Esferas en equilibrio

Se tienen dos esferas macizas de distinta densidad y volumen. La más grande tiene una densidad doble que la del agua y su volumen es el triple que el de la pequeña. La densidad de la pequeña es 5 veces la densidad del agua. Las esferas se cuelgan a ambos lados de una varilla delgada (sin masa) de longitud $L = 30\ \mathrm{cm}$ y el sistema se equilibra apoyándolo en un pivote como se muestra la figura.

a) En el equilibrio, ¿qué distancia (x) hay entre el pivote y el punto de donde cuelga la esfera grande?

b) Si el sistema se sumerge por completo en agua, ¿hacia qué lado se desequilibra? Razona tu respuesta. Si queremos restaurar el equilibrio, ¿en qué punto (x') debemos apoyar la varilla?

c) ¿Qué relación debería haber entre las densidades de las esferas para que, si el sistema está equilibrado en agua, lo esté también en el aire?



Ver solución 93

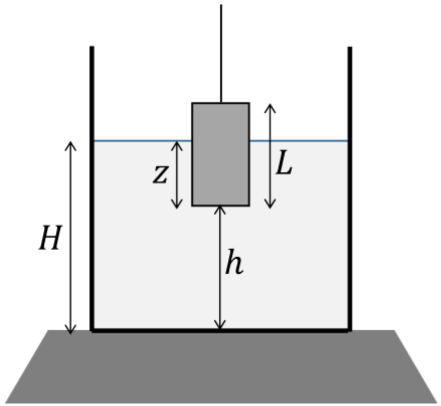
94. Objeto suspendido parcialmente sumergido en un fluido

En una balanza electrónica (precisión 0,1 g) se encuentra un vaso de precipitados, de 25 cm de altura y 10 cm de diámetro interior, con agua (densidad 1,0 g/cm^3). El agua en el vaso llega a una altura de 20 cm sobre el fondo y la balanza marca 1800,0 g. Con ayuda de un hilo, se introduce verticalmente en el vaso un cilindro de aluminio (densidad 2,7 g/cm^3) de 10 cm de longitud y 5 cm de diámetro, hasta depositarlo (verticalmente) en el fondo del vaso.

a) Obtén una expresión que relacione la longitud del cilindro sumergida en el agua (z) con la distancia desde la base inferior del cilindro al fondo del vaso (h). ¿Se derramará agua cuando el cilindro esté totalmente sumergido?

b) Representa gráficamente, en función de la distancia h, la masa indicada por la balanza a medida que se va introduciendo lentamente el cilindro en el agua.

NOTA: Se desprecia el efecto del hilo y los efectos de tensión superficial.



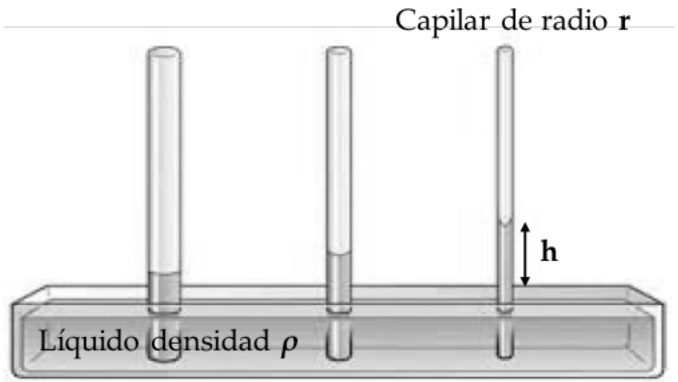
Ver solución 94

95. Determinación de la tensión superficial de un líquido

La capilaridad es un fenómeno físico por el cual los líquidos ascienden por tubos muy estrechos. Se debe a que la fuerza atractiva entre las moléculas del líquido es menor que la de adhesión entre el líquido y la superficie interior del tubo. En ese caso se dice que el líquido "moja". Cuando un tubo capilar de vidrio de radio r se introduce en un líquido de densidad ρ que lo "moja", se observa que el líquido asciende por el tubo hasta una altura h, de forma que se verifica la denominada Ley de Jurin:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho r g}$$

donde γ es la tensión superficial del líquido y g la aceleración de la gravedad. La expresión anterior relaciona dos magnitudes medibles, altura h y radio r, con las que podemos obtener el valor de la tensión superficial del líquido bajo estudio.



El material necesario para el desarrollo práctico es el siguiente:

- Cubeta con el líquido objeto de estudio
- Capilares de distinto radio
- Regla milimetrada

En un experimento se pretende determinar la tensión superficial de un líquido de densidad 0,79 g/cm^3. Una vez preparado el montaje de la figura, se toman pares de valores (h-r) y estos son los resultados:

r(mm)	0,60	0,65	0,75	1,00	1,25	1,50	2,10
h(mm)	10,4	9,22	8,03	6,00	4,62	3,81	3,01

Cuestiones

a) A partir de r, redefine una variable z de modo que h dependa linealmente de ella. Construye la tabla correspondiente (h-z).

b) Realiza el análisis gráfico de los datos obtenidos y obtén la recta de regresión de h frente a z.

c) Compara la ecuación de la recta de regresión con la expresión de la Ley de Jurin. Determina el valor de la tensión superficial γ, junto con sus márgenes de error. Expresa los resultados en unidades del Sistema Internacional.

d) Usando los valores obtenidos del ajuste, predice el valor de la altura para un capilar de radio $1{,}11$ mm.

Ver solución 95

96. La lluvia y el corredor que se moja

Si eres aficionado al *running*, que ahora está muy de moda, y has participado en alguna competición en un día lluvioso, quizás te hayas preguntado si te has mojado más o menos que el corredor que ha ganado la carrera. Vamos a hacer un estudio de este dilema: "*Si corro despacio, tardo mucho tiempo y me mojo mucho, pero si corro rápido me cae agua en el pecho y las piernas*". ¿Qué debo hacer para mojarme lo menos posible?

Para que los cálculos sean más sencillos imagina que puedes aproximar la forma de tu cuerpo por un paralelepípedo como el de la figura.

Sea v_0 la velocidad con la que cae el agua de lluvia verticalmente, pues supondremos que no hace viento alguno. Sea v la velocidad con la que corres la carrera, la cual es sobre una distancia L. Sean A_s y A_f las áreas superior y frontal, respectivamente, de tu cuerpo paralelepipédico. Si la cantidad (masa) de agua de lluvia por unidad de volumen es ρ:

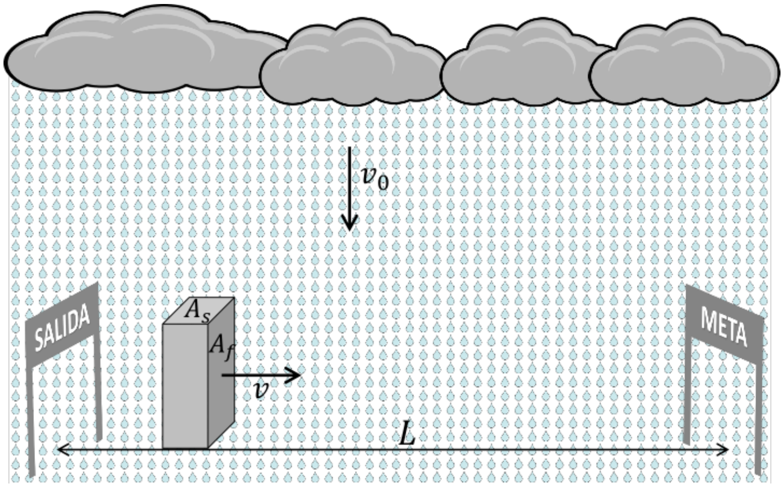
a) Calcula la cantidad de agua que impacta sobre el área frontal A_f de tu cuerpo durante la carrera.

b) Calcula la cantidad de agua que impacta sobre el área superior A_s de tu cuerpo durante la carrera.

c) Haz un gráfico representando la cantidad total de agua que impacta sobre tu cuerpo durante la carrera en función de la velocidad a la que corres.

d) ¿Qué conclusiones puedes sacar?

e) Aplicación numérica: $v_0 = 2\ \mathrm{m/s}$, $v = 4\ \mathrm{m/s}$, $A_s = 400\ \mathrm{cm}^2$, $A_f = 3400\ \mathrm{cm}^2$, $L = 10\ \mathrm{km}$ y $\rho = 3\ \mathrm{g/m}^3$.



Ver solución 96

97. Velocidad de una onda en una cuerda vertical con masa

Una cuerda homogénea de $32{,}9\ \mathrm{cm}$ de longitud y $100\ \mathrm{g}$ de masa está suspendida verticalmente de uno de sus extremos. En dicha cuerda, se genera con la mano un pequeño pulso transversal. ¿Cuánto tiempo emplea tal pulso en recorrer la cuerda?

NOTA: La velocidad de propagación de un pulso transversal en cada punto de una cuerda tensa es $v = \sqrt{T/\mu}$, siendo T la tensión y μ la densidad lineal de masa de la cuerda en cada punto.

Ayuda: $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ver solución 97

98. Velocidad de la sombra

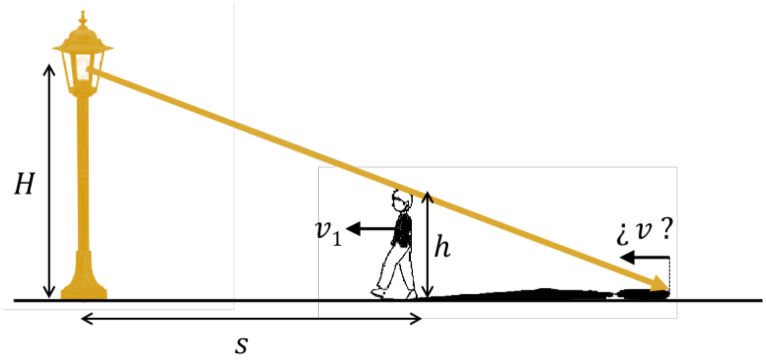
Un peatón de altura h va andando de noche por una acera con velocidad constante v_1. Al acercarse a una farola encendida de altura H, su sombra va acortándose.

a) La velocidad de la sombra de la cabeza del peatón respecto a la farola, ¿es constante? Razona tu respuesta.

b) Considerando que el peatón se encuentra inicialmente a una distancia s de la farola, determina si la velocidad de dicha sombra es mayor, menor o igual que la del peatón (referidas ambas a la farola).

c) Si tomamos como referencia el peatón, ¿cuál será en este caso la velocidad de la sombra?

d) La velocidad calculada en el apartado anterior, ¿es mayor, menor o igual a la velocidad v_1 del peatón?



Ver solución 98

99. El salto de Félix Baumgartner

En octubre de 2012 el austriaco Félix Baumgartner batió el récord de caída libre tras saltar desde un globo a $39000\ \mathrm{m}$ sobre el nivel del mar. En total, la caída duró 9 minutos, de los cuales $4\ \mathrm{min}$ y $20\ \mathrm{s}$ fueron sin ayuda de paracaídas. En ese tiempo llegó hasta una altura de $2500\ \mathrm{m}$ respecto del suelo. Félix iba provisto de un equipo especial, con elementos de protección y de medida, de manera que su masa conjunta era de $105\ \mathrm{kg}$. Para los cálculos que se proponen a continuación supondremos que el salto se produjo con velocidad inicial nula.

a) Suponiendo que la caída libre (sin paracaídas) se diera con aceleración constante ¿cuál fue esa aceleración? Compárala con la aceleración de la gravedad a $30000\ \mathrm{m}$ de altura sobre el nivel del mar.

Dato: $R_T = 6370\ \mathrm{km}$ (radio de la Tierra)

La pequeña aceleración promedio se debe a que, a partir de $27000\ \mathrm{m}$, el efecto de la fuerza de rozamiento con el aire empieza a ser considerable. Esta fuerza de fricción depende de la velocidad del cuerpo que cae según la expresión

$$F_r = \frac{1}{2} C\, \rho\, A\, v^2$$

donde C es la constante de arrastre, que depende solo de la forma del cuerpo que cae, ρ es la densidad del aire, A es la sección transversal (proyección del área del cuerpo en un plano perpendicular a la dirección del movimiento), v es la velocidad de caída.

La fuerza de fricción, por tanto, aumenta con la velocidad y, al cabo de un tiempo corto, se establece una situación de equilibrio dinámico y el cuerpo cae con una velocidad constante llamada **velocidad límite**.

En los cálculos que se proponen a partir de ahora considera que la aceleración de la gravedad es independiente de la altura ($\mathrm{g} = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$) y utiliza los valores $C = 1{,}3$ y $A = 0{,}4\ \mathrm{m}^2$.

b) Supongamos que la densidad de la atmósfera fuera cero por encima de $27000\ \mathrm{m}$ y uniforme (independiente de la altura) de valor $\rho = 0{,}35\ \mathrm{kg/m^3}$ desde dicha altura hasta la superficie de la Tierra. Calcula la velocidad límite que alcanzaría Felix en su salto. ¿Cuál sería en este caso la presión atmosférica en la superficie de la Tierra al nivel del mar?

Sin embargo, la densidad de la atmósfera no es uniforme. En la figura 1 se muestra la gráfica real de la velocidad de Félix en función del tiempo durante la caída libre. Como puede verse, hay un tramo inicial de aceleración prácticamente constante hasta que la velocidad alcanza un máximo en torno a $t = 50\ \mathrm{s}$. A partir de entonces, tenemos un segundo tramo en el que la velocidad disminuye de forma continua debido a la variación de la densidad de la atmósfera a medida que Felix cae. En este tramo descendente podemos considerar que la velocidad de Félix en cada instante de tiempo es la velocidad límite a la altura en la que se encuentra.

c) Teniendo en cuenta esto último, estima la densidad del aire a la altura a la que se encuentra Félix en los instantes $t = 75\ \mathrm{s}$ y $t = 200\ \mathrm{s}$. Haz una gráfica aproximada de cómo varía la densidad del aire en función de la altura a partir de los cálculos anteriores. Para estimar la altura a la que se encuentra Félix en cada instante de tiempo puedes relacionar los datos de la velocidad del sonido que aparecen en la gráfica 1 con los de la gráfica 2, en los que se representa la velocidad del sonido en función de la altura.

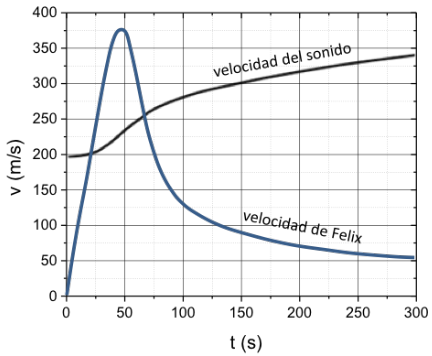


Figura 1

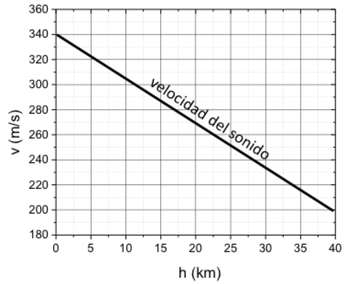
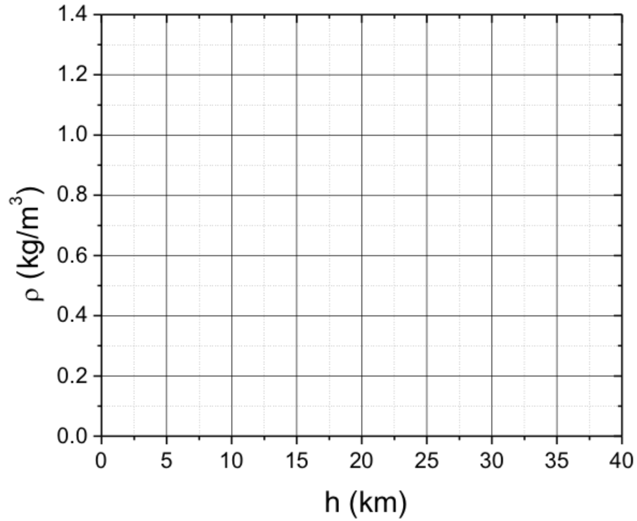


Figura 2

d) Estima entre qué alturas la velocidad de Félix fue superior a la del sonido.

e) Con su hazaña, Félix Baumgartner batió varios récords: mayor velocidad alcanzada en caída libre ($373\ \mathrm{m/s}$), salto en paracaídas desde mayor altura ($39000\ \mathrm{m}$) y mayor distancia en caída libre ($36500\ \mathrm{m}$). Uno de los récords que no pudo batir fue el de mayor duración de un salto en caída libre. Este lo estableció el coronel Kittinger en 1960 con un salto que duró 16 segundos más que el de Félix ($4\ \mathrm{min}$ y $36\ \mathrm{s}$). Félix podría haber estado más tiempo en el aire incrementando su sección transversal A. ¿En qué porcentaje debería haber aumentado A para conseguir igualar el récord de Kittinger?



Ver solución 99

100. Determinación del coeficiente de atenuación de radiación gamma por el plomo

Cuando un haz de rayos gamma (rayos γ) se hace atravesar un material de espesor x la intensidad del haz disminuye según la ley exponencial:

$$N_x = N_0 \cdot e^{-\mu \cdot x} \qquad (1)$$

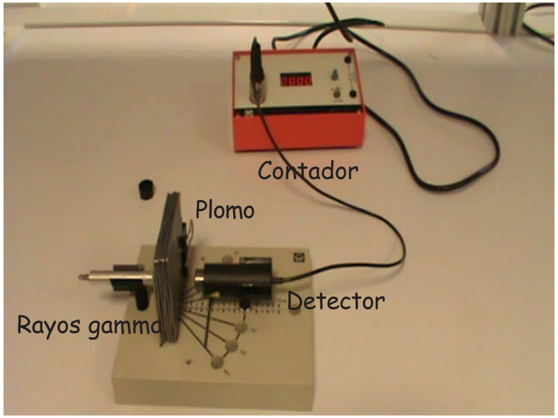
donde N_X es el número de cuentas por unidad de tiempo para un espesor x del material, N_0 es la tasa de contaje a espesor 0 y μ el coeficiente de atenuación lineal de radiación γ (que depende de la energía de la radiación y del material estudiado, en este caso plomo).

En esta experiencia se trata de determinar el coeficiente de atenuación lineal μ del plomo para los rayos γ emitidos por una muestra de ^{226}Ra. Los valores N_0 y μ (junto con sus incertidumbres) se determinan mediante los parámetros obtenidos en el ajuste por mínimos cuadrados de la recta obtenida a partir de la expresión (1).

Se dispone de una fuente de radiación gamma, con el correspondiente dispositivo de detección y contaje, y diversas placas de plomo. Se medirá, para distintos espesores de plomo, el número de radiaciones que en 5 minutos llegan al detector después de atravesar el plomo.

El material necesario es el siguiente:

- Muestra de radio (^{226}Ra)
- Zócalo y soportes
- Placas de plomo
- Sistema de detección de radiación
- Cronómetro



Se realiza el montaje como aparece en la imagen. Para cada espesor de plomo (x) se registra el número de cuentas N_x que llega al contador en 5 minutos. Los resultados obtenidos fueron:

x (mm)	0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
N_x	580	473	415	351	317	270

a) A partir de la expresión (1), determinar la función de N_x que tiene una relación lineal con x. Construir la tabla correspondiente.

b) Realizar el análisis gráfico de los valores de x y la función de N_x que lineariza el problema con los datos obtenidos y obtener la recta de regresión.

c) Determinar los valores del coeficiente de atenuación μ con sus márgenes de error.

d) Según el ajuste ¿cuánto vale el número de cuentas para espesor $x = 0$? Comparar con el valor experimental.

Ver solución 100

92. Flotando en el Mar Muerto: solución

El objeto está flotando en equilibrio y, por tanto, se cumple que

$$P = E$$

siendo P el peso y E el empuje.

Aplicando la ecuación anterior a la situación (a) tenemos que

$$m\,\mathrm{g} = \rho_{MM} \frac{V}{2}\,\mathrm{g}$$

mientras que en la situación (b)

$$(m + 70)\,\mathrm{g} = \rho_{MM}\,V\,\mathrm{g}$$

Teniendo en cuenta ambas ecuaciones obtenemos

$$\rho_{MM}\,\frac{V}{2} = 70 \;\Rightarrow\; \rho_{MM} = 1{,}24 \times 10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}$$

Ver enunciado 92

93. Esferas en equilibrio: solución

a) Cuando el sistema está equilibrado se cumple

$$m_1 g\, x = m_2 g\,(0{,}3 - x) \;\Rightarrow\; \rho_1 V_1 g\, x = \rho_2 V_2 g\,(0{,}3 - x),$$

siendo 1 la esfera grande, 2 la pequeña y x la distancia entre el pivote y el punto donde está colgada la esfera grande.

Resolvemos la ecuación para obtener x:

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_2}{V_1}(0{,}3 - x) = \frac{5}{2}\frac{1}{3}(0{,}3 - x) \;\Rightarrow\; x\left(1 + \frac{5}{6}\right) = \frac{5 \cdot 0{,}3}{6} \;\Rightarrow\; x = 13{,}6\ \mathrm{cm}$$

b) Con el sistema sumergido en agua, debemos tener en cuenta los empujes. En la nueva posición de equilibrio se cumple:

$$(P_1 - E_1)\, g\, x' = (P_2 - E_2)\, g\,(0{,}3 - x')$$

$$\left(\rho_1 - \rho_{H_2O}\right) V_1\, g\, x' = \left(\rho_2 - \rho_{H_2O}\right) V_2\, g\,(0{,}3 - x')$$

$$\rho_{H_2O}\, V_1\, x' = 4\, \rho_{H_2O}\, V_2\,(0{,}3 - x')$$

$$x' = 4\frac{V_2}{V_1}(0{,}3 - x') = \frac{4}{3}(0{,}3 - x')$$

$$3x' = 1{,}2 - 4x' \;\Rightarrow\; x' = 17{,}1\ \mathrm{cm}$$

c) Planteamos las ecuaciones de equilibrio en el aire y en el agua con la misma posición de equilibrio x'' en ambas:

$$\rho_1 V_1 g\, x'' = \rho_2 V_2 g\,(0{,}3 - x'')$$

$$\left(\rho_1 - \rho_{H_2O}\right) V_1\, g\, x'' = \left(\rho_2 - \rho_{H_2O}\right) V_2\, g\,(0{,}3 - x'')$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_{H_2O}} = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_{H_2O}} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 - \rho_{H_2O}}{\rho_2 - \rho_{H_2O}} \Rightarrow \rho_1 = \rho_2$$

Por tanto, solo cuando las dos esferas tienen la misma densidad, el sistema equilibrado en el aire permanece en equilibrio cuando se sumerge en agua.

Ver enunciado 93

94. Objeto suspendido parcialmente sumergido en un fluido: solución

a) La altura del agua H cuando el cilindro está sumergido una cantidad z viene dada por

$$H = \frac{V_{ag} + V_{cil}}{A_1}$$

donde $V_{ag} = H_0 A_1$ es el volumen de agua ($H_0 = 20\ \mathrm{cm}$) y $V_{cil} = zA_2$ es el volumen del cilindro sumergido en agua, siendo $A_1 = \pi(d_1/2)^2$ y $A_2 = \pi(d_2/2)^2$ las áreas de la base del vaso y el cilindro, respectivamente. Por tanto,

$$H = \frac{V_{ag} + V_{cil}}{A_1} = H_0 + \frac{A_2}{A_1} z = H_0 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 z$$

Por otro lado,

$$H = h + z$$

Igualando ambas expresiones y despejando h obtenemos

$$h(z) = H_0 - \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right] z$$

Cuando el cilindro está totalmente sumergido ($z = L$) tenemos

$$H(L) = 20 + \left(\frac{5}{10}\right)^2 10 = 22{,}5\ \mathrm{cm} < 25\ \mathrm{cm}$$

Por tanto, no se derramará agua.

b) El principio de Arquímedes establece que el fluido ejerce una fuerza hacia arriba (empuje) sobre el cilindro igual al peso del agua desalojada. Este empuje viene dado por

$$E(z) = \rho_{ag}\, A_2\, z\, g\,, \qquad 0 \le z \le L$$

Por el principio de acción-reacción (3ª ley de Newton), el cilindro ejerce una fuerza igual en módulo y de sentido contrario sobre el agua. Por tanto, la masa medida por la balanza será la del agua más la correspondiente al empuje, es decir

$$m = \frac{P_{ag} + E}{g} = m_0 + \frac{E}{g}$$

Sustituyendo la expresión del empuje cuando el cilindro está parcialmente sumergido y utilizando la expresión obtenida en el apartado a) obtenemos

$$m(h) = m_0 + \frac{E}{g} = m_0 + \rho_{ag}\, A_2\, z = m_0 + \rho_{ag}\, A_2\, \frac{H_0 - h}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2}$$

Sustituyendo los datos del problema, la masa en gramos viene dada por

$$m(h) = 1800{,}0 + (1{,}0)\,(\pi\, 2{,}5^2)\,\frac{20 - h}{1 - (5/10)^2} = 1800{,}0 + 26{,}18 \cdot (20 - h)$$

donde h está expresada en cm.

Por otro lado, cuando el cilindro está totalmente sumergido (pero sin tocar el fondo) tenemos que

$$m = m_0 + \rho_{\text{ag}}\, A_2\, L = 1800{,}0 + 1{,}0 \cdot \pi\, 2{,}5^2 \cdot 10 = 1996{,}3\ \text{g}$$

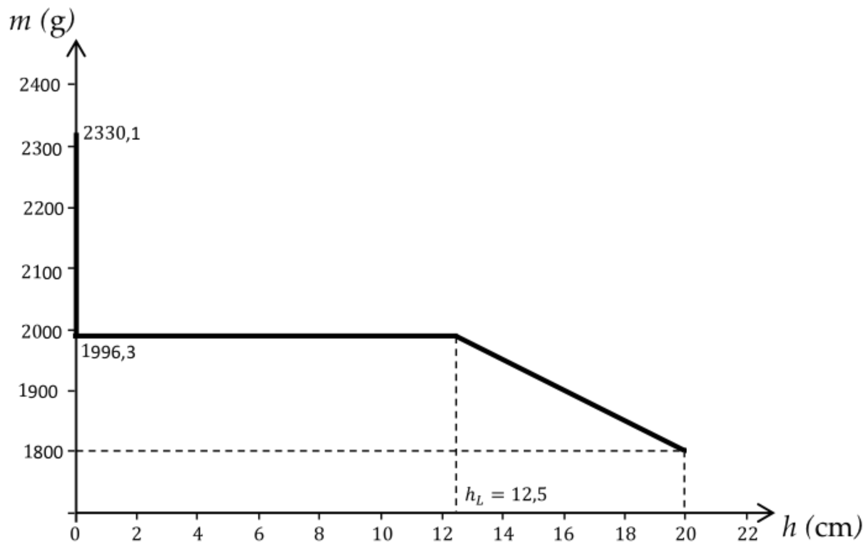
Finalmente, cuando el cilindro se apoya en la base del vaso ($h = 0$) la medida de la balanza será

$$m = 1800 + m_{cil} = 1800{,}0 + \rho_{Al} A_2 L = 2330{,}1\ \text{g}$$

Por tanto, la expresión general que nos pide el apartado es la siguiente:

$$m(h) = \begin{cases} 1800{,}0 + 26{,}18 \cdot (20 - h)\,, & h_L \leq h \leq 20\ \text{cm} \\ 1996{,}3\,, & 0 \leq h \leq h_L \\ 2330{,}1\,, & h = 0 \end{cases}$$

donde $h_L = H(L) - L = 22{,}5 - 10 = 12{,}5\ \text{cm}$ es el valor máximo de la distancia desde la base inferior del cilindro al fondo del vaso, estando el cilindro totalmente sumergido. La representación gráfica de la solución es la siguiente:



Ver enunciado 94

95. Determinación de la tensión superficial de un líquido: solución

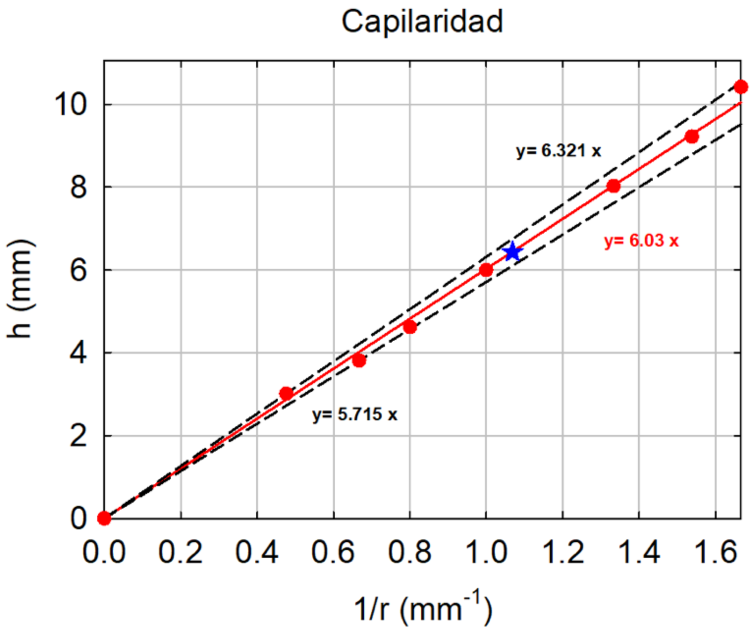
a) Definiendo la variable $z = 1/r$ tenemos ya una relación lineal de h frente a z:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g} z \qquad (1)$$

Completamos la tabla:

r (mm)	0,60	0,65	0,75	1,00	1,25	1,50	2,10
h (mm)	10,4	9,22	8,03	6,00	4,62	3,81	3,01
$z = 1/r$ (mm^{-1})	1,67	1,54	1,33	1,00	0,80	0,67	0,48

b) En la siguiente gráfica se ha realizado el correspondiente análisis, donde los puntos rojos corresponden a la tabla anterior y la recta roja es la línea de tendencia lineal. La estrella azul corresponde al punto medio con coordenadas $(z, h) = (1{,}07, 6{,}44)$.



c) Dado que la recta buscada ha de pasar por el punto (0-0) tenemos que dibujar (línea roja) la recta que pasa por el origen y el punto medio.

$$h = 6{,}03\, z \qquad (2)$$

Al comparar la recta de regresión con la ecuación (1) se observa que:

$$\frac{2\gamma}{\rho g} = 6{,}03 \ \text{mm}^2$$

Con lo que la tensión superficial es:

$$\gamma = 23{,}3\text{x}10^{-3}\ \text{N/m}$$

Para determinar la incertidumbre de la tensión superficial se usan las rectas (a trazos negros en la gráfica) que pasan por el origen (0-0) y ajustan la distribución por arriba o por abajo.

pendiente máxima $\rightarrow y = 6{,}321\text{x}$

pendiente mínima $\rightarrow y = 5{,}715\text{x}$

La incertidumbre en la pendiente:

Δ(pendiente) $= (6{,}321\text{-}5{,}715)/2 = 0{,}606\ \text{mm}^2$

Así tenemos que:

$$\frac{2\gamma}{\rho g} = (6{,}03 \pm 0{,}61)\ \text{mm}^2$$

Finalmente expresamos el resultado en unidades del Sistema Internacional con su error:

$$\gamma = (23{,}3 \pm 2{,}3) \times 10^{-3}\ \text{N/m}$$

d) Para un capilar de radio 1,11 mm simplemente tenemos que usar la recta roja, ecuación (2) para $z = 1/(1{,}11\ \text{mm}) = 0{,}9\ \text{mm}^{-1}$:

$$h = (6{,}03 \pm 0{,}61) z = (5{,}43 \pm 0{,}55)\ \text{mm}$$

Ver enunciado 95

96. La lluvia y el corredor que se moja: solución

a) Sobre el área frontal A_f impacta el volumen de agua barrido por el corredor durante la carrera. Por tanto, la cantidad de agua recibida será:

$$M_f = \rho\, A_f\, L$$

b) Sobre la parte superior A_s impacta la siguiente cantidad de agua:

$$M_s = \rho\, A_s\, v_0\, t = \rho\, A_s v_0 \frac{L}{v} = \rho\, A_s\, L \frac{v_0}{v}$$

c) La cantidad de agua total M tiene dos sumandos: uno que cae como $1/v$ y otro es constante ($\rho A_f L$). Por tanto:

d) La cantidad de agua sobre la superficie superior decrece con la velocidad mientras que la recibida en la superficie frontal es independiente de aquella.

e) Para el caso numérico propuesto:

$$M = 0{,}003 \times 10000 \left(0{,}04 \times \frac{2}{4} + 0{,}34\right) = 10{,}8\,\mathrm{kg}$$

de los cuales son $0{,}6\ \mathrm{kg}$ en cabeza y hombros y $10{,}2\ \mathrm{kg}$ (casi todo) en pecho y piernas. Si pensamos en una velocidad de $0{,}8\mathrm{m/s}$ (como ir andando) serían 3 y $10{,}2\ \mathrm{kg}$ respectivamente.

Ver enunciado 96

97. Velocidad de una onda en una cuerda vertical con masa: solución

Cuando la cuerda está en equilibrio, en cada punto de la misma se tiene que cumplir

$$\vec{T} + \vec{P} = 0$$

donde $P = \mu \cdot x \cdot \mathrm{g}$ es el peso ejercido por la parte de la cuerda situada por debajo de dicho punto, siendo x la distancia con respecto al extremo inferior de la cuerda. Por tanto,

$$T(x) = P(x) = \mu \cdot x \cdot \mathrm{g}$$

Como la tensión de la cuerda es distinta en cada punto de la misma, también lo será la velocidad de las ondas que se propaguen en la cuerda:

$$v(x) = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{x \cdot \mathrm{g}}$$

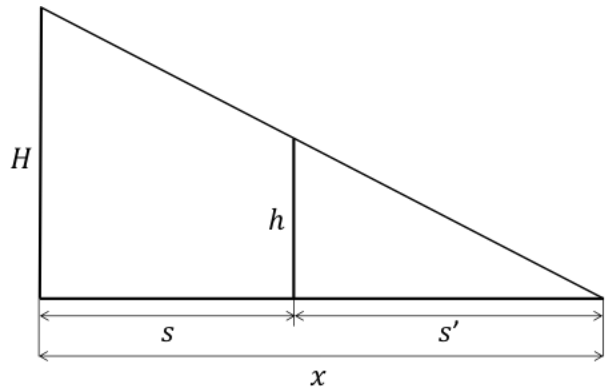
Para calcular el tiempo que tarda la onda en recorrer la cuerda integramos:

$$dt = \frac{dx}{v} \quad \Rightarrow \quad t = \int_0^L \frac{dx}{(\mathrm{g} \cdot x)^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{L}{\mathrm{g}}}$$

Ver enunciado 97

98. Velocidad de la sombra: solución

Hacemos un esquema de la situación que plantea el problema:



donde llamamos s a la distancia entre el peatón y la farola, $s´$ a la distancia entre el peatón y la sombra de la cabeza y x a la distancia desde dicha sombra a la farola.

La velocidad con la que el peatón se mueve hacia la farola es, por tanto, $v_1 = \frac{ds}{dt}$, mientras que la velocidad de la sombra con respecto a la farola es $v = \frac{dx}{dt}$.

a) Por semejanza de triángulos, se tiene que

$$\frac{h}{H} = \frac{s'}{x} \Rightarrow h \cdot x = H \cdot s' = H \cdot (s - x)$$

Derivamos con respecto al tiempo:

$$h \cdot \frac{dx}{dt} = H \cdot \left(\frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) \;\Rightarrow\; h \cdot v = H \cdot (v - v_1)$$

Despejando v obtenemos

$$v = \frac{H}{H - h} v_1$$

Por tanto, si el peatón se mueve con velocidad constante la velocidad de la sombra también es constante.

b) Teniendo en cuenta la expresión anterior, la velocidad de la sombra de la cabeza siempre es mayor que la del peatón.

c) Llamando $v´$ a la velocidad de la sombra respecto del peatón tenemos que

$$v' = \frac{ds'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - s) = \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} = v - v_1$$

Utilizando el resultado del apartado (a) obtenemos

$$v' = \frac{h}{H - h} v_1$$

d) A partir de la expresión anterior se tiene que:

$$h < {}^{H}\!/_{2} \;\Rightarrow\; v' < v$$

$$h > {}^{H}\!/_{2} \;\Rightarrow\; v' > v$$

Ver enunciado 98

99. El salto de Félix Baumgartner: solución

a) La aceleración de la gravedad a una altura de 30 km es ligeramente inferior a la que existe sobre la superficie de la Tierra:

$$\frac{g_{30k}}{g_0} = \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 = 0{,}995 \;\Rightarrow\; g_{30k} = 9{,}76 \;\; \mathrm{m/s^2}$$

Si el movimiento en caída libre hubiese sido con aceleración constante, esta sería

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2 \cdot (39000 - 2500)}{(4 \cdot 60 + 20)^2} = 1{,}27 \;\; \mathrm{m/s^2}$$

que, efectivamente, es notablemente menor que la de la gravedad.

b) Durante la caída actúan sobre Félix la fuerza de la gravedad y la de fricción con la atmósfera, por lo que su aceleración viene dada por

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g - \frac{1}{2}C\,\rho\,A\,v^2$$

La velocidad límite es aquella para la cual ambas fuerzas se igualan, siendo, por tanto, la aceleración nula y la velocidad de caída constante

$$mg = \frac{1}{2}C\,\rho\,A\,v_{lim}^2 \;\Rightarrow\; v_{lim} = \left(\frac{2mg}{C\,\rho\,A}\right)^{1/2}$$

Sustituyendo los datos obtenemos

$$v_{lim} = \left(\frac{2mg}{C\ \rho\ A}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 105 \cdot 9{,}8}{1{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}35}\right)^{1/2} = 106{,}4\ \ \mathrm{m/s}$$

Con esta suposición sobre la densidad de la atmósfera, la presión atmosférica en la superficie de la Tierra sería

$$P_{atm} = \rho\, \mathrm{g}\, h = 0{,}35 \cdot 9{,}8 \cdot 27000 = 92{,}61\ \mathrm{KPa} = 0{,}91\ \mathrm{atm}$$

c) Trazando líneas paralelas a los ejes en la figura 1 se determina aproximadamente la velocidad de Félix (v_F) y del sonido (v_S) en los instantes de tiempo especificados. Con los valores de v_S se han trazado líneas paralelas a los ejes en la figura 2 para determinar aproximadamente a qué altura se encontraba Félix en cada instante.

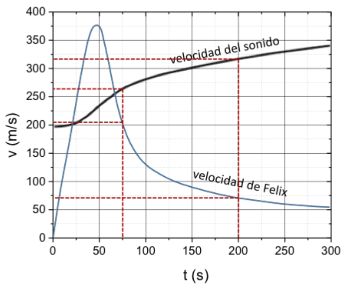


Figura 1

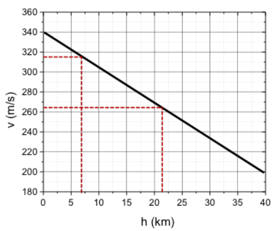


Figura 2

El resultado es el siguiente:

$$t_1 = 75\ \mathrm{s}:\ \ v_{F1} = 206\ \ \mathrm{m/s}\ \ , v_{s1} = 265\ \ \mathrm{m/s}\ \ , h_1 = 23\ \mathrm{km}$$

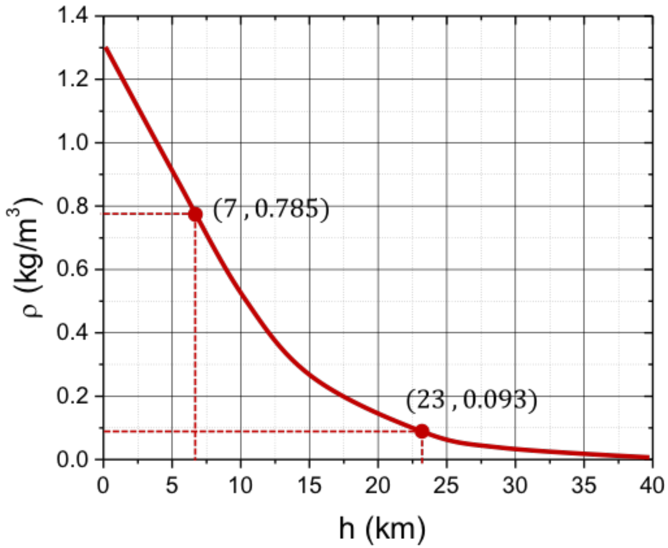
$$t_2 = 200\,\mathrm{s}:\ \ v_{F2} = 71\ \ \mathrm{m/s}\ , v_{s2} = 315\ \ \mathrm{m/s}\ , h_2 = 7\ \mathrm{km}$$

Considerando v_F como la velocidad límite a cada altura podemos obtener los correspondientes valores de la densidad atmosférica:

$$\rho_1 = \frac{2\,m\,\mathrm{g}}{C\,A\,v_{F1}^2} = 0{,}093\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_2 = \frac{2\,m\,\mathrm{g}}{C\,A\,v_{F2}^2} = 0{,}785\ \mathrm{kg/m^3}$$

Representamos los dos puntos obtenidos, (h_1, ρ_1) y (h_2, ρ_2), en la gráfica ρ *vs* h y, a partir de ellos, dibujamos la forma de la curva que indica cómo varía la densidad del aire en función de la altura.



d) Trazando líneas paralelas a los ejes en la figura 1 se determina el intervalo temporal $(t_1, t_2) = (22\text{s}, 66\text{s})$ durante el que Félix cae a una velocidad mayor que la del sonido y las velocidades en los extremos de dicho intervalo:

$$t_1 = 22 \text{ s}: \; v_{F1} = v_{s1} = 203 \text{ m/s}$$

$$t_2 = 66 \text{ s}: \; v_{F2} = v_{s2} = 255 \text{ m/s}$$

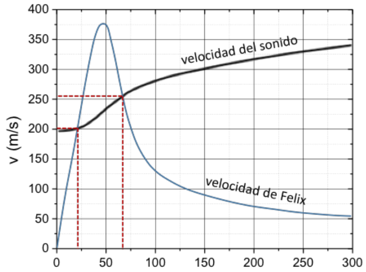


Figura 1

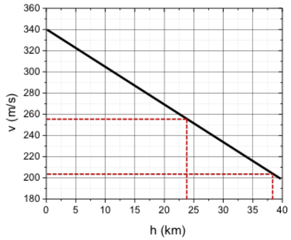


Figura 2

Con los valores de v_{s1} y v_{s2} trazamos líneas paralelas a los ejes en la figura 2 para determinar aproximadamente las alturas correspondientes.

$$t_1 = 22 \text{ s}: \; v_{F1} = v_{s1} = 203 \text{ m/s}, \; h_1 = 38 \text{ km}$$

$$t_2 = 66 \text{ s}: \; v_{F2} = v_{s2} = 255 \text{ m/s}, \; h_2 = 23 \text{ km}$$

Por tanto, entre las alturas $h_1 = 38$ km y $h_2 = 23$ km Félix caía con una velocidad superior a la del sonido.

e) Durante el primer intervalo de tiempo ($t < 50\mathrm{s}$) el movimiento sería el mismo, pues en esta región la densidad del aire es muy pequeña y el rozamiento, por tanto, es despreciable. En el segundo intervalo ($t > 50\mathrm{s}$) el rozamiento no es despreciable. Si suponemos que en cada instante la velocidad es la velocidad límite correspondiente a la altura a la que se encuentra, entonces el tiempo de caída en este segundo intervalo es

$$t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{v_{lim}} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{C\ \rho\ A}{2\ m\ \mathrm{g}}\right)^{1/2} dz = \left(\frac{C\ A}{2\ m\ \mathrm{g}}\right)^{1/2} \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)^{1/2}\, dz$$

Por tanto,

$$\frac{t'}{t} = \frac{(276-50)}{(260-50)} = \left(\frac{A'}{A}\right)^{1/2} \Rightarrow A' = 1{,}16\, A = 0{,}46\ \mathrm{m}^2$$

Ver enunciado 99

100. Determinación del coeficiente de atenuación de radiación gamma por el plomo: solución

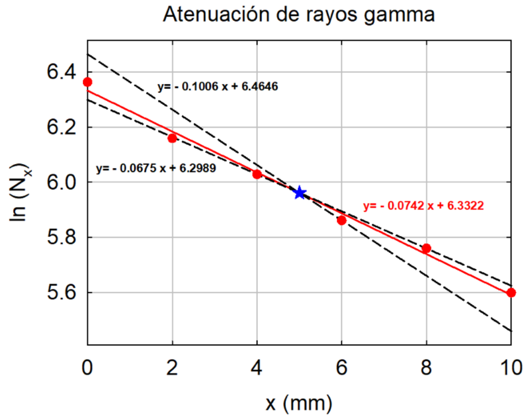
a) La relación entre el número de cuentas N_X y el espesor del material x no es lineal, pero se puede hacer que lo sea simplemente tomando logaritmos en la ecuación (1) de forma que:

$$\ln(N_x) = \ln(N_0) - \mu \cdot x \qquad (2)$$

Se construye la tabla de datos con los pares de valores de la variable independiente x y la dependiente, $\ln(N_X)$:

x (mm)	0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
$\ln(N_X)$	6,363	6,159	6,028	5,861	5,759	5,598

b) En la siguiente gráfica se ha realizado el correspondiente análisis, donde los puntos rojos corresponden a la tabla anterior y la recta roja es la línea de tendencia lineal. La estrella azul corresponde al punto medio con coordenadas (5,0 – 5,96).



La ecuación de la recta, línea roja, que mejor ajusta a los datos experimentales es:

$$\ln(N_X) = -0{,}0742x + 6{,}3322$$

c) Al comparar la recta de regresión con la ecuación (2) se observa que:

$$\mu = 0.0742 \text{ mm}^{-1}$$

$$\ln N_0 = 6.3322$$

Entonces el valor de N_0 calculado a partir del ajuste es:

$$N_0 = e^{6.3322} = 562$$

Para determinar las incertidumbres en el coeficiente de atenuación y en N_0, se usan las rectas (a trazos negros en la gráfica) que pasan por el punto medio (estrella azul) de la distribución de puntos y la ajustan por arriba o por abajo.

pendiente máxima → $y = -0{,}1006x + 6{,}4646$

pendiente mínima → $y = -0{,}0675x + 6{,}2989$

La incertidumbre en la pendiente:

$$\Delta(pendiente) = \frac{0{,}1006 - 0{,}0675}{2} = 0{,}0166\ \mathrm{mm}^{-1}$$

La incertidumbre en la ordenada en el origen:

$$\Delta(ordenada) = \frac{6{,}4646 - 6{,}2989}{2} = 0{,}0828$$

En nuestro caso la ordenada en el origen es $\ln(N_0)$ por lo que usando la teoría de propagación de errores tenemos una incertidumbre para $N_0 = \exp(a)$:

$$\Delta(\mathrm{e}^a) = e^a\,\Delta a = 562 \cdot 0{,}0828 = 47$$

El resultado final, con el número adecuado (en este caso dos) de cifras significativas, será:

$$\mu = 0{,}074 \pm 0{,}017\ \mathrm{mm}^{-1}$$

$$N_0 = (56 \pm 5) \times 10$$

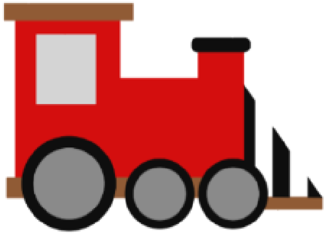
d) Valor que se puede comparar con el medido a espesor cero de plomo:

$$N_0(\mathrm{medido}) = 580$$

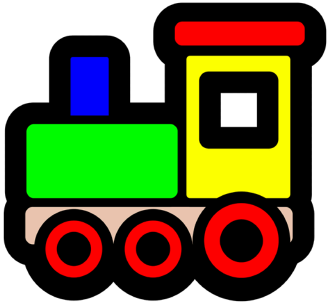
Ver enunciado 100

Enlaces fuentes imágenes

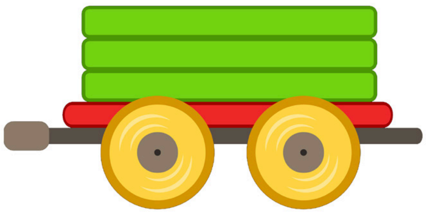
CINEMÁTICA



https://www.zazzle.es/arte_del_tren_para_los_cuartos_el_cuarto_de_ninos-228792104415122533

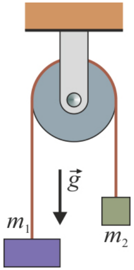


https://pixabay.com/es/tren-juguete-jugar-locomotora-37526/

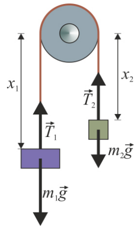


http://clipground.com/railway-wagon-clipart.html

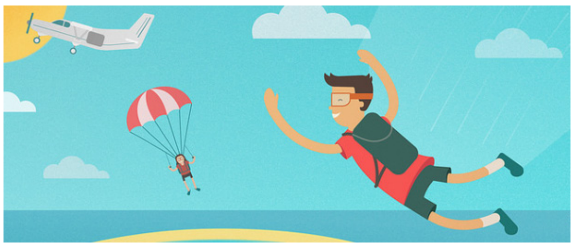
FUERZAS



http://laplace.us.es/wiki/index.php/Archivo:Esquema-maquina-atwood.png



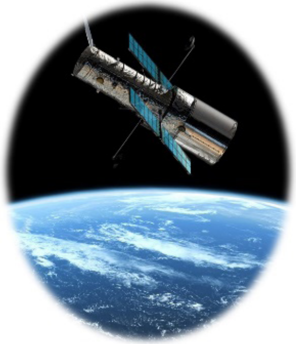
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Archivo:Maquina-atwood.png



Dubai - Skydiving over the Palm (Creative Commons)

https://www.flickr.com/photos/139169603@N05/25527356383/in/album-72157666019639040/

FUERZAS, TRABAJO Y ENERGÍA



https://spacetelescope.org/images/hubble_earth_sp01/

http://sherwoodparkweather.com/what-is-it-really-like-to-live-in-space-ft-astronaut-reid-wiseman-amazing-space-videos/

GRAVITACIÓN

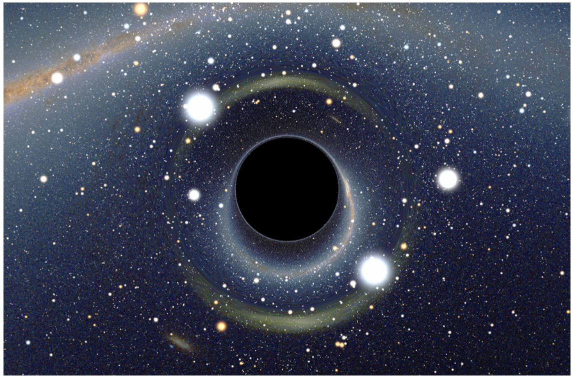
https://www.kioskla.co/3-boyutlu-yaziciyla-yapilmis-ilk-uydu-uzaya-gonderildi/

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Earth_seen_from_Apollo_17.jpg

"The Blue Marble" is a famous photograph of the Earth taken on December 7, 1972, by the crew of the Apollo 17 spacecraft en route to the Moon at a distance of about 29,000 kilometres (18,000 mi). It shows Africa, Antarctica, and the Arabian Peninsula.

https://www.wikiart.org/en/rene-magritte/the-castle-of-the-pyrenees-1959

https://pixabay.com/en/the-little-prince-space-drawing-2476434/

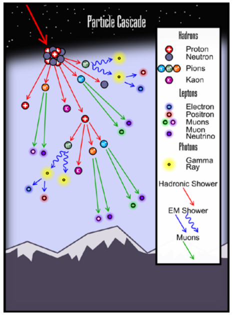


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BH_LMC.png

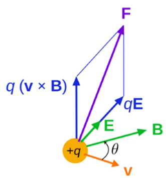
http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=885

ELECTRICIDAD

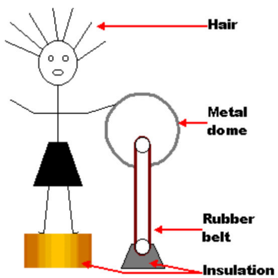
https://www.flickr.com/photos/uclmaps/25112074267



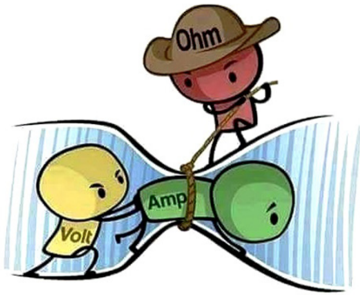
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ParticleCascade.svg



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorentz_force_particle.svg



https://en.wikibooks.org/wiki/GCSE_Science/Static_Electricity



https://www.esmijovi.com/aprendiendo-la-ley-de-ohm/

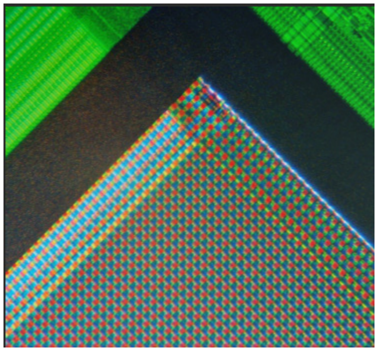
MISCELÁNEA

https://pxhere.com/en/photo/760569

https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Stanford-linear-accelerator-usgs-ortho-kaminski-5900.jpg

https://pixabay.com/en/friends-biscuit-parts-give-take-3282275/

http://www.instructables.com/id/Kitchen-Physics-Measure-the-speed-of-light-with-ch/

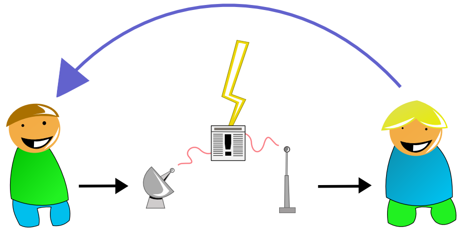


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A_micrograph_of_the_corner_of_the_photosensor_array_of_a_%E2%80%98webcam%E2%80%99.jpeg

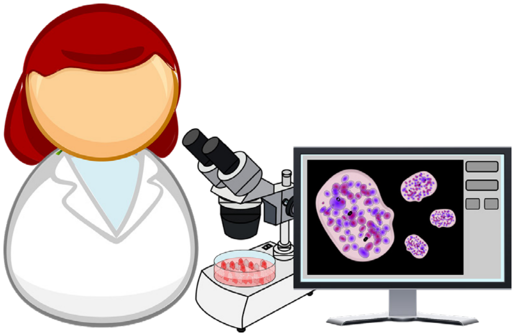
https://pxhere.com/es/photo/1194878

https://www.flickr.com/photos/re-yk/40536151582

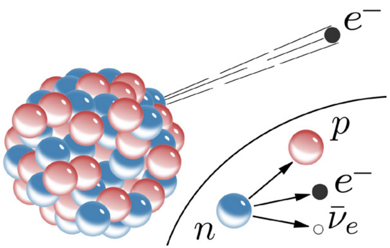
https://pixabay.com/en/albert-einstein-german-physicist-3085611/



https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Communication_shannon-weaver2.svg

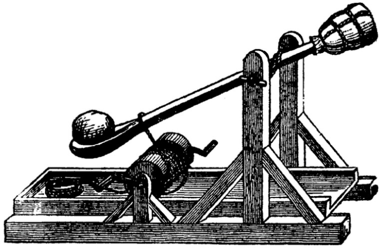


https://pixabay.com/en/analysis-biology-cell-cell-culture-2025834/



https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Beta-minus_Decay.svg

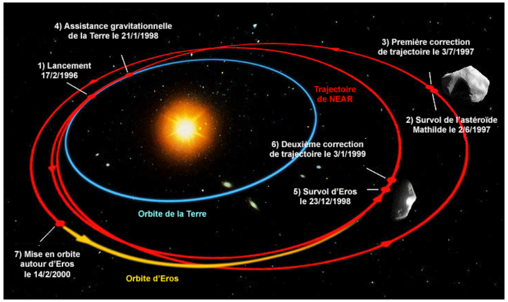
PROBLEMAS DE DESAFÍO



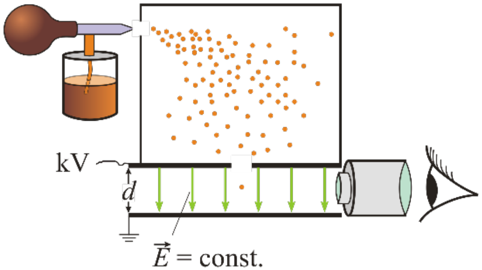
http://armasartesanales.blogspot.com/2014/03/catapulta.html

Historia De Las Armas Artesanales

https://pixabay.com/en/bungee-jumping-jump-brave-3164249/



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NEAR_space-craft_trajectory-fr.png



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simplified_sche-me_of_Millikan%E2%80%99s_experiment_replica.svg

ÍNDICE

Referencias

[1] Enlaces a las redes sociales y página web creadas para difundir los contenidos.

- http://diarium.usal.es/olimpiadafisica/
- https://www.facebook.com/Olimpiada.Fisica.Usal
- https://twitter.com/OlimpyFisUsal
- https://www.instagram.com/olimpiadafisica/

[2] The Physics Teacher journal by AIP (https://aapt.scitation.org/journal/pte)

- Naukas (http://naukas.com/).
- «Física. Cuestiones y problemas resueltos. Acceso a Universidad y Escuelas Técnicas» A. Martínez y J. Manera. Ed. Bruño.

[3] P.A. Tipler y G. Mosca, Física (Reverté, 2010) 6.ª Edición, R.A. Serway, Física para Ciencias e Ingeniería (Thompson, 2009) 7.ª Edición.

[4] Las figuras creative commons.

ÍNDICE

ÍNDICE

DOCUMENTOS DIDÁCTICOS, 162

¿Quieres saber el cómo y el porqué de todo aquello que observas en tu vida diaria? Estudia Física y encontrarás la respuesta. La Física te enseña a pensar, a entender por qué el cielo es azul y las puestas de sol rojizas, por qué la Tierra es redonda, cómo se genera la electricidad, cómo es posible que una bicicleta en movimiento sea estable, a entender el origen del calentamiento global…

En esta publicación se recogen las propuestas que cada semana los autores han elaborado de cara a la preparación de la Olimpiada de Física: un *Reto de Física* o un *Problema Desafío*. En los «retos» se plantean cuestiones relacionadas con la vida cotidiana, con apariencia sencilla y que no requieren demasiado tiempo ni recursos para su solución. Para resolver los «desafíos», sin embargo, se requieren procedimientos más complejos, pero manteniendo siempre un nivel de dificultad asequible para el estudiante. Se plantean además experiencias que pueden realizar los estudiantes de forma autónoma.

Este libro recoge también algunos problemas propuestos en la fase local de la Olimpiada de Física en Salamanca, y que fueron planteados por otros profesores que en ese momento formaban parte de la comisión. Estos problemas son también apropiados para los estudiantes de primeros cursos de Grados de Ciencias

VNiVERSiDAD D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

800 AÑOS 1218 ~ 2018

Olimpiadas de Física
VNiVERSiDAD D SALAMANCA

ISBN: 978-84-1311-002-8